云南省昆明市第八中学2023-2024学年高二下学期月考二数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设集合$U=\{x\in \mathbf{Z}|x^2\le 4\}$，$A=\{1,2\}$，则$\complement_U A=$（　）

A．$[-2,0]$　　B．$\{0\}$　　C．$\{-2,-1\}$　　D．$\{-2,-1,0\}$

2．已知$z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{1-\mathrm{i}}$，则$\bar{z}$的虚部为（　）

A．$2\mathrm{i}$　　B．$-2\mathrm{i}$　　C．-2　　D．2

3．已知$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha\right)=$（　）

A．$\dfrac{5}{8}$　　B．$-\dfrac{7}{8}$　　C．$-\dfrac{5}{8}$　　D．$\dfrac{7}{8}$

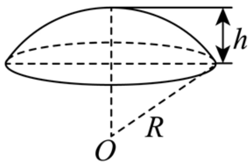
4．已知圆$O:x^2+y^2=5$，直线l经过点$(1,2)$，且l与圆O相切，则l的方程为（　）

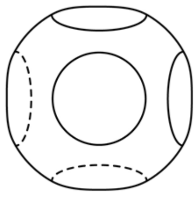
A．$x+2y-5=0$　　B．$x-2y+3=0$　　C．$2x-y=0$　　D．$2x+y-4=0$

5．已知F_1，F_2为双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$的左，右焦点，过点$F_2$向该双曲线的一条渐近线作垂线$PF_2$，垂足为$P$，则$\triangle PF_1F_2$的面积为（　）

A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．4　　D．$2\sqrt{3}$

6．球面被平面所截得的一部分叫做球冠（如图）.球冠是曲面，是球面的一部分.截得的圆叫做球冠的底，垂直于截面的直径被截得的一段叫做球冠的高.阿基米德曾在著作《论球与圆柱》中记录了一个被后人称作“Archimedes’Hat-BoxTheorem”的定理：球冠的表面积$=2\pi Rh$（如上图，这里的表面积不含底面的圆的面积）.某同学制作了一个工艺品，如下图所示.该工艺品可以看成是一个球被一个棱长为4的正方体的六个面所截后剩余的部分(球心与正方体的中心重合)，即一个球去掉了6个球冠后剩下的部分.若其中一个截面圆的周长为2π，则该工艺品的表面积为（　）





A．20π　　　B．$\left(24\sqrt{5}-34\right)\pi$　　　C．16π　　　D．12π

7．已知函数 $f\left(x\right)=2x\ln x-ax^{2}$，若对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $2x_1+f\left(x_2\right)>2x_2+f\left(x_1\right)$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$\left[\dfrac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$　　　B．$\left[1,+\infty\right)$　　　C．$\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　　D．$\left[2,+\infty\right)$

8．给定一个正整数 $n(n\geq 3)$，从集合 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中随机抽取一个数，记事件 $A=$“这个数为偶数”，事件 $B=$“这个数为 3 的倍数”.下列说法正确的是（　　）

A．若 $n=6k$，$k\in\mathbf{N}^{*}$，则至少存在一个 n，使事件A和事件 B 不独立

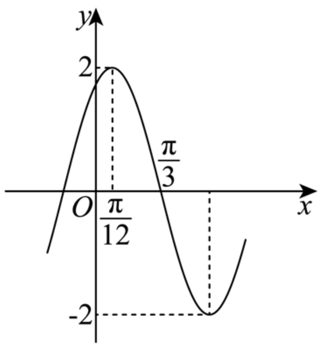
B．若 $n\neq 6k$，$k\in\mathbf{N}^{*}$，则存在无穷多个 n，使事件A和事件 B 独立

C．若 n 为奇数，则至少存在一个 n，使事件A和事件 B 独立

D．若 n 为偶数，则对任意的 n，事件A和事件 B 独立

二、多选题

9．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A．$\omega=2$

B．函数 $y=f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

C．函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 对称

D．函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{12}\right]$ 上的最小值为 $-\sqrt{3}$

10．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1}$，$\overrightarrow{CF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC_1}$，则（　）

A．$\angle EBF$ 为钝角

B．$AD_1\perp A_1C$

C．$ED//$ 平面 B_1D_1F

D．直线 EF 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

11．直线 l 经过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，且与抛物线 C 相交于 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$ 两点，下列说法正确的是（　）

A．$x_1x_2=1$，$y_1y_2=-4$

B．直线 l 的斜率为 1 时，$AB=2\sqrt{2}$

C．$|AB|$ 的最小值为 6

D．以 AB 为直径的圆与 C 的准线相切

三、填空题

12．$(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中的常数项为______.

13．数论领域的四平方和定理最早由欧拉提出，后被拉格朗日等数学家证明．四平方和定理的内容是：任意正整数都可以表示为不超过四个自然数的平方和，例如正整数 $12=3^2+1^2+1^2+1^2=2^2+2^2+2^2+0^2$．设 $25=a^2+b^2+c^2+d^2$，其中 a，b，c，d 均为自然数，则满足条件的有序数组 $\left(a,b,c,d\right)$ 的个数是________.

14．函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\cos\pi x,0<x<a\\x^2-4ax+8,x\geq a\end{cases}$，当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)$ 的零点个数为__________；若 $f\left(x\right)$ 恰有 4 个零点，则 a 的取值范围是___________.

四、解答题

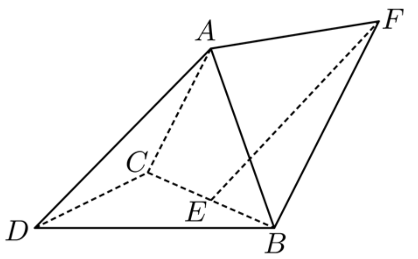
15．某公司为招聘新员工设计了一个面试方案：应聘者从 6 道备选题中一次性随机抽取 3 道题，按照题目要求独立完成．规定：至少正确完成其中 2 道题便可通过．已知 6

道备选题中应聘者甲有4道题能正确完成，2道题不能完成；应聘者乙每题正确完成的概率都是$\frac{2}{3}$，且每题正确完成与否互不影响．

(1)求甲恰好正确完成两个面试题的概率；

(2)求乙正确完成面试题数η的分布列及其期望．

16．如图，三棱锥$A-BCD$中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60^{\circ}$，$E$为$BC$的中点．



(1)证明：$BC\perp DA$；

(2)点F满足$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角$D-AB-F$的正弦值．

17．数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=na_{n+1}-n^2-n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

(1)证明：$\{a_n\}$是等差数列；

(2)若$a_1=3$，证明：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{3}{4}$．

18．已知函数$f(x)=\ln x-\frac{ax}{\mathrm{e}^x}$．

(1)当$a=1$时，证明：$f(x)$有且仅有一个零点．

(2)当$x>0$时，$f(x)\leq x$恒成立，求a的取值范围．

(3)证明：$\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\leq n-\frac{\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-n})}{\mathrm{e}-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*)$．

19．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右顶点分别为$A_1$和$A_2$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且经过点$P\left(-2,\sqrt{3}\right)$，过点$P$作$PH$垂直$x$轴于点$H$．在$x$轴上存在一点A（异于$H$），使得$\frac{|AA_2|}{|AA_1|}=\frac{|HA_2|}{|HA_1|}$．

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)判断直线AP与椭圆C的位置关系，并证明你的结论；

(3)过点A作一条垂直于x轴的直线l，在l上任取一点T，直线TA_1和直线TA_2分别交椭圆C

于M,N两点，证明：直线MN经过定点．

参考答案：

1．D

【分析】求出全集，然后根据补集运算可得.

【详解】因为$A=\{1,2\}$，$U=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以$\complement_U A=\{-2,-1,0\}$.

故选：D

2．D

【分析】利用复数的乘方运算和四则运算法则求出复数z，继而得$\overline{z}$的虚部.

【详解】由$z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{[(1+\mathrm{i})^2]^2}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(2\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-4(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-2(1+\mathrm{i})=-2-2\mathrm{i}$，

则$\overline{z}=-2+2\mathrm{i}$，$\overline{z}$的虚部为2.

故选：D.

3．B

【解析】利用诱导公式以及二倍角的余弦公式即可求解.

【详解】$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，

所以$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)-1=\dfrac{1}{8}-1=-\dfrac{7}{8}$，

故选：B

4．A

【分析】点斜式设出方程，利用相切可求答案.

【详解】显然斜率不存在时，不合题意；斜率存在时，设方程为$y-2=k(x-1)$，

圆心到直线的距离为$d=\dfrac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}}$，因为$l$与圆$O$相切，所以$d=\sqrt{5}$，

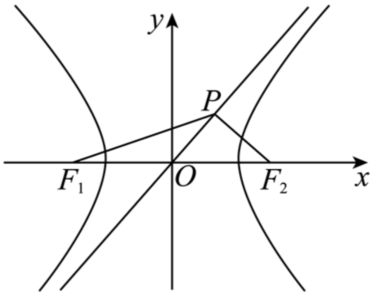
即$\dfrac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{5}$，解得$k=-\dfrac{1}{2}$，即$l$的方程为$x+2y-5=0$.

故选：A

5．D

【分析】利用双曲线可得到渐近线方程，然后利用点到直线的距离算出$|PF_2|=\sqrt{3}$，继而求得$|PF_2|=\sqrt{3}$，根据三角形面积公式可得结果.

【详解】如图



由题意可得双曲线的一条渐近线方程为$\sqrt{3}x-2y=0$，

焦点$F_2\left(\sqrt{7},0\right)$到渐近线的距离为$\left|PF_2\right|=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3+4}}=\sqrt{3}$，

所以$\left|OP\right|=2$，$\left|OF_1\right|=\left|OF_2\right|$，

所以$S_{\triangle PF_1F_2}=2S_{\triangle POF_2}=2\times\dfrac{1}{2}\left|OP\right|\left|PF_2\right|=2\sqrt{3}$.

故选:：D.

6．B

【分析】设截面圆半径为r，球的半径为R，求出截面圆的半径，利用几何关系可求出球体的半径，求出球体的表面积和一个球冠的表面积，

再利用球体的表面积减去6个球冠的表面积并加上6个截面圆的面积可得出该实心工艺品的表面积.

【详解】设截面圆半径为r，球的半径为R，

则球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半即此距离为2，

根据截面圆的周长可得$2\pi=2\pi r$，得$r=1$，故$R^2=2^2+1^2=5$，得$R=\sqrt{5}$，

所以球的表面积$S=20\pi$.

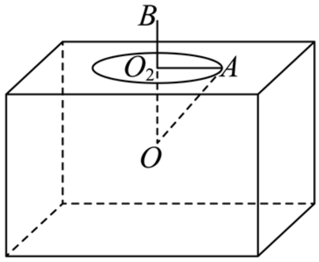
如图，$OA=OB=R=\sqrt{5}$，且$OO_2=2$，则球冠的高$h=R-OO_2=\sqrt{5}-2$，

得所截的一个球冠表面积$S_1=2\pi Rh=2\pi\times\sqrt{5}\times\left(\sqrt{5}-2\right)=10\pi-4\sqrt{5}\pi$，

且截面圆面积为$\pi\times1^2=\pi$，

所以工艺品的表面积$S'=S-6S_1+6\pi=20\pi-60\pi+24\sqrt{5}\pi+6\pi=\left(24\sqrt{5}-34\right)\pi$.

故选：B.



7．C

【分析】构造函数$F\left(x\right)=f\left(x\right)-2x$，求导，分离参数求最值即可.

【详解】不等式$2x_1+f\left(x_2\right)>2x_2+f\left(x_1\right)$等价于$f\left(x_1\right)-2x_1<f\left(x_2\right)-2x_2$，

令$F\left(x\right)=f\left(x\right)-2x,x\in\left(0,+\infty\right)$，根据题意对任意的$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，

当$x_1>x_2$时，$F\left(x_1\right)<F\left(x_2\right)$，所以函数$F\left(x\right)=f\left(x\right)-2x$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减，

所以$F'\left(x\right)=f'\left(x\right)-2=2\ln x-2ax\le 0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，

即$\dfrac{\ln x}{x}\le a$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立.

令$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x},x\in\left(0,+\infty\right)$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当$x\in\left(0,\mathrm{e}\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$单调递增，

当$x\in\left(\mathrm{e},+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$单调递减.所以$g(x)_{\max}=g\left(\mathrm{e}\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以$a\ge\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

故选：C.

【点睛】结论点睛：对于恒成立问题，常用到以下两个结论：

（1）$a\ge f\left(x\right)$恒成立$\Leftrightarrow a\ge f\left(x\right)_{\max}$；

（2）$a\le f\left(x\right)$恒成立$\Leftrightarrow a\le f\left(x\right)_{\min}$.

8．B

【分析】主要是用$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$判断事件的相互独立性.

【详解】对于A，对于任意$n=6k$，$k\in\mathbf{N}^*$，$P\left(A\right)=\dfrac{1}{2},P\left(B\right)=\dfrac{1}{3},P\left(AB\right)=\dfrac{k}{6k}=\dfrac{1}{6}$,

$\therefore P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$,即事件A和事件$B$独立，　A不正确.

对于B，当$n=8$时，$P\left(A\right)=\dfrac{1}{2},P\left(B\right)=\dfrac{1}{4},P\left(AB\right)=\dfrac{1}{8}$,满足$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$；