第三节　任意项级数的绝对与条件收敛

一、交错级数及其审敛法

二、绝对收敛与条件收敛

三、小结　思索题

一、交错级数及其审敛法

定义：正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

定理 1　莱布尼茨定理　如果交错级数满足条件:

(ⅰ) $u_n \ge u_{n+1}\ (n=1,2,3,\cdots)$; (ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛, 且其和 $s \le u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \le u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1}-u_n \geq 0,$

$$\because s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$$

数列s_{2n}是单调增加的,

$$又\ s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}$$

$\leq u_1$ 数列s_{2n}是有界的,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n}=s\leq u_1. \qquad \because \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}=0,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s$$

$\therefore$ 级数收敛于和s, 且$s \le u_1$.

余项$r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

满足收敛的两个条件, $\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

例1 判别交错级数 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 的敛散性

解 $\because u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

故级数收敛.

例 2 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的收敛性.

解 $\because\ (\frac{\sqrt{x}}{x-1})'=\frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0 \quad (x\geq 2)$

故函数$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$单调递减, $\therefore u_n > u_{n+1}$,

又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$ 原级数收敛.

注意

1. 莱布尼茨鉴别法是鉴定级数收敛的充分而非必要条件；

思索：莱布尼茨鉴别法的条件其中之一不成立，成果怎样？

2. 鉴定 $u_{n+1} < u_n$ 的措施

$$1)\ u_{n+1} - u_n < 0; \quad 2)\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1;$$

3）相应函数的单调性

二、绝对收敛与条件收敛

定义： 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

任意项级数的各项取绝对值

$$\boxed{\text{任意项级数}} \Longrightarrow \boxed{\text{正项级数}}$$

问题： 怎样研究任意项级数的敛散性问题？

任意项级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

定理 2 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证明 令$v_n=\dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots),$

显然$v_n\geq 0$, 且$v_n\leq|u_n|$,

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

又$\because\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|),$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

例 3 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解 $\because \left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$， 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛,

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \text{收敛,}$$

故由定理知原级数收敛.