第四章数列

4.2.2 第3课时

等差数列的前n项和公式及相关性质

学习目标

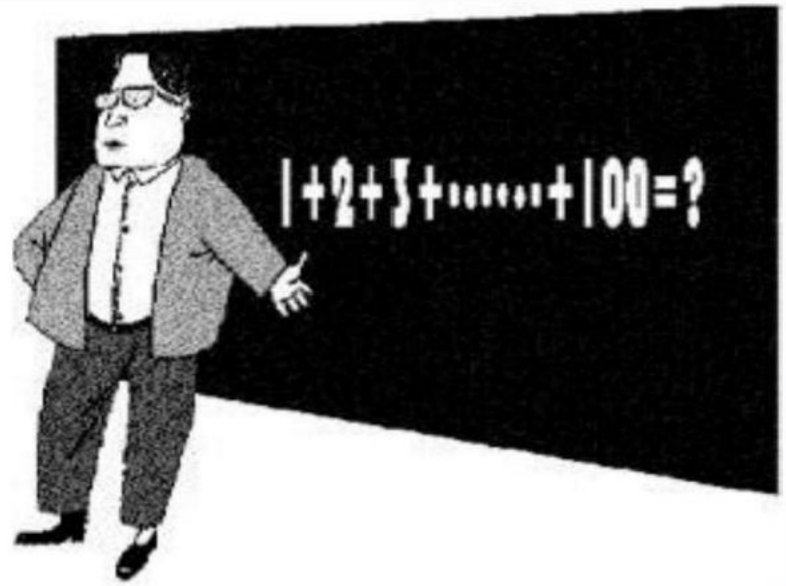
素 养 目 标	学 科 素 养
1.等差数列的前n项和公式及其应用.(重点) 2.等差数列的前n项和公式的推导过程.(难点)	1、数学抽象 2、数学运算 3、逻辑推理

创设情境

据说，200多年前，高斯的算术老师提出了下面的问题：

1+2+3+...+10O=?

你准备怎么算呢？



探究新知

高斯（**Gauss,1777—**
1855)，德国数学家，
近代数学的奠基者之一.
他在天文学、大地测量
学、磁学、光学等领域
都做出过杰出贡献.

高斯的算法：1+2+3+4+⋯⋯+97+98+99+100=（1+100）+(2+99)+⋯.+(50+51)=101×50 =5050

高斯算法的高明之处在于他发现这100个数可以配对成50对：

第一个数与最后一个数一对；

第二个数与倒数第二个数一对；

第三个数与倒数第三个数一对， ⋯⋯

配对后每对数的和均相等，都等于101 ，
高斯算法是将不同数的求和问题转化成了相同数（即101）的求和，快速准确得到结果.

探究新知

问题1：为什么1+100=2+99=…=50+51呢？

这是巧合吗？试从数列角度给出解释.

应用等差数列的性质：

若$m+n=p+q$ 时，则$am+a_1=ap+ag$

探究新知

问题2:你能利用高斯算法求1+2+⋯+100+101吗?

思路1.(拿出中间项，再首尾配对):

原式=(1+101)+(2+100)+⋯+(50+52)+51

思路2.(拿出末项，再首尾配对):

原式=(1+2+⋯+100)+101

思路3.(先凑成偶数项，再配对):

原式=(0+1+2+⋯+101)

类比、推广一般情况:

问题3:你能计算1+2+3+⋯+n吗?

请同学们动笔书写运算过程

探究新知

思考：按高斯的算法，需要对等差数列各项进行“配对”，那么项数为奇数和项数为偶数时，前n项和是否一样呢?

我们以等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n$为例，进行谈论；

当n 是偶数时，有

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}$$

$S_n=1+2+3+\ldots+n$

$$=(1+n)+[2+(n-1)]+\cdots[\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}+1)]$$

$=(1+n)+(1+n)+\ldots+(1+n)$

$$=\frac{n(1+n)}{2}$$

探究新知

当n为奇数时，有

$S_n=1+2+3+\dots+n$

$$=(1+n)+[2+(n-1)]+\cdots+\left[\left(\frac{n+1}{2}-1\right)+\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\right]+\frac{n+1}{2}$$

$$=(1+n)+(1+n)+\cdots+(1+n)+\frac{n+1}{2}$$

$$=\frac{n-1}{2}\cdot(1+n)+\frac{n+1}{2}$$

$$=\frac{n(1+n)}{2}$$

所以，对任意正整数n，都有

$$S_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$$

思考：项数分奇偶得到的结果是一样的，那么是否能避免分类谈论呢？

探究新知

某仓库堆放的一堆钢管(如图),最上面的一层有4根钢管，下面的每一层都比上一层多一根，最下面的一层有9根，怎样计算这堆钢管的总数呢?

请同学们观察两幅图形，思考钢管数关系?

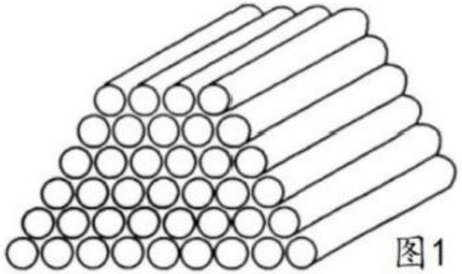


图1

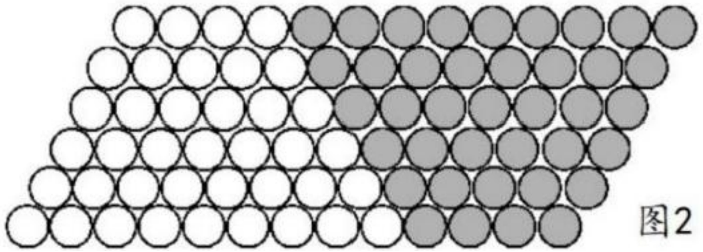


图2

这样，按照图2,每层的钢管数都等于4+9,共有6层。从而图1钢管的总数为$\frac{6\times(4+9)}{2}=39$

思考：如何推导等差数列$\{a_n\}$的前n项和公式S_n呢?

探究新知

$Sn=a_1+a_2+a_3+\ldots+an-2+an-1+an$

$Sn=an+an-1+an-2+\ldots+a_3+a_2+a_1$ ·

$2Sn=(a_1+an)+(a_2+an-1)+\ldots+(an+a_1)$

因为： $a_1+an=a_2+an-1=\cdots=an+a_1$

所以：$2Sn=(a_1+an)+(a_1+an)+\ldots+(a_1+an)$

$=n(a_1+an)$

即：$S_n=\dfrac{n(1+a_n)}{2}$

倒序相加法

探究新知

等差数列前n项和公式

由上得出：等差数列{ **a,**}的前n项和公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

又因为a=a₁+(n-1)d

所以上述公式又可以写成 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

已知量	首项，末项与项数	**首项，公差与项数**
选用公式	S, =______	Sn=___________

探究新知

等差数列的前n项公式

已知量	首项，末项与项数	**首项，公差与项数**
选用公式	$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

功能1:已知a,a_1 和 n, 求 S

功能2:已知S,n,a_1 和 a, 中任意3个，求第4个

.

探究新知

等差数列的前n项公式的性质

(1)若Sm, S2m, S3m 分别为等差数列{am}的前m 项，前2m 项，前 3m 项的和，则Sm,S₂m—Sm,S₃m—S₂m 成等差数列，公差为 $m^2 d$.

2)设两个等差数列{a},{b} 的前n项和分别为S,Tm 则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}$.

(3)若等差数列{an}的项数为2n(n∈N), 则
S2n=n(an+an+1),
$S_{偶}-S_{奇}=nd$, $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}(S_{奇}\neq 0)$.

(4)若等差数列{an}的项数为2n+1(n∈N), 则 S2n+1=(2n+

1b0m(a 是数列的中间项). $S_{偶}-S_{奇}=-a_{n+1}$, $\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=\frac{n}{n+1}$

(S ≠0). 其中， S。表示数列{an}的奇数项的和，S 表示数列{an}的偶数项的和.

微判断

1．设等差数列$\{a_n\}$的前n 项和为S_n，则 S_n与 a_n不可能相等.（ X ）

2．等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n一定是关于n 的二次函数.（ X ）

微训练

1. 在等差数列{an} 中 ，ai=2,az=3, 则其前10项的和S1o

等于 65

解析 由 a=2,az=3 得d=1, 故，$S_{10}=10a_1+\frac{1}{2}\times10\times9d=$

10×2+45=65.

2. 在等差数列{an}中，若ai=-1,Szs=30, 则公差 $d=$ $\frac{11}{60}$.

解 析 由 $S_{25}=-25+\frac{1}{2}\times24\times25\times d=30$, 解得, $d=\frac{11}{60}$

3. 数列{an}为等差数列，它的前n 项和为S, 若 Sn=(n+1)²

+ λ , 则 实 数 的 值 是 - 1 .

解析 ∵等差数列{an}的前n 项和S 的形式为$Sn=an^2+bn$

(a,b∈R),∴λ=-1.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/857133133153006115