4.3.2 等比数列的前n项和公式(1)

《选择性必修》（第二册）$P_{34} \sim P_{37}$

复习引入

1. 等比数列的通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$.

2. 等比数列的性质：在等比数列$\{a_n\}$中，

$m,n,s,t \in N^*$　$m+n=s+t$

$a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$

$m,n,s \in N^*$　$m+n=2s$　$a_m \cdot a_n = a_s^2$

3. 等差数列的前 n 项和公式：

(1) $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

(2) $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

4. 推导等差数列的前 n 项和公式的方法是

倒序相加法

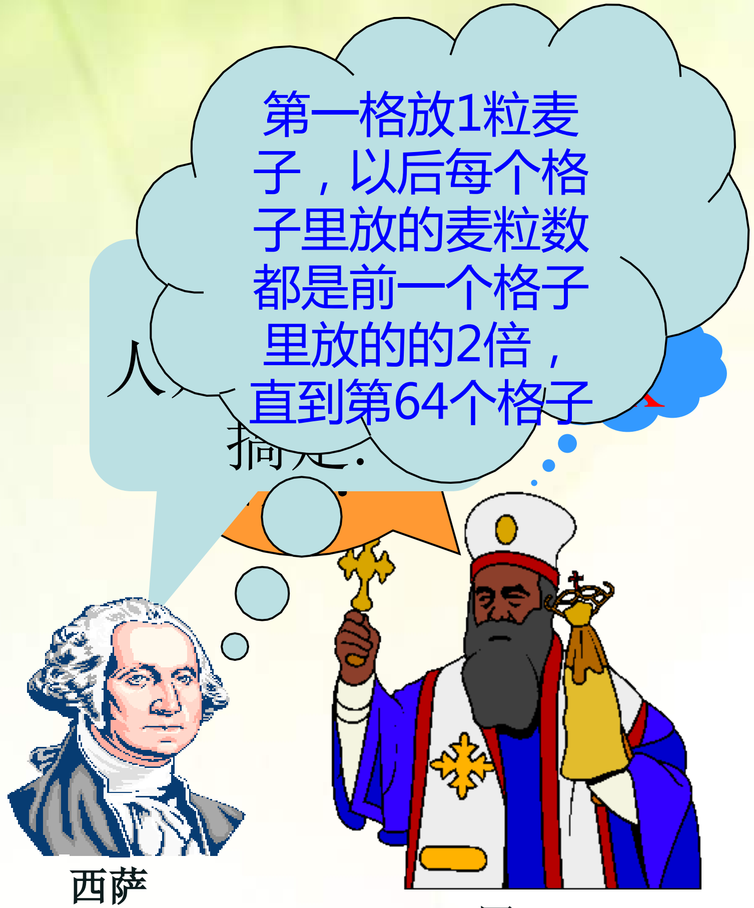
5. 等差数列的前 ***n*** 项和性质：在等差数列$\{a_n\}$中，

为 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$ 仍构成 等差 数列，且公差

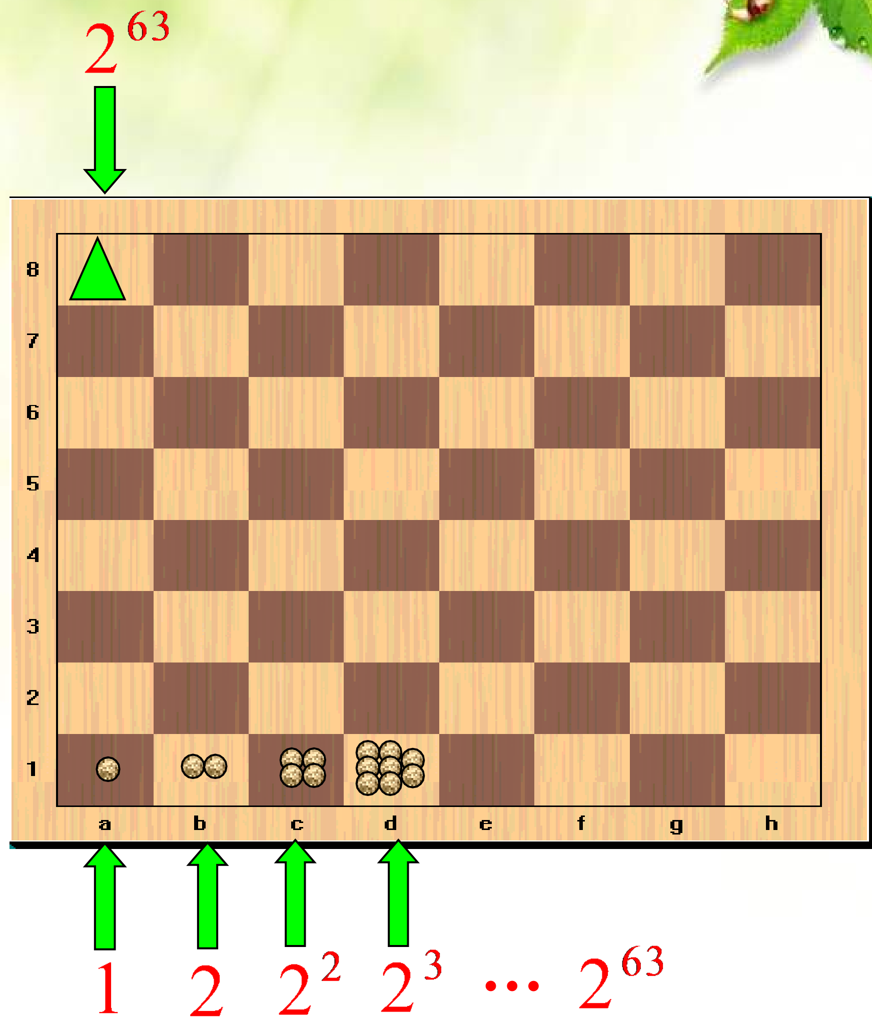
n^2d

情境引入

国际象棋起源于古代印度. 相传国王要奖赏国际象棋的发明者，问他想要什么.发明者说：“请在棋盘的第1个格子里放上1颗麦粒，第2个格子里放上2颗麦粒，第3个格子里放上4颗麦粒，依次类推，每个格子里放的麦粒都是前一个格子里放的麦粒数的2倍，直到第64个格子.请给我足够的麦粒以实现上述要求.” 国王觉得这个要求不高，就欣然同意了. 已知1000颗麦粒的质量约为40 g，据查，2016—2017年度世界小麦产量约为7.5亿吨，根据以上数据，判断国王是否能实现他的诺言.


第一格放1粒麦子，以后每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的的2倍，直到第64个格子
西萨

国王


2^{63}
8
7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g h
1 2 2^2 2^3 … 2^{63}

探究：等比数列的前n项和

$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \cdots \quad 2^{63}$

思考1：每一格的麦粒数$\{a_n\}$构成什么数列？

$\{a_n\}$为以1为首项，2为公比的等比数列.

思考2：国王答应奖赏给发明者西萨的总麦粒数用式子怎么表示？

$$S_{64} = a_1 + a_2 + a_3 \cdots + a_{64}$$

$$= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

思考3：总麦粒数S_{64}怎么求？

思考4：S_{64}进行怎样的变形能出现2^{64}？

$$S_{64}=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}$$

$$2S_{64}=2+2^2+2^3+\cdots+2^{63}+2^{64}$$

等式两边乘上的2是此数列的什么？

思考5：根据两式我们如何求出S_{64}的值呢？

这种求和的方法，就是错位相减法！

可将两式相减，消去这些相同项，得

$$S_{64}=2^{64}-1=18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615>\mathbf{1.84\times10^{19}}.$$

⇩

7300多亿吨

⇩

国王根本不可能实现他的诺言！

按一千颗麦粒的质量约为40g，那么象棋发明者想要的麦粒总质量超过7000亿吨，约是2016-2017年度世界小麦产量的981倍.

思考6：类比上面求和的方法能否得到等比数列前n项和公式呢？

$$S_n = a_1 + \boxed{a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}} \quad (1)$$

$$qS_n = a_1q + \boxed{a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1}} + a_1q^n \quad (2)$$

$(1)-(2)$，得$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n$

1-q是否为零？

$$\therefore (1-q)S_n = a_1(1-q^n)$$

讨论公比q是否为1

当$q=1$时，$S_n = na_1$

当$q \neq 1$时，$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_nq}{1-q}$

错位相减法

步骤：乘公比，错位写，对位减.

归纳总结

等比数列前n项和公式：

若等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q，

则$\{a_n\}$的前n项和公式为

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1\\ na_1, & q=1\end{cases}$$

注意

(1) 等比数列求和时，应考虑$q=1$与$q\neq1$两种情况.

(2) 推导等比数列前n项和公式的方法：错位相减法.

$\because a_n=a_1q^{n-1}$，$\therefore$上述公式还可以写成

$$S_n=\begin{cases}\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1\\ na_1, & q=1\end{cases}$$

例题

课本P35

例1： 已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1) 若$a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$, 求$S_8$;

(2) 若$a_1=27, a_9=\frac{1}{243}, q<0$, 求$S_8$;

(3) 若$a_1=8, q=\frac{1}{2}, S_n=\frac{31}{2}$, 求$n$.

解: (1) 因为$a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$,

所以$S_8=\dfrac{\frac{1}{2}\times[1-(\frac{1}{2})^8]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{255}{256}$.

课本P35

例1：已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(2) 若$a_1=27, a_9=\dfrac{1}{243}, q<0$，求$S_8$；

(3) 若$a_1=8, q=\dfrac{1}{2}, S_n=\dfrac{31}{2}$，求$n$.

解：(2) 由$a_1=27, a_9=\dfrac{1}{243}$，可得$27q^8=\dfrac{1}{243}$，

即$q^8=\left(\dfrac{1}{3}\right)^8$. 又由$q<0$，得$q=-\dfrac{1}{3}$.

$$\therefore S_8=\frac{27\times[1-(-\frac{1}{3})^8]}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{1640}{81}.$$

课本P35

例1：已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(3) 若$a_1=8, q=\frac{1}{2}, S_n=\frac{31}{2}$, 求$n$.

解: 把$a_1=8, q=\frac{1}{2}$, $S_n=\frac{31}{2}$代入$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 得

$$\frac{8\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{2},$$

整理，得$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{32}$. 解得$n=5$.

反思归纳

利用等比数列前n项和公式解决问题时要注意：

1．在解决与前n项和有关的问题时，首先要对公比$q=1$或$q\neq1$进行判断，若两种情况都有可能，则要分类讨论．

2．在等比数列$\{a_n\}$前n项和公式中共有五个量a_1，q，a_n，n，S_n中，已知其中的三个量，通过列方程组，就能求出另外两个量（“知三求二”），这是方程思想与整体思想在数列中的具体应用．

$$S_3=a_1+a_1q+a_1q^2;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

练习

课本P37

已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(1) 若$a_1=3, q=2, n=6$，求S_n；

(2) 若$a_1=-2.7, q=-\frac{1}{3}, a_n=\frac{1}{90}$，求$S_n$；

(3) 若$a_3=\frac{3}{2}, S_3=\frac{9}{2}$，求$a_1$与$q$.

解: (1) $S_n=\dfrac{3\times(1-2^6)}{1-2}=189$;

(2) $$S_n=\dfrac{-2.7-(-\frac{1}{3})\times\frac{1}{90}}{1-(-\frac{1}{3})}=-\frac{91}{45};$$

已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

课本P37

(3) 若$a_3=\dfrac{3}{2}$, $S_3=\dfrac{9}{2}$, 求a_1与q.

解1: 当$q=1$时, $a_1=a_3=\dfrac{3}{2}$, $S_3=3a_1=\dfrac{9}{2}$, 满足条件.

当$q\neq 1$时, $\begin{cases} a_1q^2=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$, 解得$\begin{cases} a_1=6 \\ q=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

$\therefore a_1=\dfrac{3}{2}$, $q=1$或$a_1=6$, $q=-\dfrac{1}{2}$.

课本P37

已知数列$\{a_n\}$是等比数列.

(3) 若$a_3=\frac{3}{2}$, $S_3=\frac{9}{2}$, 求a_1与q.

解2: $S_3=a_1+a_2+a_3=a_3(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1)=\frac{3}{2}(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1)=\frac{9}{2}$.

$\therefore \frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=3$，解得$q=1$或$q=-\frac{1}{2}$.

$\therefore q=1, a_1=\frac{3}{2}$或$q=-\frac{1}{2}, a_1=6$.