河南省安阳市第一中学2023-2024学年高一下学期第二次阶段考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．随着老龄化时代的到来，某社区为了探讨社区养老模式，在社区内对2400名老年人、2400名中年人、2100名青年人用分层抽样方法随机发放了调查问卷345份，则在老年人中发放的调查问卷份数是（　）

A．110　　B．115　　C．120　　D．125

2．已知复数$z=m^2-1+\left(m+\mathrm{i}^2\right)\cdot\mathrm{i}\left(m\in\mathbf{R}\right)$表示纯虚数，则$m=$（　）

A．1　　B．-1　　C．1或-1　　D．2

3．已知正方形$ABCD$的边长为$6,\overline{BM}=\frac{1}{6}\overline{BC},\overline{CN}=\frac{1}{3}\overline{CD}$，则$\overline{BN}\cdot\overline{AM}$的值为（　）

A．-6　　B．-5　　C．-4　　D．-3

4．已知在正四面体$A-BCD$中，M为AB的中点，则直线CM与AD所成角的余弦值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D．$\frac{2}{3}$

5．已知向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则下列结论：

①.若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\tan\alpha=\sqrt{3}$

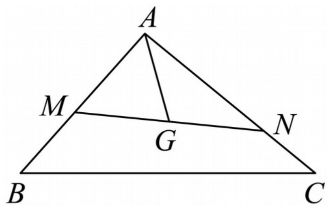
②.若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

③.若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=3$

其中正确结论的有（　）

A．1个　　B．2个　　C．3个　　D．0个

6．如图，已知点G是$\triangle ABC$的重心，过点G作直线分别与AB，AC两边交于M，N两点，设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，则$x+4y$的最小值为（　）

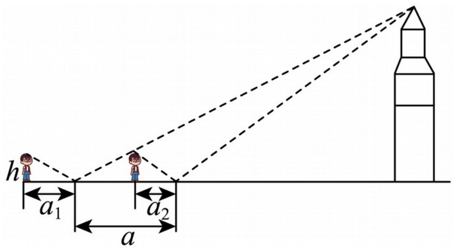


A．9　　B．4　　C．3　　D．$\frac{5}{2}$

7．已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，P为DD_1的中点，过A，B，P三点作平面α，则该正方体的外接球被平面α截得的截面圆的面积为（　）

A．$\frac{13\pi}{5}$　　B．$\frac{16\pi}{5}$　　C．3π　　D．$\frac{14\pi}{5}$

8．在一堂数学实践探究课中，同学们用镜面反射法测量学校钟楼的高度.如图所示，将小镜子放在操场的水平地面上，人退后至从镜中能看到钟楼顶部的位置，此时测量人和小镜子的距离为$a_1=1.00\mathrm{m}$，之后将小镜子前移$a=6.00\mathrm{m}$，重复之前的操作，再次测量人与小镜子的距离为$a_2=0.60\mathrm{m}$，已知人的眼睛距离地面的高度为$h=1.75\mathrm{m}$，则钟楼的高度大约是（　）



A．27.75m　　B．27.25m　　C．26.75m　　D．26.25m

二、多选题

9．已知m,n是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，则下列命题为真命题的有（　　）

A．若$m\perp\alpha,m\perp\beta$，则$\alpha \parallel \beta$

B．若$\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则$m\perp n$

C．若$\alpha \parallel \beta,m \parallel \beta$，则$m \parallel \alpha$

D．若m,n为异面直线，$m\subset\alpha,n\subset\beta,m \parallel \beta,n \parallel \alpha$，则$\alpha \parallel \beta$

10．已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为$a,b,c,$下列说法错误的是（　　）

A．若$a\cos A=b\cos B$，则$\triangle ABC$是等腰三角形

B．若$B=60^{\circ},b^2=ac$，则$\triangle ABC$是直角三角形

C．若$\dfrac{c-a}{2c}=\sin^2\dfrac{B}{2}$，则$\triangle ABC$是直角三角形

D．“$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$”是“$\triangle ABC$是等边三角形”的充分不必要条件

11．已知正四面体$P-ABC$的棱长为$\sqrt{2}$，则（　　）

A．正四面体$P-ABC$的外接球表面积为4π

B．正四面体$P-ABC$内任意一点到四个面的距离之和为定值

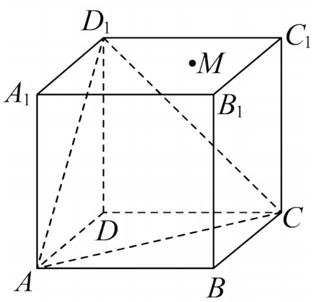
C．正四面体$P-ABC$的相邻两个面所成二面角的正弦值为$\frac{1}{3}$

D．正四面体$S-EFG$在正四面体$P-ABC$的内部，且可以任意转动，则正四面体$S-EFG$的体积最大值为$\frac{1}{81}$

三、填空题

12．已知复数z满足$z\left(1+\mathrm{i}\right)=3+4\mathrm{i}$，（i为虚数单位），则$\left|z\right|=$____.

13．在边长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M是该正方体表面上一个动点，且$BM//$平面AD_1C，则动点M的轨迹的长度是_____.



14．在直角$\triangle ABC$中，$AB\perp AC$，$AC=\sqrt{3}$，$AB=2$，平面ABC内动点P满足$CP=1$，则$\overline{AP}\cdot\overline{BP}$的最小值为____.

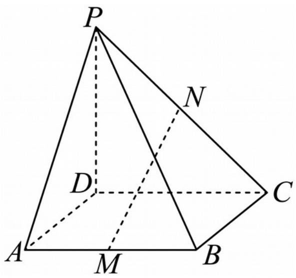
四、解答题

15．已知z是复数，$z+2\mathrm{i}$和$\dfrac{z}{1-\mathrm{i}}$均为实数，$z_1=z+\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{m-1}\mathrm{i}$，其中$\mathrm{i}$是虚数单位.

(1)求复数z的共轭复数$\overline{z}$；

(2)若复数z_1在复平面内对应的点在第一象限，求实数m的取值范围.

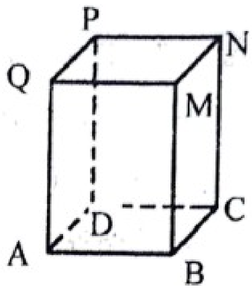
16．在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面是边长是1的正方形，侧棱PA与底面成45°的角，M，N分别是AB，PC的中点.



(1)求证:$MN//$平面PAD;

(2)二面角$P-AC-D$平面角的正切值.

17．在直四棱柱$ABCD-QMNP$中，底面$ABCD$为平行四边形，$PB\perp AC$.



(1)证明：$|PA|=|PC|$

(2)若$|PD|=1,\angle DAB=60^{\circ}$，当$PA$与平面$PBC$所成角的正弦值最大时，求四棱锥$P-ABCD$的体积.

18．已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边为a,b,c，且$\frac{3(\sin A-\sin B)}{\sin C}=\frac{3c-2b}{a+b}$．

(1)求$\sin A$；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$\frac{4}{3}\sqrt{2}$；

（i）已知E为BC的中点，求$\triangle ABC$底边BC上中线AE长的最小值；

（ii）求内角A的角平分线AD长的最大值.

19．若A，B，C是平面内不共线的三点，且同时满足以下两个条件：①$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$；②存在异于点$A$的点$G$使得：$\overrightarrow{AG}$与$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$同向且$\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AG}|$，则称点$A$，$B$，$C$为可交换点组．已知点$A$，$B$，$C$是可交换点组．

(1)求$\angle BAC$；

(2)若$A(-1,0)$，$B(2,\sqrt{3})$，$C(x,y)(y>0)$，求C的坐标；

(3)记a，b，c中的最小值为$\min\{a,b,c\}$，若$|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，点$P$满足$|\overrightarrow{PG}|=1$，求$\min\{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\}$的取值范围.

参考答案：

1．C

【分析】设在老年人中发放的调查问卷份数为x，根据分层抽样的性质列方程求解.

【详解】设在老年人中发放的调查问卷份数为x，

则$\frac{x}{2400}=\frac{345}{2400+2400+2100}$，

解得$x=120$.

所以在老年人中发放的调查问卷份数是120.

故选：C.

2．B

【分析】根据题意结合复数的相关概念列式求解即可.

【详解】因为$z=m^2-1+\left(m+\mathrm{i}^2\right)\cdot\mathrm{i}=m^2-1+\left(m-1\right)\cdot\mathrm{i}$，

若复数z表示纯虚数，则$\begin{cases}m^2-1=0\\m-1\neq 0\end{cases}$，解得$m=-1$.

故选：B.

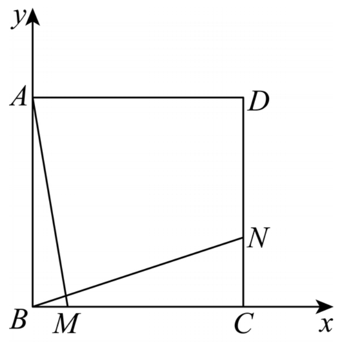
3．A

【分析】方法一：建立如图平面直角坐标系，利用平面向量数量积的坐标表示即可求解；
方法二：利用平面向量的线性运算和数量积的运算律计算即可求解.

【详解】方法一：如图所示，建立以B为原点的平面直角坐标系，

得$B(0,0),M(1,0),A(0,6),N(6,2)$，则$\overrightarrow{AM}=(1,-6),\overrightarrow{BN}=(6,2)$，

故$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AM}=6\times1+2\times(-6)=-6$.



方法二：$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，

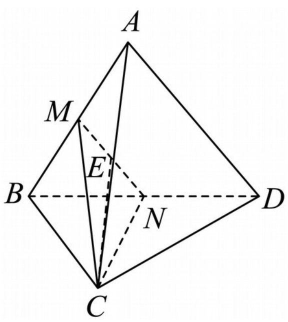
故$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{AM}=\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}^2=\frac{1}{6}\times36-\frac{1}{3}\times36=-6$.

故选：A

4．C

【分析】根据给定条件，作出异面直线CM与AD所成角，再在三角形中求解即得.

【详解】设正四面体$A-BCD$的棱长为2，取BD的中点N，连接MN，CN，如图，



由M是AB的中点，得$MN//AD$，则$\angle CMN$是CM与AD所成的角或其补角，

显然$MC=NC=\sqrt{3}$，取MN的中点E，连接CE，则$CE\perp MN$，

在$\triangle CME$中，$ME=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}$，因此$\cos\angle CME=\frac{ME}{CM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线CM与AD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

故选：C

5．B

【分析】根据向量共线的坐标表示判断①，根据数量积的坐标表示判断②，首先求出$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$，再根据数量积的定义求出$\vec{a}\cdot\vec{b}$，最后根据数量积的运算律判断③.

【详解】向量$\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，

若$\vec{a}//\vec{b}$，则$\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$，解得$\tan\alpha=\sqrt{3}$，故①正确；

若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=0$，解得$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故②正确；

因为$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，

若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times1\times\frac{1}{2}=1$，

故$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{4-2+1}=\sqrt{3}$，故③错误.

故选：B

6．C

【分析】借助平面向量线性运算与三点共线定理及基本不等式计算即可得.

【详解】由点G是$\triangle ABC$的重心，$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，

故$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{y}\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$，

由G、M、N三点共线，故$\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}=1$，

则$x+4y=\left(x+4y\right)\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4y}{3x}+\frac{x}{3y}\geq\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{4y}{3x}\cdot\frac{x}{3y}}=3$，

当且仅当$\frac{4y}{3x}=\frac{x}{3y}$，即$x=1$，$y=\frac{1}{2}$时，等号成立.

故选：C.

7．D

【分析】根据给定条件，求出球心O到平面α的距离，再利用球的截面小圆性质求出截面圆半径即可.

【详解】正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球球心是BD_1的中点O，而$BD_1\cap\alpha=B$，

则点O到平面α的距离h等于点D_1到平面α的距离的一半，又平面α过线段DD_1的中点P，

因此点D_1与点D到平面α的距离相等，由$AB\perp$平面ADD_1A_1，$AB\subset\alpha$，得$\alpha\perp$平面ADD_1A_1，

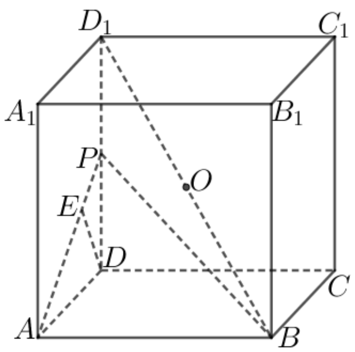
在平面ADD_1A_1内过D作$DE\perp AP$于E，而$\alpha\cap$平面$ADD_1A_1=AP$，于是$DE\perp\alpha$，

又$AP=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，从而$h=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\times\frac{AD\cdot DP}{AP}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，又球$O$的半径$R=\frac{1}{2}BD_1=\sqrt{3}$，

则正方体的外接球被平面α截得的截面圆半径r，有$r^2=R^2-h^2=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$，

所以正方体的外接球被平面α截得的截面圆的面积$S=\pi r^2=\frac{14\pi}{5}$.

故选：D



8．D

【分析】设钟楼的高度为PQ，根据相似得到$PQ=\dfrac{ah}{a_1-a_2}$，代入数据计算得到答案.

【详解】如下图，设钟楼的高度为PQ，

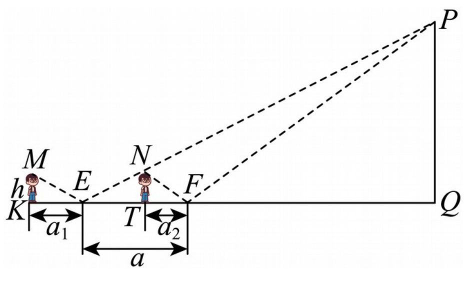
由$\triangle MKE \sim \triangle PQE$，可得：$EQ=\dfrac{PQ\cdot KE}{MK}=\dfrac{a_1\cdot PQ}{h}$，

由$\triangle NTF \sim \triangle PQF$，可得：$FQ=\dfrac{PQ\cdot TF}{NT}=\dfrac{PQ\cdot a_2}{h}$，

故$EQ-FQ=\dfrac{a_1\cdot PQ}{h}-\dfrac{PQ\cdot a_2}{h}=a$，

故$PQ=\dfrac{ah}{a_1-a_2}=\dfrac{6\times 1.75}{1-0.6}=\dfrac{10.5}{0.4}=26.25\text{m}$，

故选：D.



9．AD

【分析】根据直线与平面的位置关系，由线面垂直、线面平行的性质逐项判断即可得出结论.

【详解】对于A，若$m\perp\alpha,m\perp\beta$，α,β是两个不同的平面，则可得$\alpha\parallel\beta$，即A正确；

对于B，若$\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，当$m,n$都平行于两平面的交线时，$m\parallel n$，可知B错误；

对于C，若$\alpha\parallel\beta,m\parallel\beta$，则可能会$m\subset\alpha$，即C错误；

对于D，若$m\subset\alpha,n\subset\beta,m\parallel\beta,n\parallel\alpha$，又$m,n$为异面直线，所以$\alpha\parallel\beta$，即D正确.

故选：AD

10．ABD

【分析】利用正弦定理和余弦定理，将已知式边角互化，根据正弦函数，余弦函数的图象，借助于二倍角公式、降幂公式化简.即可一一判断正误.

【详解】对于A项，由$a\cos A=b\cos B$和正弦定理，$\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

即$\sin 2A=\sin 2B$，故得$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，

即$A=B$或$A+B=\frac{\pi}{2}$，即$\triangle ABC$是等腰三角形或直角三角形，故A项错误；

对于B项，因$B=60^\circ,b^2=ac$，由余弦定理，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

代入化简得，$(a-c)^2=0$，即得$a=c$，故$\triangle ABC$是等边三角形，故B项错误；

对于C项，由$\frac{c-a}{2c}=\sin^2\frac{B}{2}$和正弦定理，$\frac{\sin C-\sin A}{2\sin C}=\frac{1-\cos B}{2}$,化简得，

$\sin A=\sin C\cos B$ (*)，

因$A=\pi-(C+B)$，则$\sin A=\sin C\cos B+\cos C\sin B$，代入(*)，得$\sin B\cos C=0$，

因$0<B,C<\pi$，$\sin B>0$，则$\cos C=0$，故$C=\frac{\pi}{2}$,即C项正确；

对于 D 项，若 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $a=b, \cos A=\cos B=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$ 必成立，

故“$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$”是“$\triangle ABC$ 是等边三角形”的必要条件，故 D 项错误.

故选：ABD.

11．BD

【分析】将棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $P-ABC$ 放到棱长为 1 的正方体中，正方体的外接球即为正四面体的外接球，从而判断 A，利用等体积法判断 B，设 BC 中点为 D，连接 PD，AD，则 $\angle PDA$ 为所求二面角的平面角，利用余弦定理计算可判断 C，求出正四面体 $P-ABC$ 内切球的半径此时即为最大的正四面体 $S-EFG$ 的外接球的半径，从而判断 D.

【详解】棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $P-ABC$ 的外接球与棱长为 1 的正方体的外接球半径相同，

设外接球的半径为 R，则 $2R=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$，所以 $S=4\pi R^2=3\pi$，所以 A 错误.

设正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离分别为 d_1, d_2, d_3, d_4，

设正四面体 $P-ABC$ 的高为 d，

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由等体积法可得 $\dfrac{1}{3}S\left(d_1+d_2+d_3+d_4\right)=\dfrac{1}{3}Sd$，$\left(S=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle PBC}\right)$，

所以 $d_1+d_2+d_3+d_4=d$ 为定值，所以 B 正确.

如图所示，设 BC 中点为 D，连接 PD，AD，则 $AD\perp BC$，$PD\perp BC$，

故$\angle PDA$为所求二面角的平面角，$AP=\sqrt{2}$，$PD=AD=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

由余弦定理得$\cos\angle PDA=\frac{AD^2+PD^2-AP^2}{2AD\cdot PD}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{3}$，

则$\sin\angle PDA=\sqrt{1-\cos^2\angle PDA}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以C错误.

对于选项D，要使正四面体$S-EFG$在四面体$P-ABC$的内部，且可以任意转动，

则正四面体$S-EFG$的外接球要在四面体$P-ABC$内切球内部，

当正四面体$S-EFG$的外接球恰好为四面体$P-ABC$内切球时，正四面体$S-EFG$的体积最大值，

又$V_{P-ABC}=1^3-4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APC}=S_{\triangle PBC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

设正四面体$P-ABC$内切球的半径为r，则$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}r\left(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}+S_{\triangle PBC}\right)$，

即$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times r\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$r=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以正四面体$S-EFG$的外接球半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}$.

设正四面体$S-EFG$的边长为a，则$\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=2\times\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以$a=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

故体积$V_{S-EFG}=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{1}{81}$，即正四面体$S-EFG$的体积最大值为$\frac{1}{81}$，所以D正确.

故选：BD.