第三章

§3.4　函数中的构造问题

重点解读

函数中的构造问题是高考考查的一个热点内容，经常以客观题出现，同构法构造函数也在解答题中出现，通过已知等式或不等式的结构特征，构造新函数，解决比较大小、解不等式、恒成立等问题.

题型一　利用$f(x)$与x构造函数

例1　(2023·信阳统考)已知$f(x)$是定义在**R**上的偶函数，当$x>0$时，$xf'(x)-f(x)<0$，且$f(-2)=0$，则不等式$\frac{f(x)}{x}>0$的解集是

A.$(-2,0)\cup(0,2)$

B.$(-\infty，-2)\cup(2，+\infty)$

C.$(-2,0)\cup(2，+\infty)$

√D.$(-\infty，-2)\cup(0,2)$

解析

设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$x\neq 0$.

因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

所以$f(-x)=f(x)$.

因为 $g(-x)=\dfrac{f(-x)}{-x}=-\dfrac{f(x)}{x}=-g(x)$，

所以$g(x)$为奇函数，

所以$g(-2)=-g(2)$.

解析

因为$f(-2)=0$，

所以$g(-2)=g(2)=0$.

当$x>0$时，$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，

所以$g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

此时不等式$\dfrac{f(x)}{x}>0$的解集是$(0,2)$.

因为$g(x)$为奇函数，图象关于原点对称，

解析

所以$g(x)$在$(-\infty，0)$上单调递减，

所以当 $x<0$ 时，不等式$\dfrac{f(x)}{x}>0$ 的解集是$(-\infty，-2)$.

综上所述，不等式$\dfrac{f(x)}{x}>0$ 的解集是$(-\infty，-2)\cup(0,2)$.

思维升华

(1)出现$nf(x)+xf'(x)$形式，构造函数$F(x)=x^n f(x)$.

(2)出现 $xf'(x)-nf(x)$形式，构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x^n}$.

跟踪训练1　(多选)(2023·郴州统考)已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x>0$时，$xf'(x)+2f(x)>0$恒成立，则

A.$f(1)<4f(2)$　　B.$f(-1)<4f(-2)$

C.$16f(4)<9f(3)$　　D.$4f(-2)>9f(-3)$

解析

令$g(x)=x^2f(x)$，

∵当$x>0$时，$xf'(x)+2f(x)>0$，

∴当$x>0$时，$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)=$

$x[xf'(x)+2f(x)]>0$，

∴$g(x)=x^2f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

又$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，$y=x^2$为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，

解析

$\therefore g(x)=x^2f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数.

$\therefore g(x)$是增函数.

由$g(2)>g(1)$，可得$4f(2)>f(1)$，故A正确；

由$g(-1)>g(-2)$，可得$f(-1)>4f(-2)$，故B错误；

由$g(4)>g(3)$，可得$16f(4)>9f(3)$，故C错误；

由$g(-2)>g(-3)$，可得$4f(-2)>9f(-3)$，故D正确.

题型二　利用$f(x)$与e^x构造函数

例2　(2024·吉安模拟)已知定义在**R**上的函数$f(x)$满足$f(x)<f'(x)-2$，则

A.$f(2\,023)-ef(2\,022)<2(e-1)$

√B.$f(2\,023)-ef(2\,022)>2(e-1)$

C.$f(2\,023)-ef(2\,022)>2(e+1)$

D.$f(2\,023)-ef(2\,022)<2(e+1)$

解析

令 $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{e^x}$，

则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)-2}{e^x}>0$，

因此函数$g(x)$是增函数，

于是得 $g(2\,023)>g(2\,022)$，即$\dfrac{f(2\,023)+2}{e^{2\,023}}>\dfrac{f(2\,022)+2}{e^{2\,022}}$，

整理得$f(2\,023)-ef(2\,022)>2(e-1)$，故B正确.

思维升华

(1)出现$f'(x)+nf(x)$形式，构造函数$F(x)=e^{nx}f(x)$.

(2)出现$f'(x)-nf(x)$形式，构造函数$F(x)=\frac{f(x)}{e^{nx}}$.

跟踪训练2 (2023·南昌模拟)已知定义在**R**上的函数$f(x)$满足$f(x)+f'(x)>0$，且有$f(3)=3$，则$f(x)>3e^{3-x}$的解集为__$(3, +\infty)$__.

解析

设$F(x)=f(x)\cdot e^x$，则$F'(x)=f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x=e^x[f(x)+f'(x)]>0$，

$\therefore F(x)$是增函数.

又$f(3)=3$，则$F(3)=f(3)\cdot e^3=3e^3$.

$\because f(x)>3e^{3-x}$等价于$f(x)\cdot e^x>3e^3$，

即$F(x)>F(3)$，

$\therefore x>3$，即所求不等式的解集为$(3, +\infty)$.

题型三　利用$f(x)$与$\sin x$，$\cos x$构造函数

例3　设$f(x)$是定义在$(-\pi，0)\cup(0，\pi)$上的奇函数，其导函数为$f'(x)$，且当$x\in(0，\pi)$时，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$，则关于x的不等式$f(x)<2f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\sin x$的解集为$\underline{\left(-\dfrac{\pi}{6}，0\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6}，\pi\right)}$.

解析

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，$x\in(-\pi，0)\cup(0，\pi)$，

则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$，

∵当$x\in(0，\pi)$时，$f'(x)\sin x-f(x)\cos x<0$，

∴在$(0，\pi)$上，$g'(x)<0$，

∴函数$g(x)$在$(0，\pi)$上单调递减.

∵$y=f(x)$，$y=\sin x$是奇函数，

∴函数$g(x)$是偶函数，

解析

∴函数$g(x)$在$(-\pi，0)$上单调递增.

当$x\in(0，\pi)$时，$\sin x>0$，则不等式$f(x)<2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x$可化为$\frac{f(x)}{\sin x}<\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}$，

即$g(x)<g\left(\frac{\pi}{6}\right)$，∴$\frac{\pi}{6}<x<\pi$；

当$x\in(-\pi，0)$时，$\sin x<0$，

解析

则不等式 $f(x)<2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x$ 可化为 $\frac{f(x)}{\sin x}>\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{f\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$,

即 $g(x)>g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore -\frac{\pi}{6}<x<0$.

综上可得，不等式的解集为 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)\cup\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$.

思维升华

函数$f(x)$与$\sin x$，$\cos x$相结合构造可导函数的几种常见形式

$F(x)=f(x)\sin x$，

$F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$；

$F(x)=\dfrac{f(x)}{\sin x}$，

$F'(x)=\dfrac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2 x}$；

$F(x)=f(x)\cos x$，

■ 思维升华

$F'(x)=f'(x)\cos x-f(x)\sin x$；

$F(x)=\dfrac{f(x)}{\cos x}$，

$F'(x)=\dfrac{f'(x)\cos x+f(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

跟踪训练3　已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$，其导函数为 $f'(x)$，且当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)\sin x+f(x)\cos x<0$，若 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，$b=-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，则 a 与 b 的大小关系为____ $a<b$ ____.(用“<”连接)

解析

设$\varphi(x)=f(x)\sin x$，

则$\varphi'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x$，

∴当$x\in(0，+\infty)$时，$\varphi'(x)<0$，

即$\varphi(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

又$f(x)$为奇函数，∴$\varphi(x)$为偶函数，

∴$\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)>\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，

解析

即 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)>f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{4}$,

即 $-\frac{1}{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<-f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore a<b$.

课时精练

一、单项选择题

1.(2023·济南模拟)已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，$f'(x)$是$f(x)$的导函数，当$x\geqslant 0$时，$f'(x)-2x>0$，且$f(1)=3$，则$f(x)>x^2+2$的解集是

A.$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

√B.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C.$(-1,0)\cup(0,1)$

D.$(-\infty,-1)\cup(0,1)$

解析

令$g(x)=f(x)-x^2$，

因为$f(x)$是偶函数，

则$g(-x)=f(-x)-(-x)^2=g(x)$，

所以函数$g(x)$也是偶函数，

$g'(x)=f'(x)-2x$，

因为当$x\geq 0$时，$g'(x)=f'(x)-2x>0$，

所以函数$g(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

不等式$f(x)>x^2+2$即为不等式$g(x)>2$，