第三章

§3.5　利用导数研究恒(能)成立问题

课标要求

恒(能)成立问题是高考的常考考点，其中不等式的恒(能)成立问题经常与导数及其几何意义、函数、方程等相交汇，综合考查分析问题、解决问题的能力，一般作为压轴题出现，试题难度略大.

题型一　分离参数求参数范围

例1　已知函数$f(x)=e^x-ax-1$.

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的单调区间与极值；

解

当$a=1$时，$f(x)=e^x-x-1$，

所以$f'(x)=e^x-1$，

当$x<0$时，$f'(x)<0$；当$x>0$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(-\infty, 0)$上单调递减，在$(0, +\infty)$上单调递增，

所以当$x=0$时，函数$f(x)$有极小值$f(0)=0$，无极大值.

即$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty, 0)$，单调递增区间为$(0, +\infty)$，极小值为0，无极大值.

(2)若$f(x) \leqslant x^2$在$(0，+\infty)$上有解，求实数a的取值范围.

解

因为$f(x)\leqslant x^2$在$(0,+\infty)$上有解，

所以$e^x-x^2-ax-1\leqslant 0$在$(0,+\infty)$上有解，

当$x>0$时，不等式等价于$a\geqslant\dfrac{e^x}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$在$(0,+\infty)$上有解，

令$g(x)=\dfrac{e^x}{x}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$，则$g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}-\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=\dfrac{(x-1)[e^x-(x+1)]}{x^2}$，

由(1)知当$a=1$，$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$，

即$e^x-(x+1)>0$，

解

所以当$0<x<1$时，$g'(x)<0$；当$x>1$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，

所以当$x=1$时，$g(x)_{\min}=e-2$，所以$a\geq e-2$，

综上可知，实数a的取值范围是$[e-2，+\infty)$.

思维升华

分离参数法解决恒(能)成立问题的策略

(1)分离变量，构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题.

(2)$a \geqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a \geqslant f(x)_{max}$；

$a \leqslant f(x)$恒成立$\Leftrightarrow a \leqslant f(x)_{min}$；

$a \geqslant f(x)$能成立$\Leftrightarrow a \geqslant f(x)_{min}$；

$a \leqslant f(x)$能成立$\Leftrightarrow a \leqslant f(x)_{max}$.

跟踪训练 1　已知函数 $f(x)=ax-e^x(a\in\mathbf{R})$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

(1)当$a=1$时，求函数$f(x)$的极值；

解

当$a=1$时，$f(x)=x-e^x$，

则$f'(x)=1-e^x$，

当$x<0$时，$f'(x)>0$，当$x>0$时，$f'(x)<0$，

所以函数$f(x)$在$(-\infty，0)$上单调递增，在$(0，+\infty)$上单调递减，

所以函数$f(x)$的极大值为$f(0)=-1$，无极小值.

(2)若存在$x\in(0，+\infty)$，使不等式$f(x)\leqslant g(x)-e^x$成立，求实数a的取值范围.

解

若存在$x\in(0，+\infty)$，使不等式$f(x)\leqslant g(x)-e^x$成立，

则 $ax\leqslant\frac{\ln x}{x}(x>0)$，即 $a\leqslant\frac{\ln x}{x^2}(x>0)$，

则问题转化为 $a\leqslant\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)_{max}(x>0)$，

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x>0$，

$h'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，

解

当 $0<x<\sqrt{e}$时，$h'(x)>0$，当 $x>\sqrt{e}$时，$h'(x)<0$，

所以函数 $h(x)$在$(0，\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e}，+\infty)$上单调递减，

所以 $h(x)_{max}=h(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2e}$，所以 $a\leqslant\dfrac{1}{2e}$.

题型二　等价转化求参数范围

例2　(2023·柳州模拟)已知函数$f(x)=ax-\ln x$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

解

$f'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}(x>0)$，

①当$a\leqslant 0$时，$f'(x)<0$恒成立，$\therefore f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{a}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递减.

综上，当$a\leqslant 0$时，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递减.

(2)若$x=1$为函数$f(x)$的极值点，当$x\in[\mathrm{e}，+\infty)$时，不等式$x[f(x)-x+1]\leqslant m(\mathrm{e}-x)$恒成立，求实数$m$的取值范围.

解

$\because x=1$为函数$f(x)$的极值点，$\therefore f'(1)=0$，

$\therefore a=1$.

$f(x)=x-\ln x$，$x[f(x)-x+1]=x(1-\ln x)$，

当$x\in[\mathrm{e},+\infty)$时，不等式$x[f(x)-x+1]\leqslant m(\mathrm{e}-x)\Leftrightarrow x(1-\ln x)\leqslant m(\mathrm{e}-x)$，

即$x(1-\ln x)-m(\mathrm{e}-x)\leqslant 0$，

令$g(x)=x(1-\ln x)-m(\mathrm{e}-x)$，$x\in[\mathrm{e},+\infty)$，

解

则$g'(x)=m-\ln x$，

若$m\leqslant 1$，$g'(x)\leqslant 0$在$[\mathrm{e},+\infty)$上恒成立，

则$g(x)$在$[\mathrm{e},+\infty)$上单调递减，

$\therefore g(x)\leqslant g(\mathrm{e})=0$，满足题意.

若$m>1$，由$g'(x)>0$，可得$\mathrm{e}\leqslant x<\mathrm{e}^m$，则$g(x)$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^m)$上单调递增，

$\therefore$在$[\mathrm{e},\mathrm{e}^m)$上存在$x_0$使得$g(x_0)>g(\mathrm{e})=0$，与题意不符，

综上，实数m的取值范围为$(-\infty,1]$.

■ 思维升华

根据不等式恒成立构造函数转化成求函数的最值问题，一般需讨论参数范围，借助函数单调性求解.

跟踪训练 2　(2024·咸阳模拟)已知函数$f(x)=\ln x+x+\dfrac{2}{ax}(a\neq 0)$.

(1)当$a=1$时，求$f(x)$的极值；

解

当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+x+\frac{2}{x}$，定义域为$(0，+\infty)$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2)}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，得$x>1$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$，

故函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1，+\infty)$，

故$f(x)$有极小值$f(1)=0+1+2=3$，无极大值.

(2)若对$\forall x\in(\mathrm{e}^{-1}，\mathrm{e})$，$f(x)<x+2$，求实数$a$的取值范围.

解

若对$\forall x\in(\mathrm{e}^{-1}$，e)，$f(x)<x+2$，

即对$\forall x\in(\mathrm{e}^{-1}$，e)，$\ln x+\dfrac{2}{ax}-2<0$，

令$g(x)=\ln x+\dfrac{2}{ax}-2$，则$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{ax^2}=\dfrac{ax-2}{ax^2}$，

①当$a<0$时，$g'(x)=\dfrac{ax-2}{ax^2}>0$，函数$g(x)$在$(\mathrm{e}^{-1}$，e)上单调递增，

则$g(x)<g(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}+\dfrac{2}{a\mathrm{e}}-2=-1+\dfrac{2}{a\mathrm{e}}<0$，符合题意；

②当$a>0$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\dfrac{2}{a}>0$，

解

则函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

若 $g(x)<0$ 在 $(\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e})$ 上恒成立，

只需满足 $\begin{cases} g(\mathrm{e}^{-1})=-3+\dfrac{2}{a\mathrm{e}^{-1}}\leqslant 0, \\ g(\mathrm{e})=-1+\dfrac{2}{a\mathrm{e}}\leqslant 0, \end{cases}$ 解得 $a\geqslant\dfrac{2\mathrm{e}}{3}$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup\left[\dfrac{2\mathrm{e}}{3},+\infty\right)$.

题型三　双变量的恒(能)成立问题

例3　(2023·济南模拟)已知函数$f(x)=\dfrac{2e\ln x}{x}-1$(其中e为自然对数的底数)，函数$g(x)=x^3+ax^2+1$.

(1)求曲线$y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程；

解

$\because f'(x)=\dfrac{2\mathrm{e}(1-\ln x)}{x^2}$，$\therefore f'(1)=2\mathrm{e}$，

又$f(1)=-1$，

$\therefore y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程为$y+1=2\mathrm{e}(x-1)$，即$2\mathrm{e}x-y-2\mathrm{e}-1=0$.

(2)若对$\forall x_1$，$x_2\in[1，\mathrm{e}]$，不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$恒成立，求实数a的取值范围.

解

$\because$对$\forall x_1$，$x_2\in[1，e]$，不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$恒成立，$\therefore f(x)_{max}\leqslant g(x)_{min}$；

$\because f'(x)=\dfrac{2e(1-\ln x)}{x^2}$，

$\therefore$当$x\in[1，e]$时，$f'(x)\geqslant 0$恒成立，

$\therefore f(x)$在$[1，e]$上单调递增，$\therefore f(x)_{max}=f(e)=1$；

$g'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$，令$g'(x)=0$，

解得$x=0$或$x=-\dfrac{2a}{3}$；

解

①当$-\frac{2a}{3}\leqslant 1$，即 $a\geqslant -\frac{3}{2}$时，

$g'(x)\geqslant 0$在$[1，e]$上恒成立，

∴$g(x)$在$[1，e]$上单调递增，

∴$g(x)_{min}=g(1)=2+a$，

由$f(x)_{max}\leqslant g(x)_{min}$得$1\leqslant 2+a$，解得$a\geqslant -1$；

②当 $1<-\frac{2a}{3}<e$，即$-\frac{3e}{2}<a<-\frac{3}{2}$时，