# 【新结构】2023-2024学年江西省九师联盟高三上学期1月质量检测试数学试题❖

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

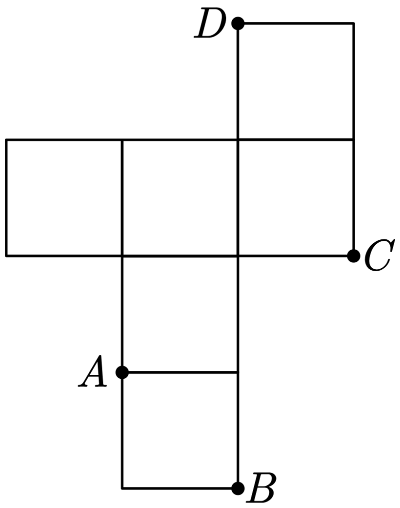
1. 已知复数$z$满足$z^2+1=0$，则$|z+1|=$(    )

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

2. 已知集合$A=\{x|x^2-3x-4\geqslant 0\}$，$B=\{x|(x-2)(5-x)>0\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$(    )

A. $(-1,2)$　　B. $(2,4)$　　C. $(-4,1)$　　D. $(-4,2)$

3. 如图是正方体的表面展开图，在原正方体中，直线$AB$与$CD$所成角的大小为(    )




A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 已知向量$\overrightarrow{a}=\left(log_2 3,\sin\frac{4\pi}{3}\right)$，$\overrightarrow{b}=(log_3 8,m)$，若$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，则$m=$(    )

A. $-2\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{2}$

5. 下表统计了2017年～2022年我国的新生儿数量(单位：万人).

| 年份 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 年份代码$x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 新生儿数量$y$ | 1723 | 1523 | 1465 | 1200 | 1062 | 956 |

经研究发现新生儿数量与年份代码之间满足线性相关关系，且$\hat{y}=-156.66x+\hat{a}$，据此预测2023年新生儿数量约为(    )(精确到0.1)(参考数据：$\sum_{i=1}^{6}y_i=7929$)

A. 773.2万　　B. 791.1万　　C. 800.2万　　D. 821.1万

6. 甲箱中有 2 个白球和 4 个黑球，乙箱中有 4 个白球和 2 个黑球．先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，以 $A_1$， $A_2$ 分别表示由甲箱中取出的是白球和黑球；再从乙箱中随机取出一球，以 $B$ 表示从乙箱中取出的是白球，则下列结论错误的是(    )

A. $A_1$， $A_2$ 互斥　　B. $P(B|A_1)=\dfrac{5}{7}$　　C. $P(A_2B)=\dfrac{4}{7}$　　D. $P(B)=\dfrac{13}{21}$

7. 阿波罗尼斯(约公元前 262 年～约公元前 190 年)，古希腊著名数学家，主要著作有《圆锥曲线论》、《论切触》等．尤其《圆锥曲线论》是一部经典巨著，代表了希腊几何的最高水平，此书集前人之大成，进一步提出了许多新的性质，其中也包括圆锥曲线的光学性质，光线从双曲线的一个焦点发出，通过双曲线的反射，反射光线的反向延长线经过其另一个焦点．已知双曲线 $C$： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$， $F_2$，其离心率 $e=\sqrt{5}$，从 $F_2$ 发出的光线经过双曲线 $C$ 的右支上一点 $E$ 的反射，反射光线为 $EP$，若反射光线与入射光线垂直，则 $\sin\angle F_2F_1E=$(    )

A. $\dfrac{5}{6}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{4}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

8. 若集合 $\{x|x\ln x+(k-\ln 4)x+k<0\}$ 中仅有 2 个整数，则实数 $k$ 的取值范围是(    )

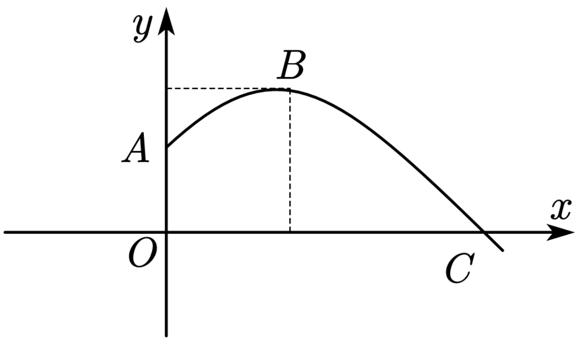
A. $\left[\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\ln 2\right)$　　B. $\left[\dfrac{2}{3}\ln 2,\dfrac{3}{4}\ln 3\right)$　　C. $\left[\dfrac{2}{3}\ln 2,\dfrac{3}{2}\ln 2\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\ln 2\right)$

**二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。**

9. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F$ 作直线 $l$，交抛物线于 $A$，$B$ 两点，若 $|FA|=3|FB|$，则直线 $l$ 的倾斜角可能为

A. $30^\circ$　　B. $60^\circ$　　C. $120^\circ$　　D. $150^\circ$

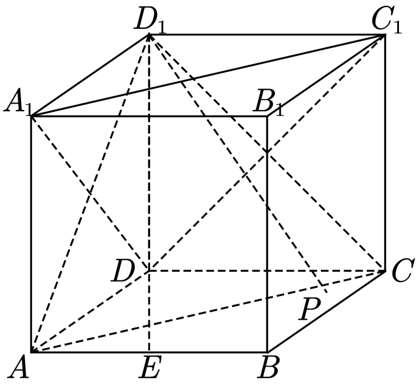
10. 已知函数 $f(x)=a\sin(\omega x+4\varphi)\left(a>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{3}\right)$，若 $f(x)$ 的图象过 $A(0,1)$， $B(m,2)$， $C(m+\pi,0)$ 三点，其中点 $B$ 为函数 $f(x)$ 图象的最高点(如图所示)，将 $f(x)$ 图象上的每个点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{4}$ 倍，再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则(    )



A. $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　　　B. $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C. $f(x)$的图象关于直线$x=\frac{2\pi}{3}$对称　　　　D. $g(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{3},-\pi\right]$上单调递减

11. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，点$E$是$AB$的中点，点$P$为侧面$BCC_1B_1$内（含边界）一点，则(　)




A. 若$D_1P\perp$平面$A_1C_1D$，则点$P$与点$B$重合

B. 以$D$为球心，$\frac{2\sqrt{6}}{3}$为半径的球面与截面$ACD_1$的交线的长度为$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

C. 若$P$为棱$BC$中点，则平面$D_1EP$截正方体所得截面的面积为$\frac{7\sqrt{17}}{6}$

D. 若$P$到直线$A_1B_1$的距离与到平面$CDD_1C_1$的距离相等，则点$P$的轨迹为一段圆弧

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。**

12. $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^9$的展开式中的常数项为__________.（用数字作答）

13. 已知$A$为圆$C$：$x^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$上的动点，$B$为圆$E$：$(x-3)^2+y^2=\frac{1}{4}$上的动点，$P$为直线$y=\frac{1}{2}x$上的动点，则$|PB|-|PA|$的最大值为__________.

14. 在1，3中间插入二者的乘积，得到1，3，3，称数列1，3，3为数列1，3的第一次扩展数列，数列1，3，3，9，3为数列1，3的第二次扩展数列，重复上述规则，可得1，$x_1$，$x_2$，…，$x_{2^n-1}$，3为数列1，3的第$n$次扩展数列，令$a_n=log_3(1\times x_1\times x_2\times...\times x_{2^n-1}\times 3)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为__________.

**四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。**

15.（本小题13分）

面试是求职者进入职场的一个重要关口，也是机构招聘员工的重要环节．某科技企业招聘员工，首先要进行笔试，笔试达标者进入面试，面试环节要求应聘者回答3个问题，第一题考查对公司的了解，答对得2分，答错不得分，第二题和第三题均考查专业知识，每道题答对得4分，答错不得分．

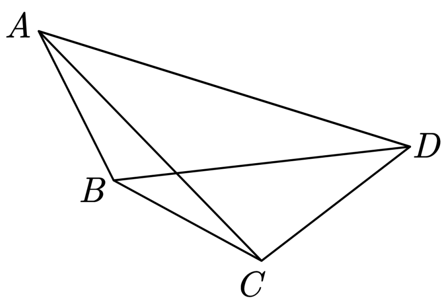
(1) 若一共有 100 人应聘，他们的笔试得分 $X$ 服从正态分布 $N(60,144)$，规定 $X \geqslant 72$ 为达标，求进入面试环节的人数大约为多少（结果四舍五入保留整数）；

(2) 某进入面试的应聘者第一题答对的概率为 $\frac{2}{3}$，后两题答对的概率均为 $\frac{4}{5}$，每道题是否答对互不影响，求该应聘者的面试成绩 $Y$ 的数学期望.

附：若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，则 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.954$，$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.997$.

16.（本小题 15 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=2$，$D$ 为 $\triangle ABC$ 外一点，$AD=2CD=4$，记 $\angle BAD=\alpha$，$\angle BCD=\beta$.

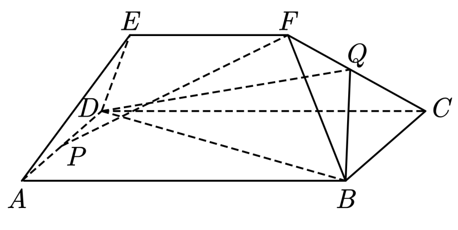



(1) 求 $2\cos\alpha-\cos\beta$ 的值；

(2) 若 $\triangle ABD$ 的面积为 $S_1$，$\triangle BCD$ 的面积为 $S_2$，求 $S_1^2+S_2^2$ 的最大值.

17.（本小题 15 分）

我国古代数学名著《九章算术》中记载："刍 $(ch\acute{u})$ 甍 $(m\acute{e}ng)$ 者，下有袤有广，而上有袤无广．刍，草也．甍，窟盖也．"翻译为"底面有长有宽为矩形，顶部只有长没有宽为一条棱．刍甍的字面意思为茅草屋顶．"现有一个"刍甍"如图所示，四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $ABFE$、$CDEF$ 为两个全等的等腰梯形，$EF \parallel AB$，$AB=4$，$EF=AD=2$，$P$ 是线段 $AD$ 上一点.




(1) 若点 $P$ 是线段 $AD$ 上靠近点 $A$ 的三等分点，$Q$ 为线段 $CF$ 上一点，且 $\overrightarrow{FQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{FC}$，证明：$PF \parallel$ 平面 $BDQ$；

(2) 若 $E$ 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{3}{2}$，$PF$ 与平面 $BCF$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{39}}{13}$，求 $AP$ 的长.

18.（本小题 17 分）

已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，右顶点为 $A$，且 $|AF_1|+|AF_2|=4$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 $C$ 的方程；

(2) 已知点 $B(-1,0)$，$M$，$N$ 是曲线 $C$ 上两点（点 $M$，$N$ 不同于点 $A$），直线 $AM$，$AN$ 分别交直线 $x=-1$ 于 $P$，$Q$ 两点，若 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\frac{9}{4}$，证明：直线 $MN$ 过定点.

19.（本小题 17 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)e^x-a\ln x(a\in\boldsymbol{R})$.

(1) 当 $a=e$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若 $f(x)$ 有 2 个零点，求 $a$ 的取值范围.

# 答案和解析

1.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查复数的模及其几何意义，属于基础题.

利用复数运算可求出 $z$，进而利用复数模公式求出结果.

【解答】

解：因为 $z^2+1=0$，所以 $z=\pm i$，

所以 $|z+1|=|1\pm i|=\sqrt{1^2+(\pm1)^2}=\sqrt{2}$.

故选：$C$.

2.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查交并补混合运算，解不含参的一元二次不等式，属于基础题.

先解一元二次不等式得出集合 $A$，$B$，再由集合的补集运算与交集运算得出即可得出答案.

【解答】

解：求 $A$ 中的不等式：$x^2-3x-4\geqslant0$，

得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant4$，

所以 $A=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$，

所以 $\complement_R A=(-1,4)$，

求 $B$ 中的不等式：$(x-2)(5-x)>0$，

得 $2<x<5$，

所以 $B=(2,5)$，

所以 $(\complement_R A)\cap B=(2,4)$.

故选：$B$.

3.【答案】$D$

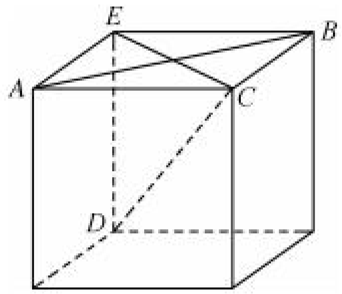
【解析】【分析】

本题考查了异面直线所成角，线面垂直的判定，属于基础题.

将正方体的表面展开图还原为正方体，证明 $AB\perp$平面$DCE$，即可证明 $AB\perp CD$，即可得答案.

【解答】

解：将表面展开图还原为正方体，$AB$ 与 $CD$ 在正方体中的位置如图所示，




$\because DE\perp$ 平面 $ACBE$， $AB\subset$ 平面 $ACBE$，

$\therefore DE\perp AB$，

$\because AB\perp CE$， $DE\cap CE=E$，$DE$， $CE\subset$ 平面 $DCE$，

$\therefore AB\perp$ 平面 $DCE$，

又 $CD\subset$ 平面 $DCE$，

所以 $AB\perp CD$，

故直线 $AB$ 与 $CD$ 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

故选： $D$.

4.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查平面向量数量积的坐标表示与向量垂直的关系，属于基础题.

由向量垂直得出两向量的数量积为 0，得出关系式求出 $m$ 的值即可.

【解答】

解：因为 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$，

即 $\log_2 3\times\log_3 8+m\sin\frac{4\pi}{3}=0$，

所以 $\log_2 8-\frac{\sqrt{3}}{2}m=0$，

所以 $m=2\sqrt{3}$.

故选 $C$.

5.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题考查了用回归直线方程对总体进行估计，属于基础题.

由题意得$\overline{x}$，$\overline{y}$，根据公式计算$\hat{a}$，可得$y$关于$x$的线性回归方程，将2023年对应的年份代码$x=7$代入回归方程即可求解答案.

【解答】

解：由题意得$\overline{x}=3.5$，$\overline{y}=\dfrac{7929}{6}=1321.5$，

所以$\hat{a}=\overline{y}+156.66\times 3.5=1321.5+548.31=1869.81$，

所以$\widehat{y}=-156.66x+1869.81$，

当$x=7$时，

$\widehat{y}=-156.66\times 7+1869.81=773.19\approx 773.2$.

故选：$A$.

6.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查互斥事件，相互独立事件的概率乘法公式，条件概率的求法，属于基础题.

由题意$A_1$，$A_2$，是两两互斥的事件，由条件概率公式求出$P(B|A_1)$，$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)$，对照四个选项进行判断，选出正确选项.

【解答】

解：因为每次取一球，不可能同时从甲箱中取出白球和黑球，

所以$A_1$，$A_2$是两两互斥的事件，故$A$项正确;

因为$P(A_1)=\dfrac{1}{3}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{3}$，

所以$P(B|A_1)=\dfrac{P(BA_1)}{P(A_1)}=\dfrac{\frac{5}{21}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{7}$，

所以$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{13}{21}$，故$BD$项正确;

因为$P(A_2B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{8}{21}$，故$C$错误.

故选：$C$.

7.【答案】$B$

【解析】【分析】

本题考查双曲线的定义和离心率，属于中档题.

由题意，结合双曲线的定义和离心率，求出$c=\sqrt{5}a$，$|EF_2|=2a$，再利用$\sin\angle F_2F_1E=\dfrac{|EF_2|}{|F_1F_2|}$求解.

【解答】

解：设$|EF_1|=m$，$|EF_2|=n$，$|F_1F_2|=2c$，

由题意知$m-n=2a$，$F_2E\perp F_1E$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，

所以$m^2+n^2-2mn=4a^2$，$c=\sqrt{5}a$，

$m^2+n^2=4c^2$，

所以$mn=2c^2-2a^2=8a^2$，

又$m-n=2a$，所以$n^2+2an-8a^2=0$，解得$n=2a$，

所以$\sin\angle F_2F_1E=\dfrac{|EF_2|}{|F_1F_2|}=\dfrac{2a}{2\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选$B$.

8.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题主要考查了利用导数求解函数的单调性，求解函数的零点问题，体现数形结合思想的应用.

原不等式等价于，$k(x+1)<x\ln 4-x\ln x$，设$g(x)=k(x+1)$，$f(x)=x\ln 4-x\ln x$，然后转化为函数图象的交点结合图象可求.

【解答】

解：原不等式等价于$k(x+1)<x\ln 4-x\ln x$，设$g(x)=k(x+1)$，$f(x)=x\ln 4-x\ln x$，

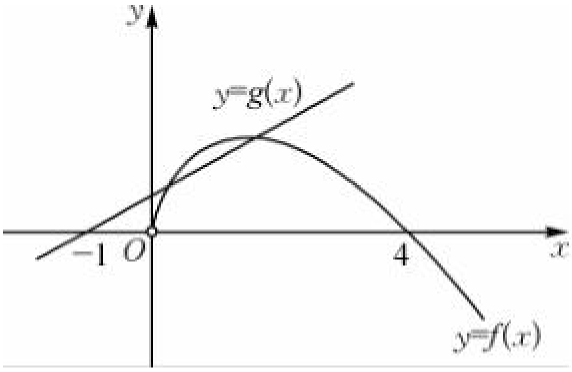
则$f'(x)=\ln 4-(1+\ln x)=\ln\dfrac{4}{x}-1$，

令$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{4}{e}$.

当$0<x<\dfrac{4}{e}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增;

当$x>\dfrac{4}{e}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

又$f(4)=0$，$x\to 0$时，$f(x)\to 0$，因此$y=f(x)$与$y=g(x)$的大致图象如图，




当 $k\leqslant 0$ 时，显然不满足题意;当 $k>0$ 时，当且仅当 $\begin{cases} g(1)<f(1) \\ g(2)<f(2) \\ g(3)\geqslant f(3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} g(1)\geqslant f(1) \\ g(2)<f(2) \\ g(3)<f(3) \end{cases}$，

由第一个不等式组，得 $\begin{cases} 2k<\ln\ 4, \\ 3k<2\ln\ 4-2\ln\ 2, \\ 4k\geqslant 3\ln\ 4-3\ln\ 3, \end{cases}$ 即 $\frac{3}{4}\ln\ \frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln\ 2,$

由第二个不等式组，得 $\begin{cases} 2k\geqslant\ln\ 4, \\ 3k<2\ln\ 4-2\ln\ 2, \\ 4k<3\ln\ 4-3\ln\ 3. \end{cases}$ 该不等式组无解.

综上所述，$\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\leqslant k<\frac{2}{3}\ln 2.$

故选 $A$.

9.【答案】$BC$

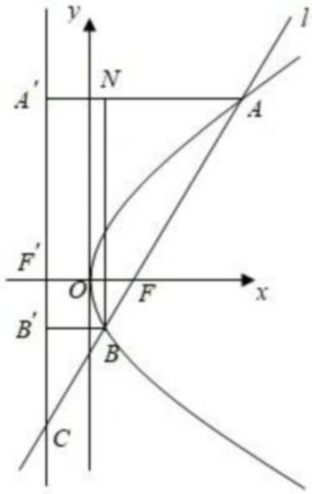
【解析】【分析】

本题考查了抛物线的定义，直线与抛物线的位置关系，属于基础题.

设直线 $l$ 交准线于 $C$，分点 $A$ 在第一象限和第四象限两种情况讨论，结合抛物线的定义以及已知条件即可求解.

【解答】

解：如果 $A$ 在第一象限，设抛物线准线交 $x$ 轴于 $F'$，分别过 $A$，$B$ 作准线的垂线，垂足为 $A'$，$B'$，直线 $l$ 交准线于 $C$，作 $BN\perp AA'$，垂足为 $N$，如图所示：




则 $|AA'|=|AF|$， $|BB'|=|BF|$，

$|AF|=3|BF|$，

所以 $|AN|=2|BF|$， $|AB|=4|BF|$，

$\cos\angle NAB=\dfrac{1}{2}$， $\angle \mathrm{NAB}=\ 60^{\circ}$，

则 $l$ 的倾斜角 $\angle AFx=60^{\circ}$；

同理，如果 $A$ 在第四象限，可得倾斜角为 $120^{\circ}$.

故选： $BC$.

10.【答案】$BC$

【解析】【分析】

本题主要考查判断正弦型函数的单调性或求解单调区间，求正弦型函数的对称轴、对称中心，正弦型函数的图象变换，属于中档题.

根据 $B$ 点坐标求出 $a$，根据点 $B$ 与点 $C$ 坐标，求出周期，进而求出 $\omega$，再由 $A$ 点坐标求出 $\varphi$，求出 $f(x)$ 的解析式，可判断选项 $A$；根据坐标变换关系，求出 $g(x)$ 的解析式，可判断选项 $B$；将 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 代入 $f(x)$，即可判断 $C$ 选项；求出 $g(x)$ 的单调递减区间，即可判断选项 $D$.

【解答】

解：对于 $A$，由题意得 $a=2$， $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$， $\omega=\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)=2\sin(\dfrac{1}{2}x+4\varphi)$，

$f'(x)=\cos(\dfrac{1}{2}x+4\varphi)$.

由 $f(0)=1$， $f'(0)>0$，得 $2\sin 4\varphi=1$， $\cos 4\varphi>0$，