第二章 平面机构的运动分析

【教学目标】明确机构运动分析的目的和方法；能用解析法和图解法对平面Ⅱ级机构进行运动分析；理解速度瞬心〔绝对瞬心和相对瞬心〕的概念，并能运用“三心定理”确定一般平面机构各瞬心的位置；能用瞬心法对简单高、低副机构进行速度分析。

【重点难点】

重点：速度瞬心的概念和“三心定理”的应用；应用相对运动图解法原理求Ⅱ级机构构件上任意点和构件的运动参数。

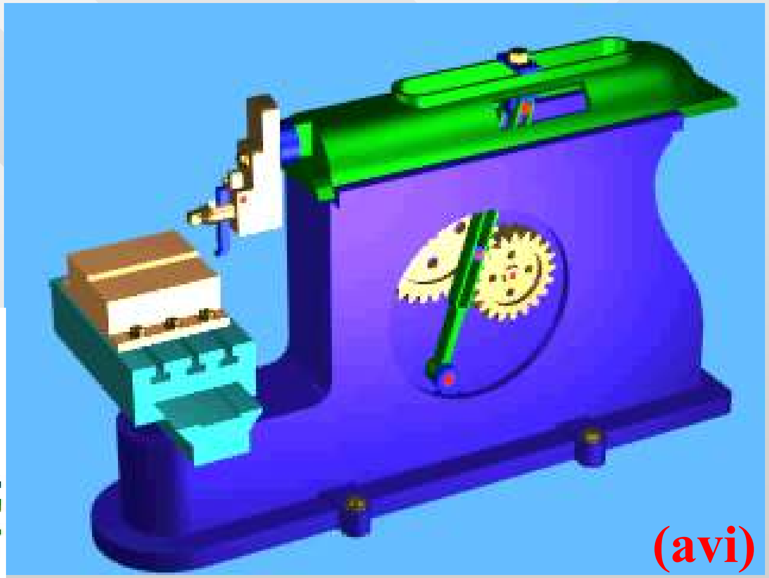
难点：对有共同转动且有相对移动的两构件重合点间的运动参数的求解。

§2-1 机构运动分析的目的和方法

一、机构的运动分析：根据原动件的运动规律，分析该机构上某点的位移、速度和加速度以及构件的角速度、角加速度。

二、目的在于：确定某些构件在运动时所需的空间；判断各构件间是否存在干预；考察某点运动轨迹是否符合要求；用于确定惯性力等。

如牛头刨床设计要求：最大行程、匀速、快回。



观 看 完 整 动 画

三、方法

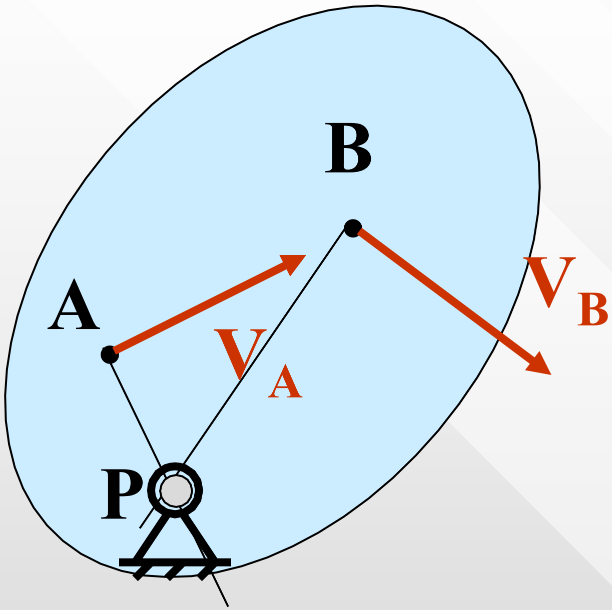
图解法：形象直观，但图解工作量大，精度不高。

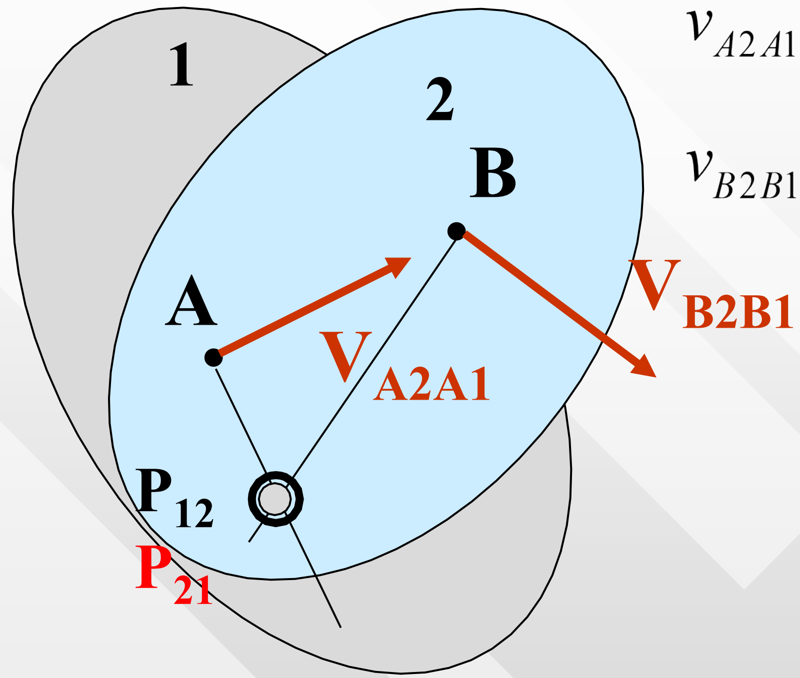
- 速度瞬心法
- 相对运动图解法

解析法：计算精确、迅速，但需推导公式和编制程序，应大力推广。

§2-2 速度瞬心及其在平面机构速度分析中的应用

1.速度瞬心(Instantaneous Center of velocity)的定义





$$v_{A2A1} = w_{21} l_{AP}$$

$$v_{B2B1} = w_{21} l_{BP}$$

两个互作平面相对运动的构件上，相对速度为零或瞬时绝对速度相等的重合点，在任一瞬时，两构件间的相对运动都可以看作是绕该点的转动，那么该点称为速度瞬心，简称瞬心。用Pij表示构件i、j间的瞬心。

1）假设该点绝对速度为零那么为绝对瞬心，即：Vp2=Vp1=0

2）假设该点绝对速度不为零那么为相对瞬心，即：Vp2=Vp1≠0

2.速度瞬心的性质

1〕两构件上相对速度为零的重合点VP1P2＝0，且是瞬时的。

2〕当VP1=VP2=0，称为绝对瞬心，即其中一构件为机架；

相对机架的绝对瞬时转动。

3〕当VP1=VP2≠0，称为相对瞬心，即两构件均为活动构件；

具有相同绝对速度的重合点。

4〕两构件之间的相对运动可视为绕速度瞬心的转动。

5〕相对速度VP1P2=0，但相对加速度aP1P2≠0。

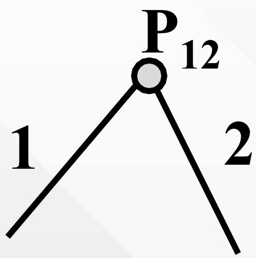
3. 机构中速度瞬心的数目

N个构件〔包括机架〕组成的机构，其总的瞬心数为:

$$K = C_N^2 = \frac{N(N-1)}{2}$$

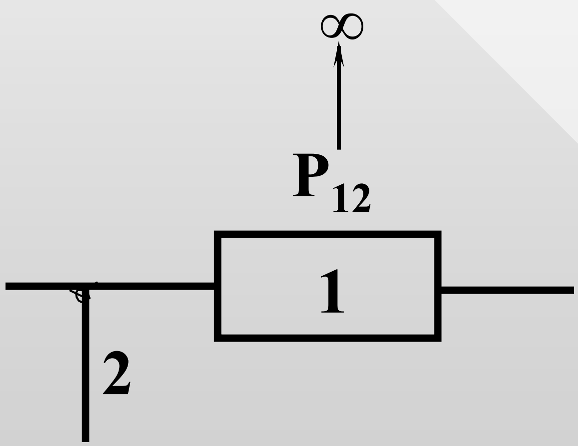
4.机构中速度瞬心位置确实定

〔1〕直观法—通过运动副直接连接的两个构件



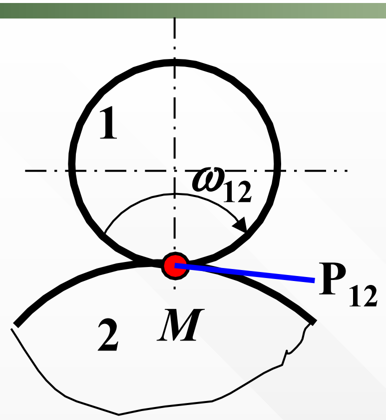
转动副连接的两个构件

结论：组成转动副的两构件其速度瞬心在转动副中心

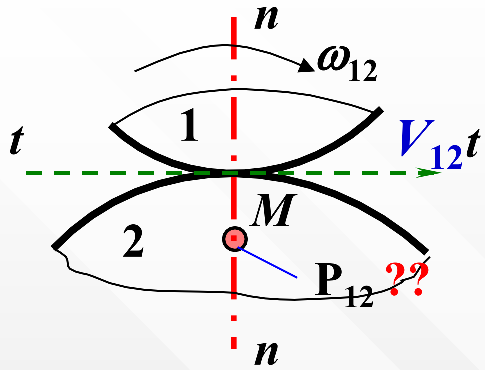


移动副连接的两个构件

结论：组成移动副的两构件其速度瞬心在垂直于导路线的无穷远处



高副连接的两个构件
（纯滚动）



高副连接的两个构件
（存在滚动和滑动）

结论：组成高副的两构件其速度瞬心在接触点的公法线上；特别地，假设为纯滚动，因接触点的相对速度为零，那么瞬心在接触点处。

〔2〕间接法—不直接相联的两构件

三心定理(the Aronhold-Kennedy Theorm)

作平面运动的三个构件共有三个瞬心，它们应位于同一条直线上。

证明(P_{23}位于P_{12}、P_{13}的连线上)

反证法:

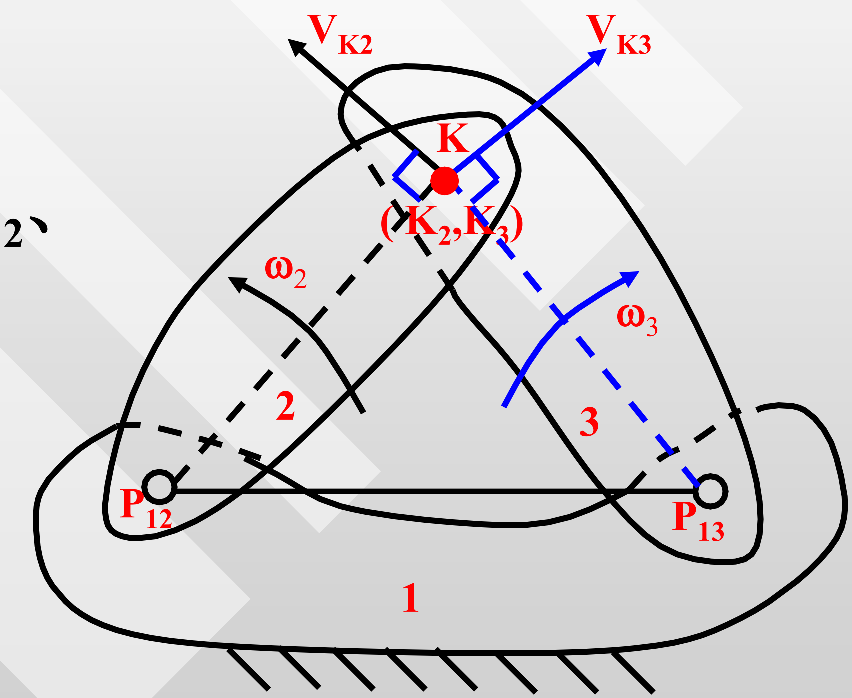
〔为方便起见，设1固定不动〕

设：K代表P_{23}，假设K不在P_{12}、P_{13}连线上，根据瞬心定义：

$V_{K2}=V_K$（同速点）

由图可知：$V_{K2} \neq V_{K3}$

假设不成立〔连起码的方向都不可能一致〕，因而K不是瞬心，只有在连线上才能保证同方向。



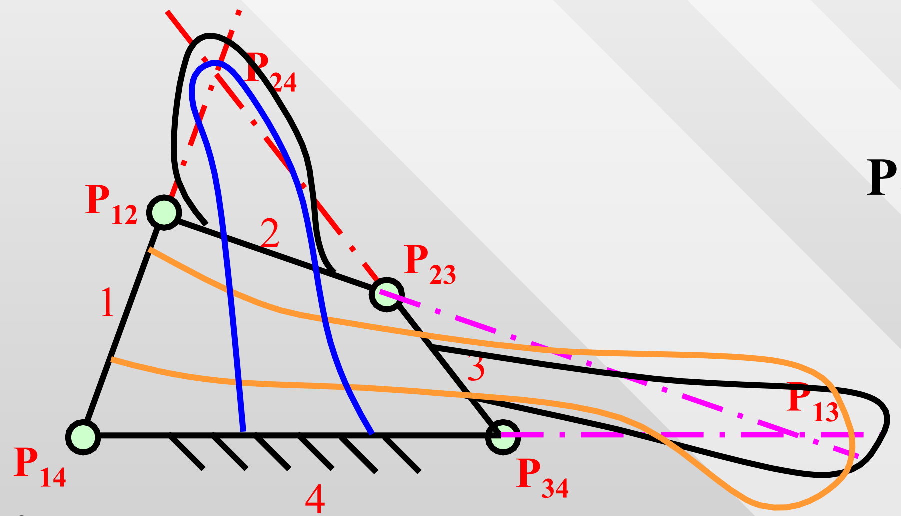
例1:求图中机构所有的速度瞬心

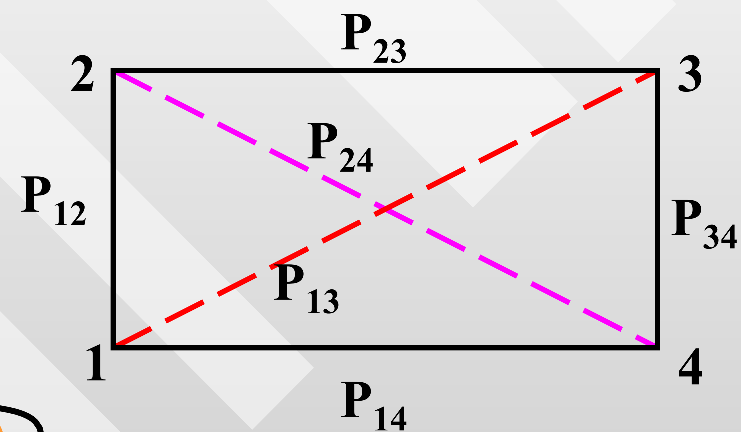
解：1.瞬心数 K = 4(4-1)/2 = 6

2.直观法可得P_{12}、P_{23}、P_{34}、P_{41}。

3.三心定理法

实际上可以根据瞬心下标进行瞬心确定——下标消去法。





定P13：

P34、P14亅P13〔消去脚注中的4〕；P12、P23亅P13〔消去脚注中的2〕。

同理可定P24。

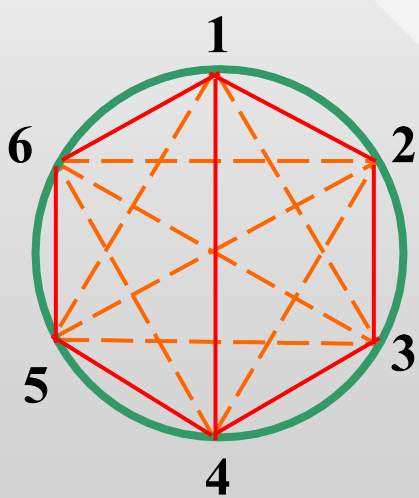
例2:求图示六杆机构的速度瞬心。

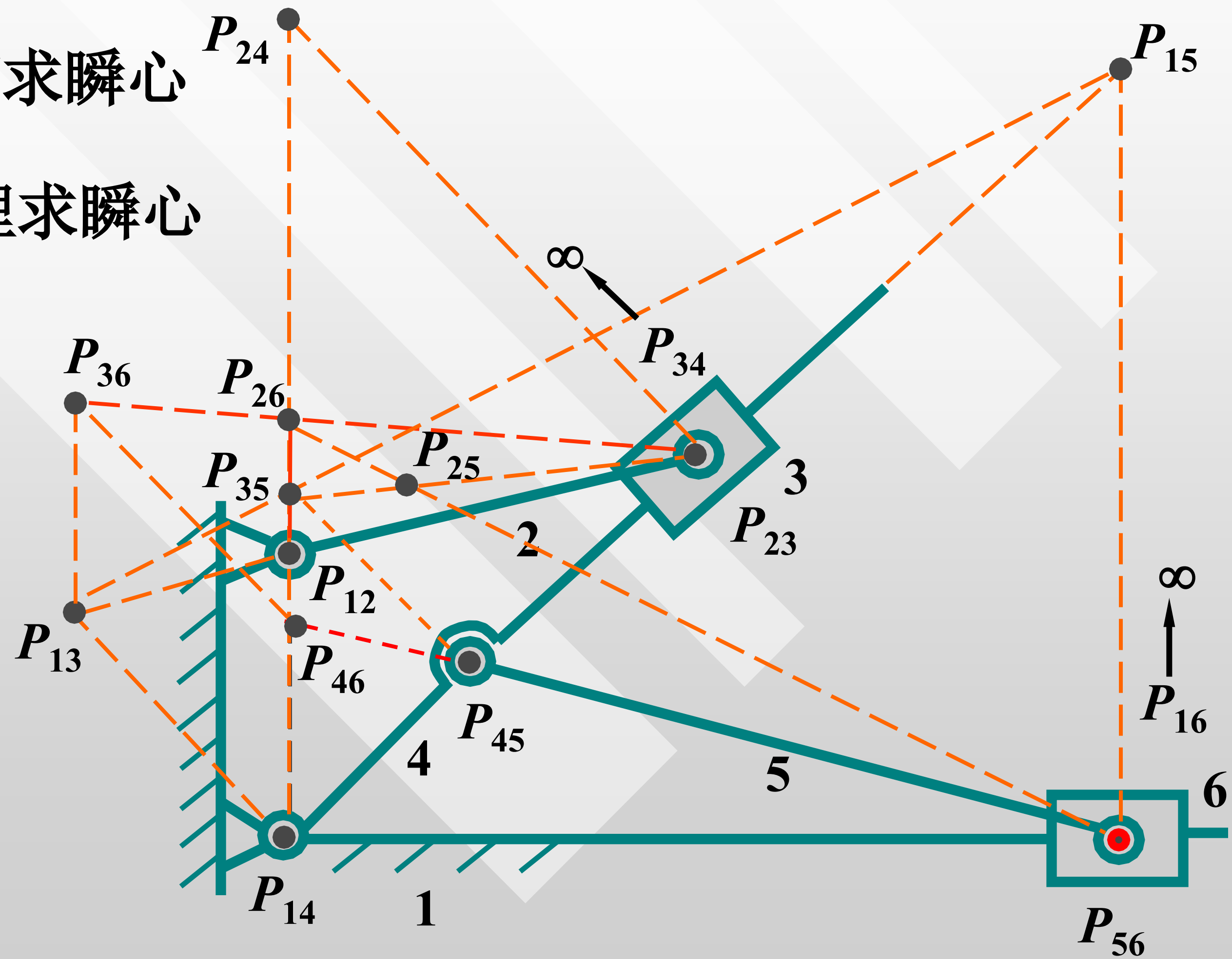
解：瞬心数N=6×(6−1)/ 2=15

〔1〕 作瞬心多边形圆

〔2〕直接观察求瞬心

〔3〕 三心定理求瞬心





5.速度瞬心法在机构速度分析中的应用

〔1〕铰链四杆机构

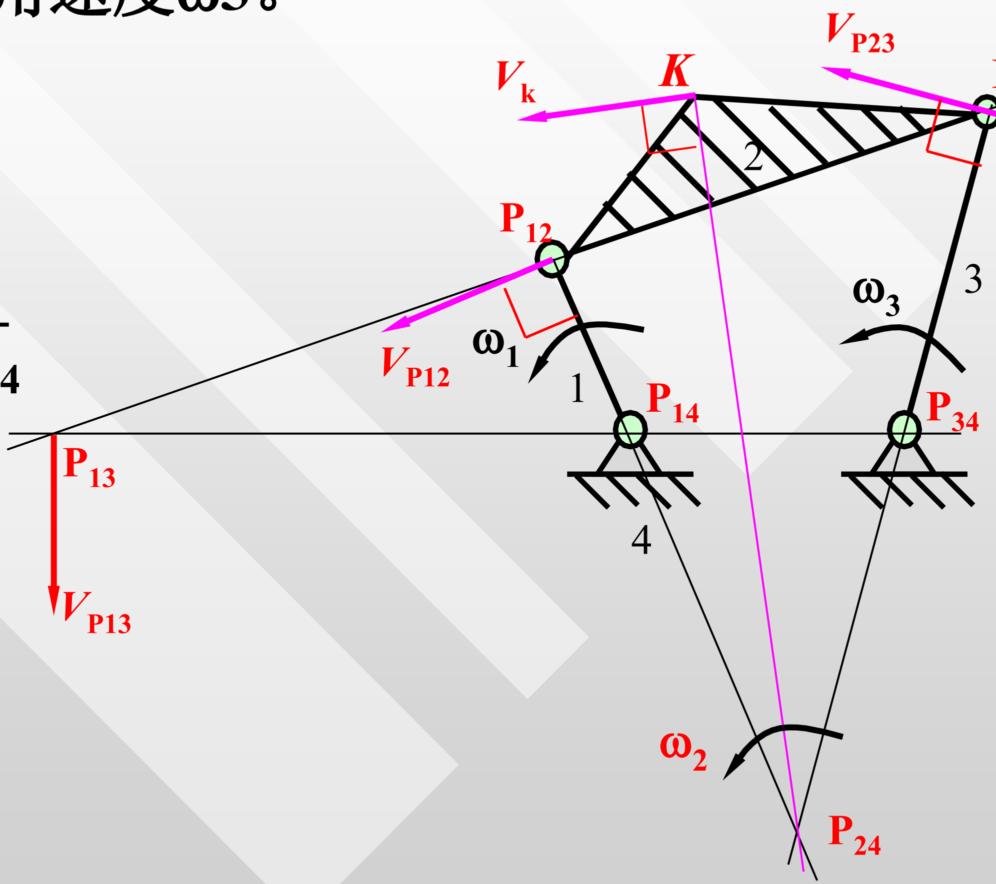
例：各构件尺寸、机构位置、构件1的角速度ω1均，求连杆2上点K的速度Vk及构件3的角速度ω3。

$$V_{P13}=\overline{P_{13}P_{14}}\times\mu_l\times\omega_1$$
$$=\overline{P_{13}P_{34}}\times\mu_l\times\omega_3$$

$$\Rightarrow\ \omega_3=\omega_1\times\overline{P_{13}P_{14}}/\overline{P_{13}P_{34}}$$

$$V_{P12}=\overline{P_{12}P_{14}}\times\mu_l\times\omega_1$$
$$=\overline{P_{12}P_{24}}\times\mu_l\times\omega_2$$

$$\Rightarrow\ \omega_2=\omega_1\times\overline{P_{12}P_{14}}/\overline{P_{12}P_{24}}$$



$V_k=\overline{KP_{24}}\times\mu_l\times\omega_2$ 方向垂直于连线K与P_{24}连线，且与ω_2一致。

结论：

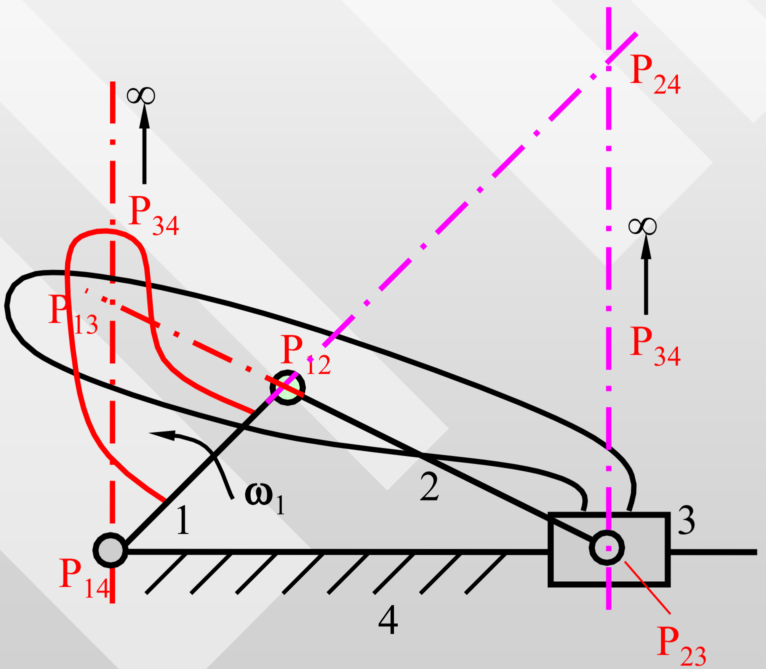
- 相对瞬心用于建立两构件间之角速度关系；
- 绝对瞬心用于确定活动构件上任一点的速度方向。

（2）曲柄滑块机构

例：图示曲柄滑块机构，求V3。

$$V_3=V^3_{P13}=V^1_{P13}=\overline{P_{14}P_{13}}\times\omega_1$$

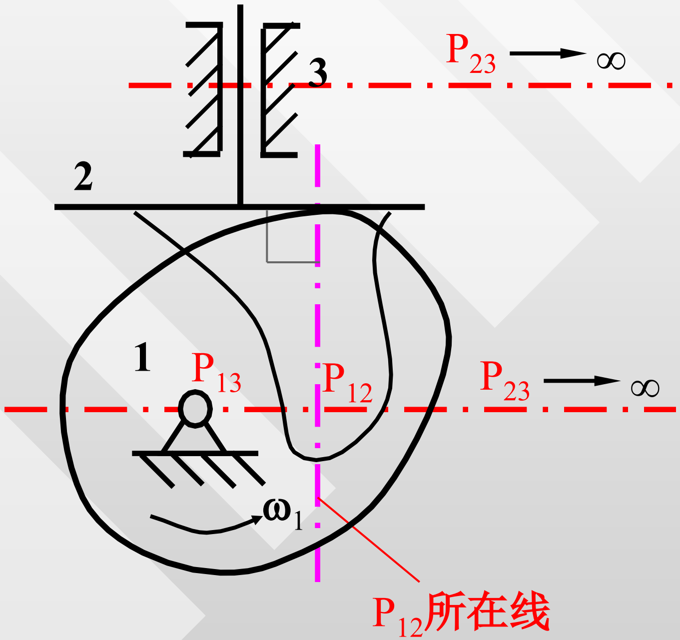
平移法：组成移动副两构件的瞬心线可以垂直于导路线随意平移。



〔3〕滑动兼滚动的高副机构(齿轮、凸轮机构)

例：各构件的尺寸、凸轮的角速度ω1，求推杆速度V2 。

$$V_2 = V^2_{P12} = V^1_{P12} = \overline{P_{12}P_{13}} \times \omega_1$$



§2-3 用相对运动图解法求机构的速度和加速度

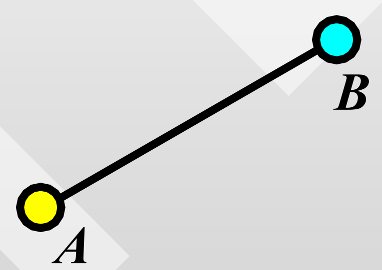
1.矢量方程图解法的根本原理和方法:用相对运动原理列出构件上点与点之间的相对运动矢量方程，然后作图求解矢量方程。

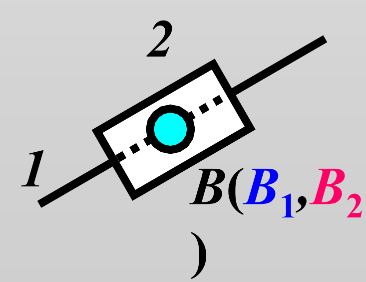
2.机构运动分析的两类问题:

- 同一构件两点间的运动关系;
- 两构件重合点间的运动关系。

两类问题:

- 同一构件两点间（刚体运动）
  - $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$
  - $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{n}_{BA} + \vec{a}^{\tau}_{BA}$
- 两构件重合点间（点的运动）
  - $\vec{v}_{B2} = \vec{v}_{B1} + \vec{v}_{B2B1}$
  - $\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1} + \vec{a}^{r}_{B2B1} + \vec{a}^{k}_{B2B1}$





知识回忆：

相对运动·牵连运动·绝对运动

用点的合成运动理论分析点的运动时，必须选定两个参考系，区分三种运动：

〔1〕动点相对于定参考系的运动，称为绝对运动；

〔2〕动点相对于动参考系的运动，称为相对运动；

〔3〕动参考系相对于定参考系的运动，称为牵连运动；

〔4〕动点相对于定参考系的速度、加速度，称为动点的绝对速度va、绝对加速度aa；

〔5〕动点相对于动参考系的速度、加速度，称为动点的相对速度vr、相对加速度ar；

〔6〕在动参考系上与动点相重合的那一点(牵连点)的绝对速度和绝对加速度称为动点的牵连速度ve和牵连加速度ae。

点的速度合成定理：动点在某一瞬时的绝对速度等于它在该瞬时的牵连速度与相对速度的矢量和。

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

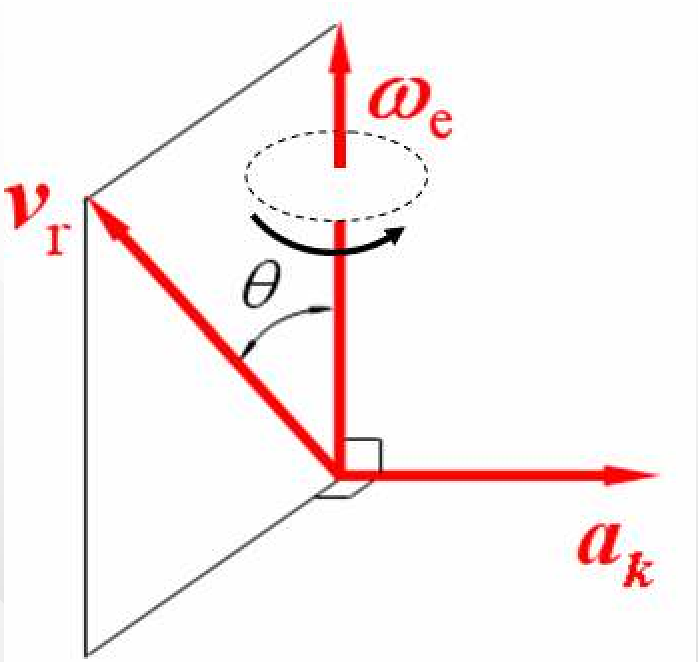
点的加速度合成定理：动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度、相对加速度与哥氏加速度的矢量和。

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k$$

其中：$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$，**为哥氏加速度**

哥氏加速度等于牵连角速度矢与点的相对速度矢的矢积的两倍。

$$\vec{a}_k = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$



a_k的大小为：

$$a_k = 2\omega_e v_r \sin\theta$$

其中q为we与vr两矢量间的最小夹角。矢ak方向垂直于we和vr，指向按右手规那么从we转向vr来确定。

工程中常见的平面机构中ω_e和v_r是垂直的，此时$a_k=2\omega_e v_r$；且v_r按ω_e转向转90°就是a_k的方向。

当牵连运动为平动时， ω_e=0，因此a_k=0，此时有

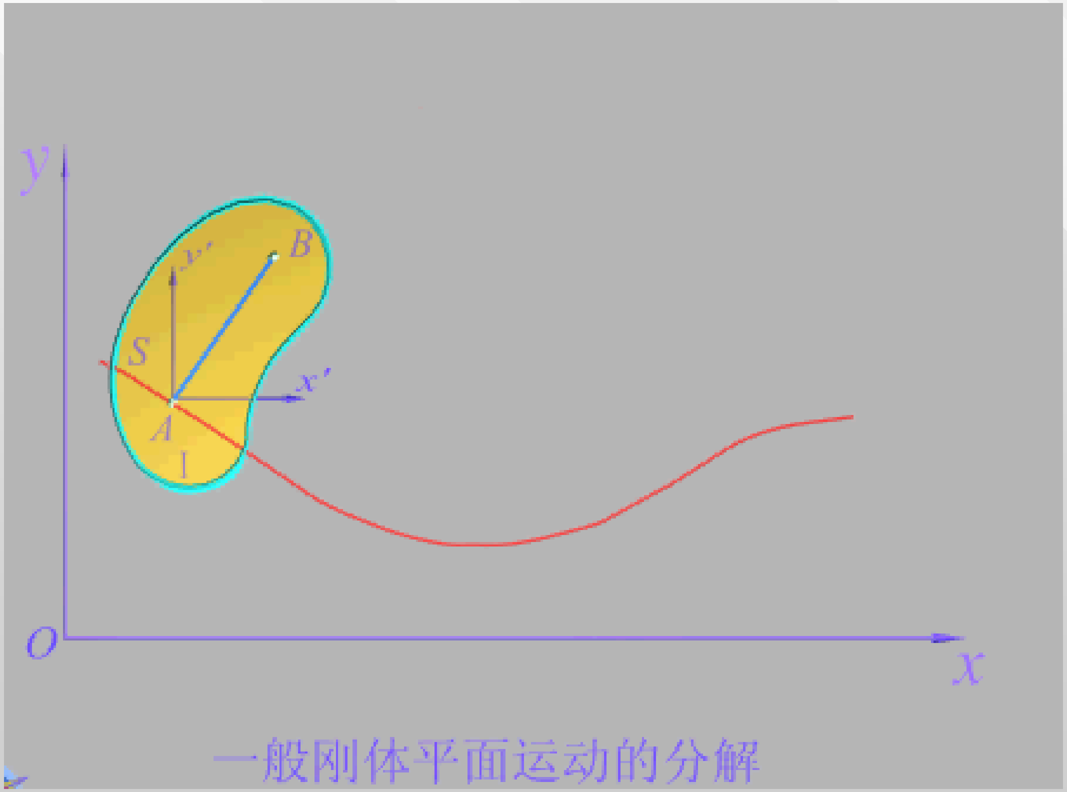
$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

当牵连运动为平动时，动点在某瞬时的绝对加速度等于该瞬时它的牵连加速度与相对加速度的矢量和。

（1）同一构件上两点间的速度及加速度的求法（基点法）

1.基点法的实质

刚体的平面运动可以分解为随基点A的平动和绕基点A的转动。



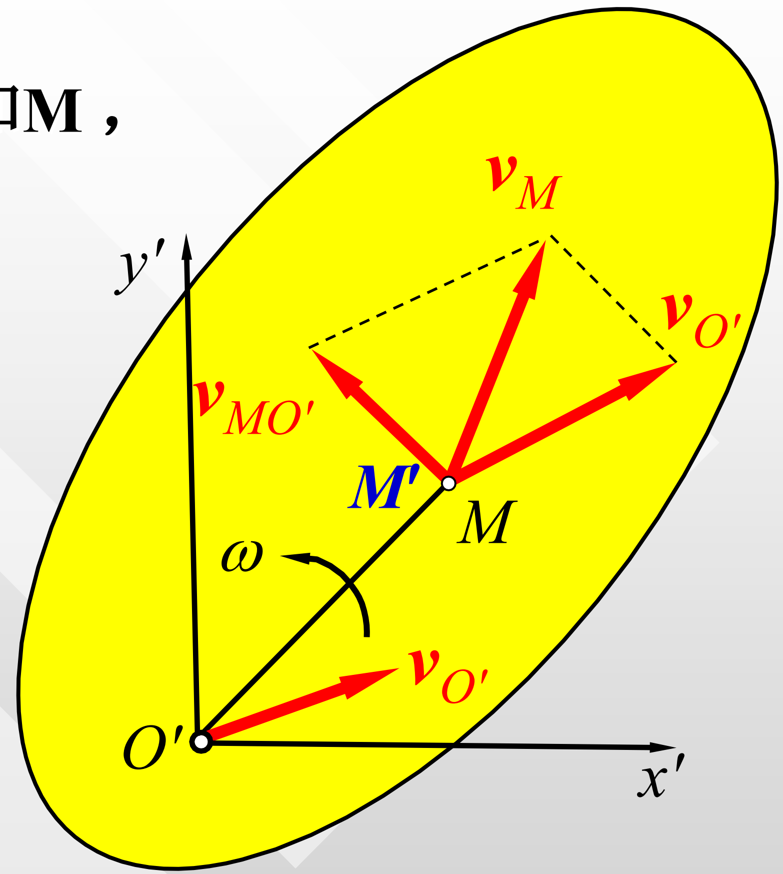
用基点法求平面图形内各点的速度：

如下图，对于同一构件上的两点O'和M，

***O'*—基点，*M*—动点**

$$\vec{v}_a = \underset{\displaystyle \vec{v}_{M'}}{\underset{\parallel}{\vec{v}_e}} + \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{MO'}$$



平面图形内任一点的速度等于基点的速度与该点随图形绕基点转动速度的矢量和，这就是平面运动的速度合成法或称基点法。

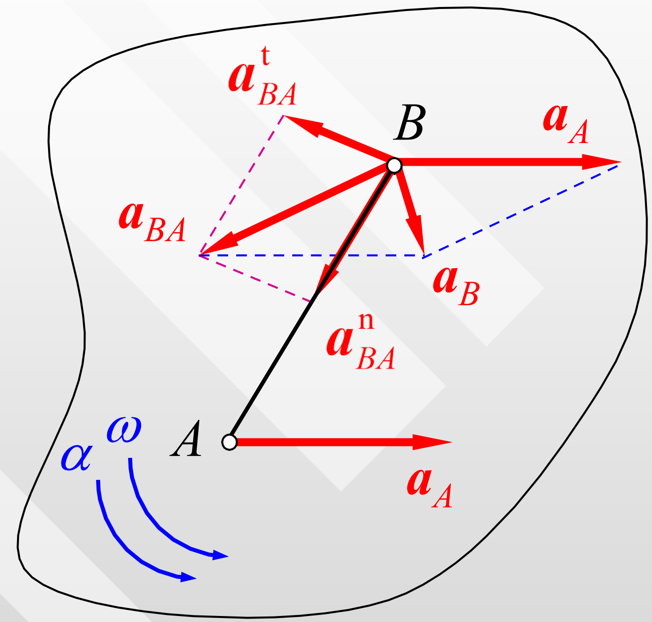
用基点法求平面图形内各点的加速度

如下图。由牵连运动为平动的加速度合成定理，有

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$$

由于牵连运动为平动，所以a_e=a_A，于是有

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$



而

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

其中

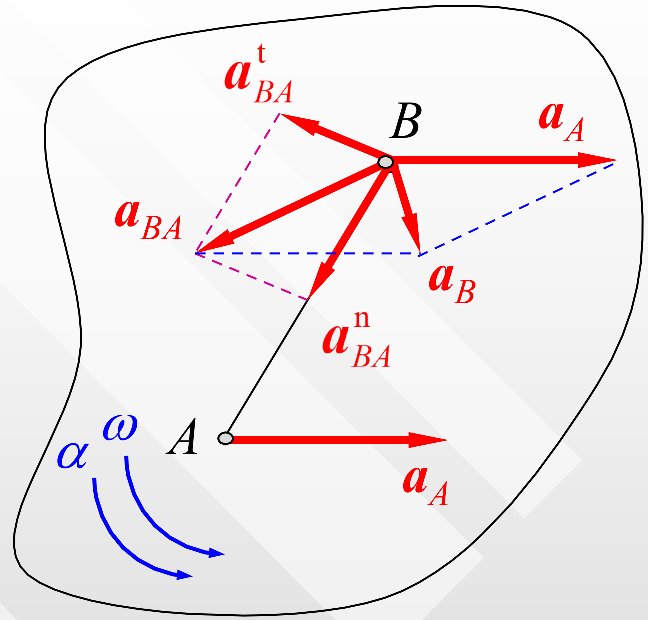
$$a_{BA}^{\mathrm{t}} = AB \cdot \alpha$$

$$a_{BA}^{\mathrm{n}} = AB \cdot \omega^2$$

故

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$

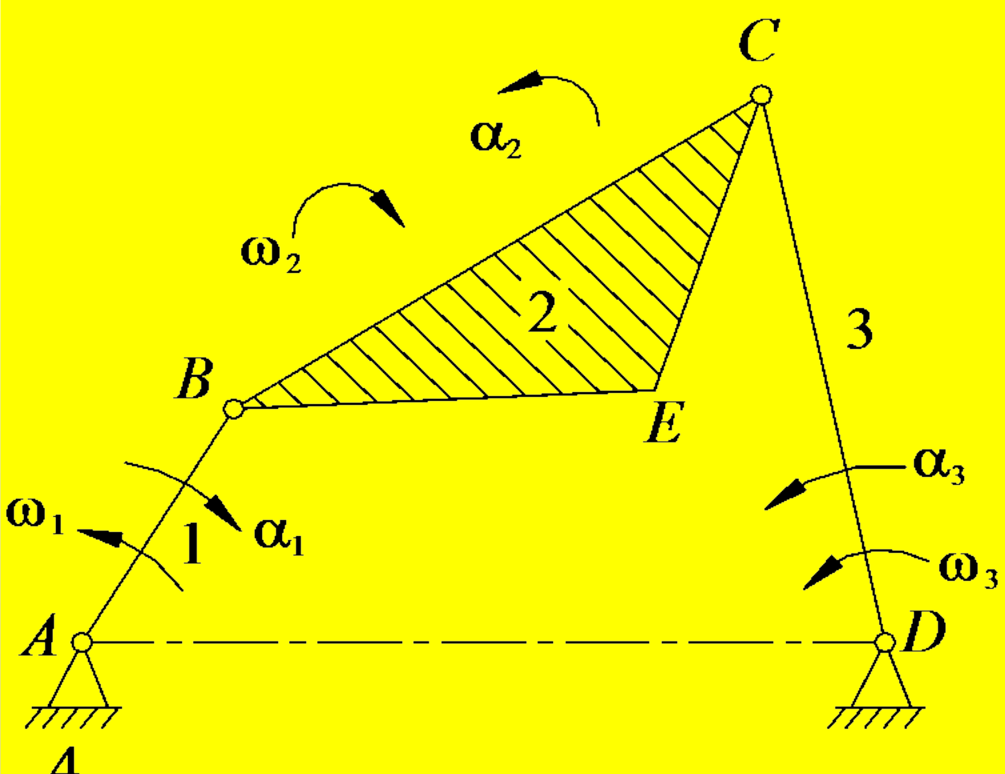
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{BA}^{\mathrm{n}}$$



即：平面图形内任一点的加速度等于基点的加速度与相对基点转动的切向加速度和法向加速度的矢量和。这就是**平面运动的加速度合成法或称基点法**。

2.速度图和加速度图：

例1： 在图a所示的铰链四杆机构中，各构件长度及原动件1的位置、角速度ω1和角加速度α1，求构件2和构件3的角速度ω2和ω3、角加速度α2和α3，以及构件2上E点的速度vE和加速度aE。



(a)