第5章

平 面 向 量

第 三 节 平面向量数量积

YDZZZH 要点自主整合

重点难点

重点：平面向量的数量积及其几何意义，数量积的性质及运算律，数量积的坐标表示.

难点：数量积的性质和平面向量的长度、夹角问题.

知识归纳

一、向量数量积的定义

1．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，过 O 点作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\theta=\angle AOB(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角．

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

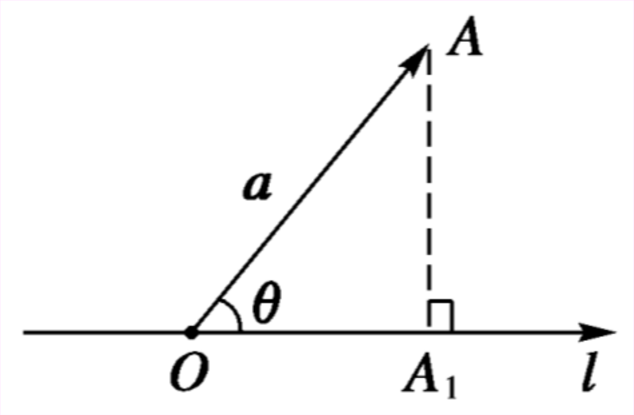
当 $\theta=0$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向;

当 $\theta=\pi$ 时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向.

两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的范围：$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

零向量与任意向量垂直.

2．向量在轴上的正射影



已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 和轴 l，过轴 l 上点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，由 A 向 l 作垂线，垂足为 A_1，则$\overrightarrow{OA_1}$称作 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的射影．该射影在轴 l 上的坐标称作 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l(方向)上的数量，记作 a_l.

$\therefore a_l=$ $\underline{|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta}$ (其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与轴 l 的正向所成的角)

当 θ 为钝角时，$a_l<0$；当 θ 为直角时，$a_l=0$；当 θ 为锐角时，$a_l>0$，当 $\theta=0°$时，$a_l=|\boldsymbol{a}|$.当 $\theta=180°$时，$a_l=-|\boldsymbol{a}|$.

3. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 θ，我们把数量 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积)，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，并规定零向量与任一向量的数量积为 0.

4. 平面向量数量积的几何意义

数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的射影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

二、平面向量数量积的性质

1. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2. 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ <u>$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$</u>；

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ <u>$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$</u>；

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

3. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

三、向量数量积的运算律

1．交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

2．数乘结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

3．分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

四、平面向量数量积的坐标表示

1．若 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\underline{x_1x_2+y_1y_2}$，$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

2．设 $\boldsymbol{a}=(x, y)$，则$|\boldsymbol{a}|=$ $\underline{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3．若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点坐标和终点坐标分别为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，

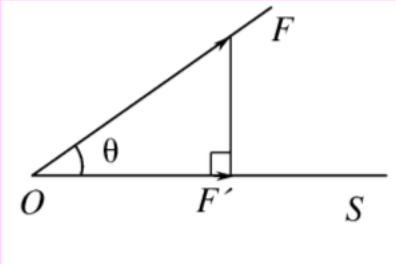
4．设 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow$ $\underline{x_1x_2+y_1y_2=0}$.

误区警示

1．若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 不一定有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，因为当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，总有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

2．对于实数 a、b、c，当 $b\neq0$ 时，若 $ab=bc$，则 $a=c$.但对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 却推不出 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$.因为由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 得 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=0$，只要 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直即可.

3．数量积不满足结合律，即对于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$一般不成立，这是因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 都是实数．$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$与 $\boldsymbol{a}$ 共线，而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 却未必共线．



4．若<*a*，*b*>＝θ，则 *a* 在 *b* 方向上的射影为$|a|\cdot\cos\theta$，*b* 在 *a* 方向上的射影为$|b|\cdot\cos\theta$，应注意区分.

力$\overrightarrow{OF}$在$\overrightarrow{OS}$方向上的分力$\overrightarrow{OF'}=|\overrightarrow{OF}|\cos\theta\cdot\dfrac{\overrightarrow{OS}}{|\overrightarrow{OS}|}$，是与$\overrightarrow{OS}$共线的向量，不要和射影$|O\overrightarrow{F}|\cos\theta$相混淆.

5．$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$ 和 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角不等价．∵当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，夹角为 0，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$；同样 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$ 不等价于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角．

SXFFJQ 思想方法技巧

1．平行与垂直问题常常转化为两个向量的平行与垂直.

2．求向量模时，主要利用公式$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2$，将模的运算转化为向量的数量积的运算.

3．利用向量垂直或平行的条件构造方程或函数是求参数或最值问题常用的方法.

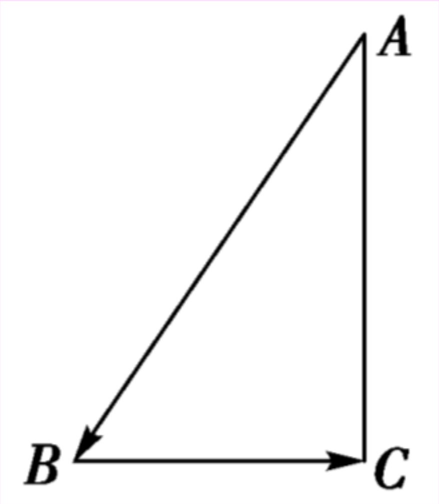
KTDLJL 课堂典例讲练

命题方向　**向量数量积**

[例 1]　在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=13$，$AC=12$，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

分析：求数量积时，除记准公式外，关键是找准两向量的夹角.

解析：



$\because \angle C=90°$，$AB=13$，$AC=12$，

$\therefore BC=5$，$\therefore \cos\angle ABC=\dfrac{5}{13}$.

$\because \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle=\pi-\angle ABC$，

$\therefore \cos\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle = -\cos\angle ABC = -\frac{5}{13}$,

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle$

$= 13\times 5\times(-\frac{5}{13}) = -25$.

点评：找错向量的夹角是计算数量积时易出现的错误，牢记向量夹角是两个“方向”的夹角.

跟踪练习 1

(文)(2011·山东烟台一模)在等腰直角三角形 ABC 中，D 是斜边 BC 的中点，如果 AB 的长为 2，则$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值为________.

解析： 由题意可知，$AD=\frac{1}{2}BC=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=2|\overrightarrow{AD}|^2=4.$

答案： 4

(理)在菱形 $ABCD$ 中，若 $AC=2$，则$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$等于(　　)

A．2　　　　B．-2

C．2 或-2　　　　D．与菱形的边长有关

解析： $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$，设菱形边长为 a，由$|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2$得 $a^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+4=a^2$.

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-2$.

答案： B