2024 年广东省专升本《高等数学》
黄金考点汇编

第一章 函数、极限、连续

第一节 函 数

考点 1：判断函数是否为同一函数

方法：定义域和对应法则都相同的函数为同一函数。

1. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数的是（　　）

A. $f(x)=|x|$， $g(x)=x$　　B. $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$， $g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$　　D. $f(x)=\ln x^3$ ， $g(x)=3\ln x$

【答案】 D

【考点】 函数的二要素：定义域、对应法则。

【解析】解：判断函数是否是同一函数，需要定义域、对应法则都一样，是同一函数。A、B 选项对应法则不一样，C 选项定义域不一样，D 选项定义域和对应法则都一样。

考点 2：求函数定义域

（1）具体函数求定义域 $\begin{cases} \dfrac{a}{f(x)}, f(x)\neq 0 \\ \sqrt[2n]{f(x)}, f(x)\geq 0 \\ \log_a f(x), f(x)>0 \\ \arcsin f(x), \arccos f(x), -1\leq f(x)\leq 1 \end{cases}$

（2）抽象函数求定义域：$f[g(x)], f[h(x)]$, 要使得 $g(x), h(x)$ 值域要相同，求出 x 的范围即可。

1. 函数 $y=\sqrt{x^2+x-12}$ 的定义域为______________.

【答案】$(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$

【考点】考查函数的定义域。

【解析】解： $x^2+x-12\geq 0,(x-3)(x+4)\geq 0,x\in(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$

2. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，求函数 $f(2x-4)$ 的定义域.

【答案】 $x\in[1,3]$

【考点】 考查函数的定义域。

【解析】解： $-2\leq 2x-4\leq 2,1\leq x\leq 3,x\in[1,3]$

考点 3：函数的解析式、反函数的求法

函数的解析式：配凑法，换元法

反函数：反解出 $x=\varphi(y)$，互换自变量与因变量。

1. 已知 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 则 $f[f(x)]=$（　　　）

A. $x-1$　　　B. $\dfrac{1}{x-1}$　　　C. $1-x$　　　D. $\dfrac{1}{1-x}$

【答案】 D

【考点】 求函数的解析式。

【解析】解： $f[f(x)]=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-x}$

2. 已知函数 $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，求反函数 $f^{-1}(x)$.

【答案】 $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

【考点】 求解反函数。

【解析】解： $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}},y^2=\dfrac{1-x}{1+x},x=\dfrac{1-y^2}{1+y^2},f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

考点4：函数的基本性质

基本性质：

单调性：利用导数判断，$f'(x)>0$，函数单调递增，求出自变量的范围为单调递增区间；$f'(x)<0$，函数单调递减，求出自变量的范围为单调递减区间。

奇偶性：根据定义判定。函数$f(x)$的定义域关于原点对称，若$f(-x)=f(x)$，则$f(x)$为偶函数，若$f(-x)=-f(x)$，则$f(x)$为奇函数。

关于奇偶函数重要的结论：设$f(x)$，$g(x)$的定义域分别是D_1,D_2，那么在它们的公共定义域上：奇+奇=奇，奇×奇=偶，偶+偶=偶，偶×偶=偶，奇×偶=奇.

有界性（识记常见有界函数)

$|\sin x|\le 1,|\cos x|\le 1,|arc\sin x|\le \frac{\pi}{2},|\arccos x|\le \pi,|\arctan x|<\frac{\pi}{2}.$

周期性（不常考）

1. 函数$f(x)=1+\ln x$在$(0,e)$内（　　）

A.严格单调递增且有界　　B.严格单调递减且有界

C.严格单调递增且无界　　D.严格单调递减且无界

【答案】 C

【考点】 函数的基本性质。

【解析】解：$f'(x)=\frac{1}{x}>0, f(x)$在$(0,e)$内是单调递增函数，在$(0,e)$内，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$，$f(x)=1+\ln x$无下界。

2. 判断函数$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$的奇偶性：

【答案】奇函数

【考点】 函数的基本性质。

【解析】解： $y\left(-x\right)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$

$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-y\left(x\right),y$ 为奇函数.

第二节 极 限

考点5：数列的极限

如果当 n 无限增大时，数列 $\left\{x_n\right\}$ 无限趋近于确定的常数 a ，那么 a 就叫做数列 $\left\{x_n\right\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a\left(n\to\infty\right)$.

1. 根据题意填空：

（1）数列-1， $\frac{1}{2}$ ， $-\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ， …，其通项为_______________.

【答案】 $x_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n}$

【考点】 求数列的通项公式。

【解析】解：通项为 $x_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n}$

（2）设数列 1 ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{8}$ ， …，，则数列的前 n 项和 $S_n=$ _______________，

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$ _______________.

【答案】 见解析

【考点】 求数列的极限。

【解析】解：通项为$x_n=\dfrac{1}{2^{n-1}},S_n=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right],\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2$

2. 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x^2-5}{3x^3+2x+1}$

【答案】 $\dfrac{2}{3}$

【考点】 求数列的极限。

【解析】解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x^2-5}{3x^3+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{2}{3}$

【总 结】： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}$

考点 6：函数的极限

【总 结】计算极限的常用方法：

有 **7** 种未定式： $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^\infty,\infty^0,0^0$

1. 求下列函数的极限（$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$型，又称基本型）方法有：

①约去零因式法（此法适用于$x\to x_0,\dfrac{0}{0}$）；

②除以适当无穷大（适用于$x\to\infty(n\to\infty)$时，$\dfrac{\infty}{\infty}$）；

③分子或分母有理化（适用于带有根号的极限问题）；

④通分，倒代换（适用于$\infty-\infty$）；

⑤利用基本极限公式（适用于$\dfrac{0}{0},1^\infty$）；

⑥等价无穷小替换；

⑦无穷小量的性质（无穷小·无穷小=无穷小，无穷小·有界量=无穷小）；

⑧利用夹逼原理（进行适当放缩）；

⑨取e法或取对数法（适用于1^∞，0^0和∞^0）；

⑩洛必达法则（$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$）.

1. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}$　　　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x\sin^2 x}$

【答案】见解析

【考点】 求函数的极限。

【解析】解：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\frac{1}{3}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\sin x-x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}$

考点7：无穷小量的阶

设$\lim\alpha\left(x\right)=0,\lim\beta\left(x\right)=0.$

（1）如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta=o(\alpha)$，

（2）如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小.

（3）如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小。特别地，当$c=1$时，

即$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，此时称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\alpha\sim\beta$.

1. 当 $x \to 0$ 时，下列（　　　）是 x 的高阶无穷小量.

$A.\ e^{\sqrt[3]{x}}-1$　　　$B.\ \sqrt{1+x}-1$　　　$C.\ x\sin\frac{1}{x}$　　　$D.\ 1-\cos x$

【答案】 D

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=0$, 可判断 D 正确。

2. 当 $x \to 0$ 时，$\ln(\cos x)$ 与 Ax^k 是等价无穷小，则常数 $A=$ ________，常数 $k=$ ________.

【答案】 $A=-\frac{1}{2},k=2$

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{Ax^k},A=-\frac{1}{2},k=2$

考点 8：用极限解决参数问题

1. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=2$，求常数 a,b 的值.

【答案】 $a=2,b=-4$

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+1-(x+1)(ax+b)}{x+1}\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1-ax^2-bx-ax-b}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}(4x-2ax-b-a)=2,$$

$a=2,-a-b=2,b=-4$

7

第三节 连 续

考点9：函数的连续性

判断函数在某一点是否连续遵循以下步骤：

① $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处是否有定义；

② $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 是否存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ 是否等于 $f\left(x_0\right)$.

1. 若函数 $f(x)\begin{cases}(1+x)^{\frac{3}{x}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，试确定 a 的值。

【答案】 $A=-\dfrac{1}{2}, k=2$

【考点】 考查函数在某一点的连续性。

【解析】函数 $f(x)\begin{cases}(1+x)^{\frac{3}{x}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，必须使

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，故 $a=e^3$.

考点10：求函数的间断点及其类型

①第一类间断点（ $f(x_0^{-}), f(x_0^{+})$ 存在）

可去间断点： $f(x_0^{-})=f(x_0^{+})$;

跳跃间断点： $f(x_0^{-})\neq f(x_0^{+})$;

②第二类间断点（ $f(x_0^{-}), f(x_0^{+})$ 至少有一个不存在）

无穷间断点： $\lim\limits_{x\to x_0^{-}} f\left(x\right)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f\left(x\right)=\infty$

1. 设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{2x}-1}{|x|\left(x^2-1\right)}$，则 $x=0$ 是 $f\left(x\right)$ 的____________间断点.