热点题型追踪：1-1 基本不等式及其应用

【题型 11】基本不等式的实际应用问题

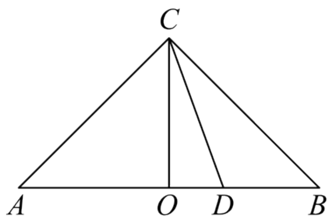
基础知识

不等式的应用题常以函数为背景，多是解决现实生活、生产中的优化问题，在解题中主要涉及不等式的解法、基本不等式求最值，构建数学模型是关键，重点培养数学建模、数学运算素养.

调和平均数≤几何平均数≤算术平均数≤平方平均数：

若a，$b\in R_+$，则$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$（当且仅当$a=b$时取“=”）

1．数学命题的证明方式有很多种．利用图形证明就是一种方式．现有如图所示图形，在等腰直角三角形$\triangle ABC$中，点O为斜边AB的中点，点D为斜边AB上异于顶点的一个动点，设$AD=a$，$BD=b$，用该图形能证明的不等式为（　）.



A．$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\left(a>0,b>0\right)$　　B．$\dfrac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\left(a>0,b>0\right)$

C．$\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\left(a>0,b>0\right)$　　D．$a^2+b^2\ge2\sqrt{ab}\left(a>0,b>0\right)$

2．小李从甲地到乙地的平均速度为a，从乙地到甲地的平均速度为$b(a>b>0)$，他往返甲乙两地的平均速度为v，则（　）

A．$v=\dfrac{a+b}{2}$　　B．$v=\sqrt{ab}$

C．$\sqrt{ab}<v<\dfrac{a+b}{2}$　　D．$b<v<\sqrt{ab}$

【巩固练习 1】

3．原油作为“工业血液”、“黑色黄金”，其价格的波动牵动着整个化工产业甚至世界经济.小李在某段时间内共加油两次，这段时间燃油价格有升有降，现小李有两种加油方案:第一种方案是每次加油 40 升，第二种方案是每次加油 200 元，则下列说法正确的是（　）

A．第一种方案更划算

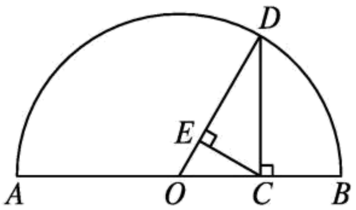
B．第二种方案更划算

C．两种方案一样

D．无法确定

【巩固练习 2】

4．《几何原本》中的几何代数法(用几何方法研究代数问题)成了后世西方数学家处理问题的重要依据，通过这一方法，很多代数公理、定理都能够通过图形实现证明，并称之为"无字"证明.如图，*AB* 是半圆 *O* 的直径，点 *C* 是 *AB* 上一点(不同于 *A*，*B*，*O*)，点 *D* 在半圆 *O* 上，且 $CD\perp AB$，$CE\perp OD$ 于 *E*.设 $AC=a$，$BC=b$，则该图形可以完成的"无字"证明为（　　）



A．$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ ($a>0$，$b>0$)

B．$\frac{a+b}{2}<\frac{2ab}{a+b}$ ($a>0$，$b>0$，$a\neq b$)

C．$\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ ($a>0$，$b>0$)

D．$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$ ($a>0$，$b>0$，$a\neq b$)

【巩固练习 3】

5．给出下面四个结论，其中不正确的是（　　）

A．两次购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定;第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定，则若 n 次（$n\ge 2$）购买同一物品，用第一种策略比较经济

B．若二次函数 $f(x)=24ax^2+4x-1(a\neq 0)$ 在区间 $(-1,1)$ 内恰有一个零点，则实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},0\right)\cup\left(0,\frac{5}{24}\right)$

C．已知函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$，则 $3b+2a$ 的取值范围是 $\left[2\sqrt{6},+\infty\right)$

D．设矩形 $ABCD(AB>AD)$ 的周长为 24，把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠，AB 折过去后交 DC 于点 P，设 $AB=x$，则 $\triangle ADP$ 的面积是关于 x 的函数且最大值为 $108-70\sqrt{2}$

【题型 12】与 a+b、平方和、 ab 有关问题的最值（和，积，平方和互相转化）

基础知识

利用基本不等式变形求解

常用不等式链：$ab \le \frac{(a+b)^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2}$（主要用于和积转换）

（2024·辽宁葫芦岛·二模）

6．若 $a>0, b>0, 2ab+a+2b=3$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值是 （　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1

C．2　　D．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

（2024·重庆渝中·模拟预测）

7．已知实数 x, y 满足 $x^2+4y^2-2xy=1$，则（　）

A．$x+2y\le 1$　　B．$x+2y\ge -2$

C．$x^2+4y^2\le 2$　　D．$x^2+4y^2\ge 1$

【巩固练习 1】

8．已知实数 a，b 满足 $a^2+4b^2-ab=1$，则 a^2+4b^2 的最大值为______

【巩固练习 2】

（2024·高三·海南·期末）

9．已知 $a>0, b>0$，且 $a+b-ab=\frac{3}{4}$，则（　）

A．$a+b\ge 3$　　B．$0<ab\le\frac{1}{4}$ 或 $ab\ge\frac{9}{4}$

C．$(a-1)^2+(b-1)^2\le\frac{1}{2}$　　D．$1<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{4}{3}$ 或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 4$

【巩固练习 3】

10．已知正数 x, y 满足 $x^2+xy+y^2=9$，则（　）

A．$xy\le 2$　　B．$x^2+y^2\ge 6$

C．$x+y\le 2\sqrt{3}$　　D．$x+y\ge 6$

【题型 13】基本不等式恒成立与能成立问题

基础知识

$\forall x\in M$，**使得** $f(x)\geq a$ ，**等价于** $f(x)_{\min}\geq a$ ，$\forall x\in M$，**使得** $f(x)\leq a$ ，**等价于** $f(x)_{\max}\leq a$

$\exists x\in M$，**使得** $f(x)\geq a$ ，**等价于** $f(x)_{\max}\geq a$ ，$\exists x\in M$，**使得** $f(x)\leq a$ ，**等价于** $f(x)_{\min}\leq a$

11．已知 $x>0, y>0$ ，且 $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$，若 $x+y>m^2+3m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-4,6)$　　B．$(-3,0)$　　C．$(-4,1)$　　D．$(1,3)$

12．若正实数 x,y 满足 $x+y=1$，且不等式 $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{y}<m^2+\frac{3}{2}m$ 有解，则实数 m 的取值范围________.

【巩固练习 1】

13．已知 $x>0, y>0$ ，且 $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y}=\frac{2}{7}$，若 $x+2+y>m^2+5m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-4,7)$　　B．$(-2,7)$　　C．$(-4,2)$　　D．$(-7,2)$

【巩固练习 2】

14．已知 $x>0$， $y>0$，且 $x+9y=xy$，若不等式 $a\leq x+y$ 恒成立，则 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,6]$　　B．$(-\infty,16]$

C．$(-\infty,8]$　　D．$(-\infty,9]$

【巩固练习 3】

15．若两个正实数 x,y 满足 $x+2y=xy$，且存在这样的 x,y 使不等式 $2x+y<m^2+8m$ 有解，则实数 m 的取值范围是（　）

A．$(-1,9)$　　B．$(-9,1)$

C．$(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1)\cup(9,+\infty)$

【巩固练习 4】

16．若存在 $x\in[1,3]$，使不等式 $x^2-2ax+a+2\leq 0$ 成立，则 a 的取值范围为______.

模块二　学有余力·拓展提升

【题型 14】消元法

基础知识

17．已知 $x>0,y>0$，$xy+2x-y=10$，则 $x+y$ 的最小值为______.

【巩固练习 1】

18．若 $a>0,b>0,ab=2$，则 $\dfrac{a+4b+2b^3}{b^2+1}$ 的最小值为_____.

【巩固练习 2】（2024·浙江嘉兴·二模）

19．若正数 x,y 满足 $x^2-2xy+2=0$，则 $x+y$ 的最小值是（　）

A．$\sqrt{6}$　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．2

【巩固练习 3】（2024·重庆·模拟预测）

20．已知 $x>0,y>0$，且 $x+y+xy-3=0$，则（　）

A．xy 的取值范围是 $[1,9]$

B．$x+y$ 的取值范围是 $[2,3)$

C．$x+4y$ 的最小值是 3

D．$x+2y$ 的最小值是 $4\sqrt{2}-3$

E．$x+4y>3$

【题型 15】因式分解型

基础知识

含有 $ax+by+abxy$ 这类结构的式子，可以考虑因式分解配凑成 $(ax+1)(by+1)$ 的结构，再结合整体思想来求最值

（重庆巴蜀中学校考）

21．已知 $x>0$，$y>0$，且 $xy+x-2y=4$，则 $2x+y$ 的最小值是______

【巩固练习 1】

22．设 x，y 为正实数，若 $2x+y+2xy=\dfrac{5}{4}$，则 $2x+y$ 的最小值是（　）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

【巩固练习 2】

23．若 $x>0$， $y>0$ 且 $x+y=xy$，则 $\frac{x}{x-1}+\frac{2y}{y-1}$ 的最小值为_______.

【巩固练习 3】

（2024·江苏南京·三模）

24．若实数 x,y 满足 $2x^2+xy-y^2=1$，则 $\frac{x-2y}{5x^2-2xy+2y^2}$ 的最大值为______.

模块二　学有余力·拓展提升

【题型 16】同除型（构造齐次式）

基础知识

齐次化就是含有多元的问题，通过分子、分母同时除以得到一个整体，然后转化为运用基本不等式进行求解．

25．设正实数 x、y、z 满足 $4x^2-3xy+y^2-z=0$，则 $\frac{xy}{z}$ 的最大值为（　）

A．0　　B．2　　C．1　　D．3

【巩固练习 1】

26．已知正实数 x,y 满足 $5x^2+4xy-y^2=1$，则 $12x^2+8xy-y^2$ 的最小值为______.

【巩固练习 2】

27．已知 $x>0$， $y>0$， $x^3+y^3=x-y$，则 $\frac{1-x^2}{y^2}$ 的最小值是（　）

A．2　　B．$2+\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{5}+2$　　D．$2\sqrt{2}+2$

【题型 17】万能“k”法

基础知识

求啥设啥，利用一元二次方程有实数根时 $\nabla\geq 0$.

（2024·湖南衡阳·模拟预测）

28．已知实数 x,y，满足 $x^2+xy+3y^2=3$，则 $x+y$ 的最大值为（　）

A．$\frac{3\sqrt{11}}{11}$　　B．$\frac{6\sqrt{11}}{11}$　　C．$\frac{\sqrt{3}+1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

【巩固练习 1】

29．若正数a，b，c满足$a^2+b^2+c^2-ab-bc=1$，则c的最大值是______.

【巩固练习 2】（重庆巴蜀中学校考）

30．已知实数a，b满足$a^2+4b^2-ab=1$，则$a+b$的最小值为______

【巩固练习 3】

31．已知正实数x,y满足$x+\frac{2}{x}+3y+\frac{4}{y}=10$，则$xy$的取值范围为______.

【题型 18】三角换元法（利用三角函数）

基础知识

出现平方和结构（ma^2+nb^2）形式，引入三角函数表示a和b

32．若x，y满足$x^2+y^2=1$，则$\sqrt{2}x+y$的最大值为______

33．若x，y满足$x^2+y^2+xy=1$，则（　）.

A．$x+y\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B．$x+y\ge-1$

C．$x^2+y^2\le\frac{3}{2}$　　D．$x^2+y^2\ge\frac{2}{3}$

【巩固练习 1】

34．若x，y满足$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则$\sqrt{2}x+y$的最大值为______

【巩固练习 2】

35．已知实数x,y满足$x^2-2xy+2y^2=1$，则x^2-2y的最大值为______.

【题型 19】基本不等式与其他知识交汇的最值问题

基础知识

利用基本不等式求最值往往交汇考查，多涉及数列、三角、向量、解析几何、立体几何等问题中有关最值的求法.

（2024·宁夏银川·二模）

36．已知$A(3,0),B(-3,0)$，P是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上的任意一点，则$|PA|\cdot|PB|$的最大值为____.

（2024·江西·模拟预测）

37．已知圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$关于直线$ax+by-1=0(a>0,b>0)$对称，则$\frac{b^2+2a}{ab}$

的最小值为（　）

A．3　　B．$3+2\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2+2\sqrt{2}$

【巩固练习 1】（2024 苏锡常镇二模）

38．已知随机变量$\xi\sim N\left(1,\sigma^2\right)$，且$P(\xi\le 0)=P(\xi\ge a)$，则$\frac{1}{x}+\frac{4}{a-x}(0<x<a)$的最小值为（　）

A．9　　B．$\frac{9}{2}$　　C．4　　D．6

【巩固练习 2】

39．若直线$ax-by+2=0(a>0,b>0)$被圆$x^2+y^2+4x-4y-1=0$，所截得的弦长为 6，则$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$的最小值为__________.

【巩固练习 3】

40．已知过抛物线$y^2=4x$的焦点F的直线交抛物线于$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$两点，则$|AF|+4|BF|$的最小值为（　）

A．4　　B．8　　C．9　　D．12

【题型 20】含有根式的配凑（根式平方和为定值型）

基础知识

对于$ax^2+by^2=n$，求$kx\sqrt{1+y^2}$最大值

可以设$c=\sqrt{1+y^2}$，配好系数后的c^2与x^2可以凑出定值

41．已知x,y为正实数,且$x^2+\frac{y^2}{2}=1$,求$x\sqrt{1+y^2}$的最大值.

【巩固练习 1】

42．若$x>0$，$y>0$，且$2x^2+\frac{y^2}{3}=8$，求$x\sqrt{6+2y^2}$的最大值为_______.

【巩固练习 2】

43．已知a，b是正实数，且$2a^2+3b^2=10$，求$a\sqrt{2+b^2}$的最大值.

【题型 21】多次运用基本不等式

基础知识

44．已知正实数a，b，满足$a+b\geq\frac{9}{2a}+\frac{2}{b}$，则$a+b$的最小值为（　）

A．5　　　　B．$\frac{5}{2}$　　　　C．$5\sqrt{2}$　　　　D．$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【巩固练习 1】

45．对任意的正实数a,b,c，满足$b+c=1$，则$\frac{8ab^2+a}{bc}+\frac{16}{a+1}$的最小值为________.

【巩固练习 2】

46．已知正实数x、y、z满足$x^2+y^2+z^2=1$，则$\frac{5-8xy}{z}$的最小值是（　）

A．6　　　　B．5　　　　C．4　　　　D．3

参考答案：

1．C

【分析】由$\triangle ABC$为等腰直角三角形，得到$OC=\dfrac{a+b}{2}$，$OD=\left|OB-BD\right|$，然后在$Rt\triangle OCD$中，得到CD判断.

【详解】解：由图知：$OC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a+b}{2},OD=\left|OB-BD\right|=\left|\dfrac{a+b}{2}-b\right|=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$，

在$Rt\triangle OCD$中，$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，

所以$OC\le OD$，即$\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\left(a>0,b>0\right)$，

故选：C

2．D

【分析】平均速度等于总路程除以总时间

【详解】设从甲地到乙地的的路程为s，从甲地到乙地的时间为t_1，从乙地到甲地的时间为t_2，则

$t_1=\dfrac{s}{a}$，$t_2=\dfrac{s}{b}$，$v=\dfrac{2s}{t_1+t_2}=\dfrac{2s}{\dfrac{s}{a}+\dfrac{s}{b}}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$，

$\therefore v=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b}}=b$，$v=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}<\dfrac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，

故选:D.

3．B

【解析】分别求出两种方案的平均油价，结合基本不等式作出比较即可得出结论.

【详解】设小李这两次加油的油价分别为x元/升、y元/升，则：

方案一：两次加油平均价格为$\dfrac{40x+40y}{80}=\dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$，

方案二：两次加油平均价格为$\dfrac{400}{\dfrac{200}{x}+\dfrac{200}{y}}=\dfrac{2xy}{x+y}\le\sqrt{xy}$，

故无论油价如何起伏，方案二比方案一更划算.

故选：B.

4．D

【分析】求出半圆O的半径$DO=\dfrac{a+b}{2}$，$DC=\sqrt{ab}$，$DE=\dfrac{2ab}{a+b}$，根据$DE<DC<DO$即得解.

【详解】由 $AC=a$，$BC=b$，可得半圆 O 的半径 $DO=\dfrac{a+b}{2}$，

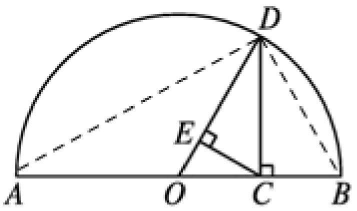
因为 AB 是直径，所以 $AD\perp BD$.

易得 $DC=\sqrt{AC\cdot BC}=\sqrt{ab}$，

所以 $DE=\dfrac{DC^2}{DO}=\dfrac{2ab}{a+b}$，

$\because DE<DC<DO$，$\therefore \dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}(a>0，b>0，a\neq b)$.

故选：D.



【点睛】本题主要考查基本不等式的证明，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

5．BCD

【分析】利用基本不等式可判断 AD 的正误，对于 B，利用参变分离可得参数 a 的取值范围，从而可判断 B 的正误，利用对勾函数的性质可判断 C 的正误.

【详解】对于 A，设两次购买此种商品的单价分别为 p_1，p_2（都大于 0），

第二种方案每次购买这种物品数量为 $x>0$；

第一种方案每次购买这种物品的钱数为 $y>0$.可得：

第二种方案的平均价格为：$\dfrac{xp_1+xp_2}{2x}=\dfrac{p_1+p_2}{2}$；

第一种方案的平均价格为 $\dfrac{2y}{\dfrac{y}{p_1}+\dfrac{y}{p_2}}=\dfrac{2p_1p_2}{p_1+p_2}\leq\dfrac{2p_1p_2}{2\sqrt{p_1p_2}}=\sqrt{p_1p_2}\leq\dfrac{p_1+p_2}{2}$.

当且仅当 $p_1=p_2$ 时取等号，故 A 正确.

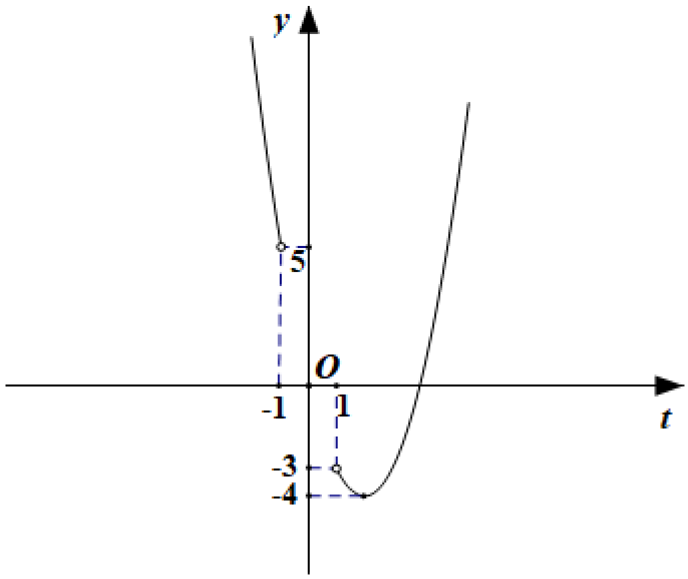
对于 B，因为 $f(x)=24ax^2+4x-1(a\neq 0)$ 在区间 $(-1,1)$ 内恰有一个零点，

所以 $24ax^2+4x-1=0$ 在 $(-1,1)$ 内恰有一个根，且此根不为零，

故 $24a=\dfrac{1-4x}{x^2}$ 在 $(-1,1)$ 内恰有一个根，令 $t=\dfrac{1}{x}\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，

故 $24a=t^2-4t$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 内恰有一个根，

$y=t^2-4t$ 的图象如图所示：



故 $24a\in(-3,0)\cup(0,5)\cup\{-4\}$ 即 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},0\right)\cup\left(0,\frac{5}{24}\right)\cup\left\{-\frac{1}{6}\right\}$，

故 B 错误.

对于 C，由 $f(x)=|\lg x|$， $0<a<b$， $f(a)=f(b)$ 知 $ab=1$，且 $0<a<1$，

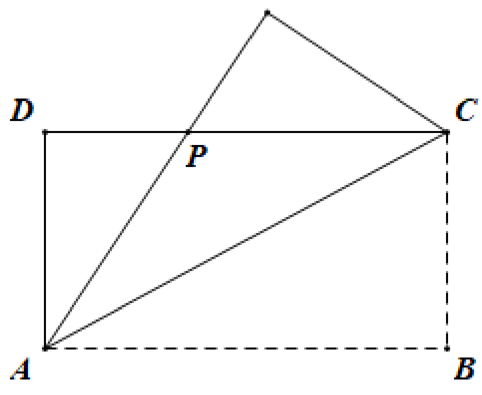
所以 $2a+3b=2a+\frac{3}{a}$，

又 $0<a<1$，函数 $g(a)=2a+\frac{3}{a}$ 在 $(0,1)$ 上是减函数，

$\therefore 2a+\frac{3}{a}>g(1)=5$， $3b+2a>5$，故 C 错误.

对于 D，由题意可知，矩形 $ABCD(AB>CD)$ 的周长为 24， $AB=x$，即 $AD=12-x$，

因为 $AB>AD>0$，故 $6<x<12$.



设 $PC=a$，则 $DP=x-a$， $AP=a$，而 ΔADP 为直角三角形，

$\therefore (12-x)^2+(x-a)^2=a^2$，

$\therefore a=x+\frac{72}{x}-12$，$\therefore DP=12-\frac{72}{x}$，其中$6<x<12$，

$\therefore S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}\times AD\times DP=\frac{1}{2}\times(12-x)\times\left(12-\frac{72}{x}\right)$

$=108-\frac{432}{x}-6x\le108-2\sqrt{\frac{432}{x}\cdot6x}$

$=108-72\sqrt{2}$.

当且仅当$\frac{432}{x}=6x$，即$x=6\sqrt{2}$时取等号，

即$x=6\sqrt{2}$时ΔADP取最大面积为$108-72\sqrt{2}$.

故选：BCD.

【点睛】易错点睛：

（1）利用基本不等式求最值时，注意检验等号成立的条件；

（2）对于含参数的二次方程有解问题，利用参变分离求参数的取值范围，注意换元时变量范围的相应的变化.

6．C

【分析】根据给定等式，利用均值不等式变形，再解一元二次不等式作答.

【详解】$a>0,\ b>0,\ 3=2ab+a+2b\le(\frac{a+2b}{2})^2+(a+2b)$，当且仅当$a=2b$时取等号，

因此$(a+2b)^2+4(a+2b)-12\ge0$，即$(a+2b+6)(a+2b-2)\ge0$，解得$a+2b\ge2$，

所以当$a=2b=1$时，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$取得最小值 2.

故选：C

7．BC

【分析】由已知条件，结合基本不等式计算即可判断 AB；根据$(x-2y)^2\ge0$，结合基本不等式计算即可判断 C；根据$(x+2y)^2\ge0$，基本不等式计算即可判断 D.

【详解】A：由$x^2+4y^2-2xy=1$，得$x^2+4y^2+4xy=6xy+1$，

即$(x+2y)^2=6xy+1\le3\cdot(\frac{x+2y}{2})^2+1$，得$(x+2y)^2\le4$，

解得$-2\le x+2y\le2$，当且仅当$x=2y$时等号成立，故 A 错误；

B：由选项 A 的分析知$-2\le x+2y$，故 B 正确；

C：由$(x-2y)^2\ge0$，得$x^2+4y^2\ge4xy$，即$2xy+1\le\frac{x^2+4y^2}{2}+1$，

所以$x^2+4y^2=2xy+1\le\frac{x^2+4y^2}{2}+1$，

得$x^2+4y^2\le 2$，当且仅当$x=2y$时等号成立，故C正确；

D：由$(x+2y)^2\ge 0$，得$x^2+4y^2\ge -4xy$，即$2xy+1\ge 1-\frac{x^2+4y^2}{2}$，

所以$x^2+4y^2=2xy+1\ge 1-\frac{x^2+4y^2}{2}$，得$x^2+4y^2\ge\frac{2}{3}$，

当且仅当$x=2y$时等号成立，故D错误.

故选：BC

【点睛】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）"一正二定三相等""一正"就是各项必须为正数；

（2）"二定"就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）"三相等"是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

8．$\frac{4}{3}$##$1\frac{1}{3}$

【分析】根据给定条件，利用基本不等式求解即得.

【详解】$1=a^2+4b^2-ab=a^2+4b^2-\frac{1}{2}a\cdot(2b)\ge a^2+4b^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+(2b)^2}{2}=\frac{3}{4}(a^2+4b^2)$，

则$a^2+4b^2\le\frac{4}{3}$，当且仅当$a=2b=\frac{\sqrt{6}}{3}$或$a=2b=-\frac{\sqrt{6}}{3}$时等号成立，

所以a^2+4b^2的最大值为$\frac{4}{3}$.

故答案为：$\frac{4}{3}$

9．BD

【分析】利用整体法与基本不等式逐一分析各选项即可得解.

【详解】对于A，Q $a>0,b>0,\therefore ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

因为$a+b-ab=\frac{3}{4}$，$\therefore\frac{3}{4}=a+b-ab\ge a+b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

令$t=a+b$，得$t^2-4t+3\ge 0$，解得$t\le 1$或$t\ge 3$，即$0<a+b\le 1$或$a+b\ge 3$，

当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$或$a=b=\frac{3}{2}$时，等号成立，故A错误；

对于B，Q$a+b\ge 2\sqrt{ab},\therefore\frac{3}{4}\ge 2\sqrt{ab}-ab$，解得$0<ab\le\frac{1}{4}$或$ab\ge\frac{9}{4}$，