

永州市 2022 年下期高二期末质量监测试卷

数学

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 下列直线经过第一象限且斜率为-1 的是 ()

A. $x + y + 1 = 0$

B. $x + y - 1 = 0$

C. $x - y - 1 = 0$

D. $x - y + 1 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意利用直线方程的斜截式即可选出答案。

【详解】满足题意的直线方程通式为： $y = -x + b \Rightarrow x + y - b = 0 (b > 0)$

故选：B

2. 已知 $\vec{a} = (1, -2, -2)$, $\vec{b} = (2, 2, 1 - m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ ()

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用向量垂直充要条件列出关于 m 的方程，解之即可求得 m 的值。

【详解】 $\vec{a} = (1, -2, -2)$, $\vec{b} = (2, 2, 1 - m)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 则 $2 \times 1 + 2 \times (-2) - 2(1 - m) = 0$, 解之得 $m = 2$

故选：D

3. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的虚轴长为 8, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 则双曲线 C 的方程为

()

A. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

C. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$

D. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据虚轴、渐近线的定义求解.

【详解】由题可得 $\begin{cases} 2b=8 \\ \frac{b}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=4 \\ a=8 \end{cases}$, 所以双曲线方程为 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$,

故选:C.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n+1(n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_5 =$ ()

- A. 27 B. 64 C. 81 D. 128

【答案】C

【解析】

【分析】利用题给条件即可依次求得 a_2, a_3, a_4, a_5 的值.

【详解】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1=1$, $a_{n+1}=2S_n+1$

则 $a_2=2S_1+1=2a_1+1=3$, $a_3=2S_2+1=2(a_1+a_2)+1=9$,

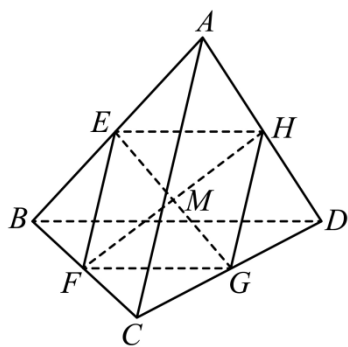
$a_4=2S_3+1=2(a_1+a_2+a_3)+1=27$,

$a_5=2S_4+1=2(a_1+a_2+a_3+a_4)+1=81$.

故选: C.

5. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点, 点 M 是 EG 和 FH 的交点,

对空间任意一点 O 都有 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OM}$, 则 $k =$ ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

【答案】D

【解析】

【分析】证明出四边形 $EFGH$ 为平行四边形, M 为 EG 中点, 利用空间向量基本定理求解即可.

【详解】 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点,

故 $EH \parallel BD, EF \parallel GH$,

所以 E, F, G, H 四点共面, 且四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

故 M 为 EG 中点,

因为 $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OE}, \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OG}$,

所以 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2(\vec{OE} + \vec{OG}) = 4\vec{OM}$,

故 $k = 4$.

故选: D

6. 已知抛物线 C 的焦点为 F , 准线为 l , 过 F 的直线 m 与 C 交于 A, B 两点, 点 A 在 l 上的投影为 D , 若

$|AB| = |BD|$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = (\quad)$

A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{5}{2}$

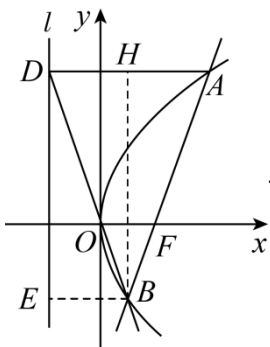
D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】结合图像, 分析出点 H 为 AD 的中点, 从而利用抛物线的定义即可求得结果.

【详解】过点 B 作 $BE \perp l$, 垂足为 E , 作 $BH \perp AD$, 垂足为 H , 如图,



又因为 $AD \perp l$, 所以四边形 $BEDH$ 为矩形, 所以 $|BE| = |DH|$,

因为 $|AB| = |BD|$, $BH \perp AD$, 所以点 H 为 AD 的中点,

所以 $|DH| = |AH|$, 故 $|AD| = 2|DH| = 2|BE|$,

由抛物线的定义可得 $|AF| = |AD|$, $|BF| = |BE|$, 所以 $|AF| = 2|BF|$, 即 $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$.

故选: B.

7. 已知 $A(-3,0)$, $B(1,0)$, P 是圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 上的动点, 则 $\triangle ABP$ 外接圆的周长的最小值为 ()

- A. $\frac{15\pi}{4}$ B. $\frac{17\pi}{4}$ C. $\frac{19\pi}{4}$ D. $\frac{23\pi}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意确定圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 和圆 $O_1: (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 4$,

有公共点, 结合圆与圆的位置关系列出不等式可求解.

【详解】 AB 中点横坐标为 $x = -1$, 所以 $\triangle ABP$ 外接圆的圆心在 $x = -1$ 上,

设圆心为 $O_1(-1, a)$, 则半径为 $r = AO_1 = \sqrt{4 + a^2}$,

圆心距 $d = OO_1 = \sqrt{a^2 + 1}$,

圆 $O_1: (x+1)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 4$,

又因为 P 在圆 O 上, 所以圆 O 与圆 O_1 有公共点,

所以 $|4 - \sqrt{a^2 + 4}| \leq \sqrt{a^2 + 1} \leq 4 + \sqrt{a^2 + 4}$,

$\sqrt{a^2 + 1} \leq 4 + \sqrt{a^2 + 4}$ 显然成立,

$|4 - \sqrt{a^2 + 4}| \leq \sqrt{a^2 + 1}$ 两边同时平方可得,

$16 + 4 + a^2 - 8\sqrt{4 + a^2} \leq a^2 + 1$, 所以 $8\sqrt{4 + a^2} \geq 19$,

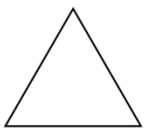
所以 $\sqrt{4 + a^2} \geq \frac{19}{8}$, 所以 $r \geq \frac{19}{8}$,

当且仅当 $4 + a^2 \geq \left(\frac{19}{8}\right)^2$, 解得 $a = \frac{\sqrt{105}}{8}$ 时取得等号,

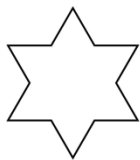
所以周长的最小值为 $2\pi \times \frac{19}{8} = \frac{19\pi}{4}$,

故选:C.

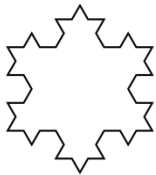
8. 如图, 瑞典数学家科赫在1904年通过构造图形描述雪花形状. 其作法是: 从一个正三角形开始, 把每条边分成三等份, 然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形, 再去掉底边. 反复进行这一过程, 就得到一条“雪花”状的曲线. 设原正三角形(图①)的边长为1, 则图④中图形的面积为 ()



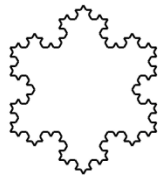
①



②



③



④

A. $\frac{94\sqrt{3}}{243}$

B. $\frac{95\sqrt{3}}{243}$

C. $\frac{94\sqrt{3}}{81}$

D. $\frac{95\sqrt{3}}{81}$

【答案】A

【解析】

【分析】设图①、②、③、④中正三角形的边长分别为 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 ，图形面积依次记为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，图形分别记为 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 ，图形的边数分别记为 N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 ，易得 $N_n = 3 \times 4^{n-1}$ ，

$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ， $S_{n+1} - S_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \times N_n \times a_{n+1}^2$ ，利用累加法可求得 S_4 的值.

【详解】设图①、②、③、④中正三角形的边长分别为 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 ，

图形面积依次记为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 ，图形分别记为 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 ，

图形的边数分别记为 N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 ，

观察图形可知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$ ($n=1,2,3$)，且 $a_1=1$ ， $N_{n+1} = 4N_n$ ($n=1,2,3$)，且 $N_1=3$ ，

由题意可知，数列 $\{N_n\}$ 是首项为1，公比为4的等比数列，则 $N_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ ，

数列 $\{a_n\}$ 是首项为1公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列， $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ，

由图可知，图形 M_{n+1} 是在图形 M_n 的每条边上生成一个小三角形（去掉底边），

共增加了 N_n 个边长为 a_{n+1} 的正三角形，

所以， $S_{n+1} - S_n = N_n \times \frac{\sqrt{3}}{4} a_{n+1}^2 = 3 \times 4^{n-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n$ ，

由累加法可得 $S_4 = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + (S_4 - S_3)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left[\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^3 \right]}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{94\sqrt{3}}{243}$$

故选：A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知 a, b, c 为非零实数，则下列说法正确的是 ()

A. $2b = a + c$ 是 a, b, c 成等差数列的充要条件

B. $b = \sqrt{ac}$ 是 a, b, c 成等比数列的充要条件

C. 若 a, b, c 成等比数列，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等比数列

D. 若 a, b, c 成等差数列，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差数列

【答案】AC

【解析】

【分析】根据等差中项与等比中项对选项一一验证即可得出答案。

【详解】对于选项 A：根据等差中项即可得出 $2b = a + c$ 是 a, b, c 成等差数列的充要条件，故 A 正确；

对于选项 B： $b = \sqrt{ac}$ ，即 $b^2 = ac$ ，又 a, b, c 为非零实数，所以根据等比中项即可证明 a, b, c 成等比数列，

a, b, c 成等比数列，只能证明 $b^2 = ac$ ，即 $b = \sqrt{ac}$ 是 a, b, c 成等比数列的充分不必要条件，故 B 错误；

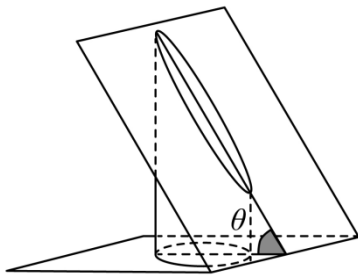
对于选项 C：若 a, b, c 成等比数列，则 $b^2 = ac$ ，则 $\left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{a} \times \frac{1}{c}$ ，则 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等比数列，故 C 正确；

对于选项 D：若 a, b, c 成等差数列，则 $2b = a + c$ ，无法得到 $2 \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ，故 D 错误；

故选：AC.

10. 如图，一个底面半径为 $\sqrt{3}$ 的圆柱被与其底面所成的角为 θ 的平面所截，截面为椭圆，若 $\theta = 60^\circ$ ，则

()



- A. 椭圆的短轴长为 $2\sqrt{3}$
- B. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. 椭圆的方程可以为 $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$
- D. 椭圆上的点到焦点的距离的最小值为 $2\sqrt{3} - 3$

【答案】 ABD

【解析】

【分析】 利用图中的几何性质即可求出 a, b, c ，即可判断 A, B, C 的正误，利用二次函数的性质即可求出椭圆上的点到焦点的距离的最小值。

【详解】 设椭圆的长半轴为 a ，短半轴为 b ，

由已知可知 $\cos 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2a}$ ，解得 $a = 2\sqrt{3}$ ，

$\because b = \sqrt{3}$ ， \therefore 椭圆的短轴长为 $2\sqrt{3}$ ，故 A 正确；

则椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，故 C 不正确；

$\because c^2 = a^2 - b^2 = 9$ ， $\therefore c = 3$ ， $\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 B 正确；

椭圆上的一点为 $P(x_0, y_0)$ ，其中一个焦点坐标为 $F(3, 0)$ ，且 $y_0^2 = 3 - \frac{x_0^2}{4}$ ，

则 $|PF|^2 = (x_0 - 3)^2 + y_0^2 = x_0^2 - 6x_0 + 9 + 3 - \frac{x_0^2}{4} = \frac{3}{4}x_0^2 - 6x_0 + 12$ ($-2\sqrt{3} \leq x_0 \leq 2\sqrt{3}$)

该抛物线的对称轴为 $x = 4$ ，故函数在区间 $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$ 上单调递减，

当 $x_0 = 2\sqrt{3}$ 有最小值，此时 $|PF|_{\min}^2 = 21 - 12\sqrt{3} = 3^2 - 12\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3} - 3)^2$ ，

即 $|PF|_{\min} = 2\sqrt{3} - 3$, 故 D 正确.

故选: ABD.

11. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_2 作直线与双曲线 C 的右支交于 A, B

两点, 若 $\angle F_1AB = 90^\circ$, 则 ()

A. $|AF_2| = \sqrt{5} - 1$

B. 点 A 的横坐标为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

C. 直线 AF_1 的斜率 $k = \pm \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

D. $\triangle ABF_1$ 的内切圆的面积 $S = (6 - 2\sqrt{5})\pi$

【答案】 ABD

【解析】

【分析】 根据双曲线的定义得到方程组, 求出 $|AF_1|$ 、 $|AF_2|$, 即可判断 A, 再由等面积法求出 $|y_A|$, 代入双曲线方程求出 x_A , 即可判断 B, 再求出直线的斜率, 即可判断 C, 利用直角三角形即内切圆的性质求出内切圆的半径, 即可判断 D

详解】 由双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 可得 $a^2 = 1, b^2 = 2, c^2 = 3$,

如图所示, 由题意知 $\begin{cases} |AF_1| - |AF_2| = 2a = 2 \\ |F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{3} \\ |AF_1|^2 + |AF_2|^2 = |F_1F_2|^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} |AF_1| = \sqrt{5} + 1 \\ |AF_2| = \sqrt{5} - 1 \end{cases}$, 故 A 正确;

在 $\text{Rt}\triangle AF_1F_2$ 中, 由等面积法知 $\frac{1}{2}|AF_1||AF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2||y_A|$, 解得 $|y_A| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

代入双曲线方程得 $x_A^2 = 1 + \frac{y_A^2}{2} = \frac{5}{3}$, 又因为点 A 在双曲线的右支上, 故 $x_A = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 故 B 正确;

由图知当点 A 在第一象限, $k_{AF_1} = \tan \angle AF_1F_2 = \frac{|AF_2|}{|AF_1|} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$,

由对称性可知, 若点 A 在第四象限, 则 $k_{AF_1} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, 故 C 不正确;

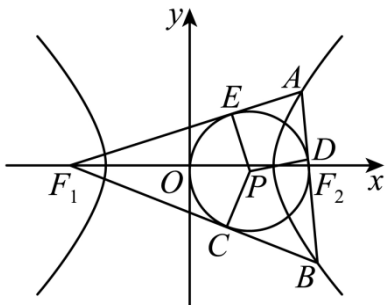
设 $\triangle ABF_1$ 的内切圆为 P , 圆 P 切 AF_1, AB, BF_1 于 E, D, C , 连接 PE, PD, PC

易得 $PE \perp AF_1, PD \perp AB, PC \perp BF_1$, $|PE| = |PD| = |PC|, |AE| = |AD|, |EF_1| = |CF_1|, |BD| = |CB|$,

四边形 $ADPE$ 是正方形,

故 $\triangle ABF_1$ 的内切圆半径 $r = \frac{1}{2}(|AF_1| + |AB| - |BF_1|)$
 $= \frac{1}{2}(|AF_1| + |AF_2| + |BF_2| - |BF_1|) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} - 1 - 2) = \sqrt{5} - 1,$

对应面积为 $\pi \cdot (\sqrt{5} - 1)^2 = (6 - 2\sqrt{5})\pi$, 故 D 正确.



故选: ABD

12. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC = 2AA_1 = 2$, E, F 为 BD_1 的两个三等分点, 点 P 是长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点, 则 ()

- A. $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$ B. $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为 2
 C. $\angle EPF$ 的最小值为 30° D. $\angle EPF$ 的最大值为 90°

【答案】BD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系, 得到 E, F 点的坐标, 分析出 P 位于长方体的四个侧面时情况相同, P 位于长方体的上下两个平面时情况相同, 分两种情况进行求解出 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$, 得到最值, 并分析出 $\angle EPF$ 的最大值, 举出反例得到 C 错误.

【详解】以 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AA_1 为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

因为 $AB = BC = 2AA_1 = 2$, 所以 $B(2, 0, 0), D_1(0, 2, 1)$,

不妨设 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD_1}$, 故 $E\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

由对称性可知: P 位于长方体的四个侧面时, 所处情况相同,

不妨设 $P(0, m, n), m \in [0, 2], n \in [0, 1]$,

则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3} - m, \frac{1}{3} - n\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3} - m, \frac{2}{3} - n\right) = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} - 2m + m^2 + \frac{2}{9} - n + n^2$

$$= (m-1)^2 + \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

故当 $m=1, n=\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}$, 此时

当 $m=0$ 或 $2, n=0$ 或 1 时, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为 2 ,

由对称性可知: P 位于长方体的上下两个平面时, 所处情况相同,

不妨设 $P(s, t, 0), s \in [0, 2], t \in [0, 2]$,

$$\begin{aligned} \text{则 } \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} &= \left(\frac{4}{3} - s, \frac{2}{3} - t, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - s, \frac{4}{3} - t, \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} - 2s + s^2 + \frac{8}{9} - 2t + t^2 + \frac{2}{9} \\ &= (s-1)^2 + (t-1)^2, \end{aligned}$$

故当 $s=1, t=1$ 时, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 0 ,

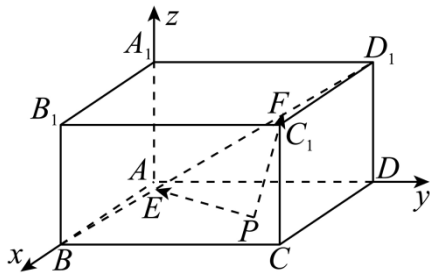
当 $s=0$ 或 $2, t=0$ 时, $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为 2 ,

综上: $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 $0, \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为 2 , A 错误, B 正确;

因为 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值为 0 , 故 $\cos \angle EPF$ 的最小值为 0 ,

因为 $\angle EPF \in [0, \pi]$, 所以 $\angle EPF$ 的最大值为 90° , D 正确;

当点 P 与点 B 重合时, 此时 $\angle EPF = 0^\circ$, C 错误.



故选: BD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知直线 $x + y - 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 求出圆心到直线的距离 d , 再由 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2}$ 计算可得.

【详解】 圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的圆心坐标为 $(0, 0)$, 半径 $r = 2\sqrt{2}$,

圆心到直线 $x + y - 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$,

所以 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$

故答案为: $2\sqrt{6}$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n \in \mathbf{Z}$, $a_4 = 1$, $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, a_n \text{ 为偶数,} \\ 3a_n + 1, a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】1 或 8

【解析】

【分析】根据递推关系, 对 a_3 分奇偶即可逐项求解得.

【详解】①若 a_3 为偶数, 则由 $a_4 = 1$ 可得 $a_4 = \frac{a_3}{2} \Rightarrow a_3 = 2$,

若 a_2 为偶数, 则由 $a_3 = 2$ 可得 $a_3 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow a_2 = 4$, 进而 $a_1 = \frac{a_2}{2} \Rightarrow a_1 = 8$ 或者 $a_2 = 3a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 1$, 均满足要求,

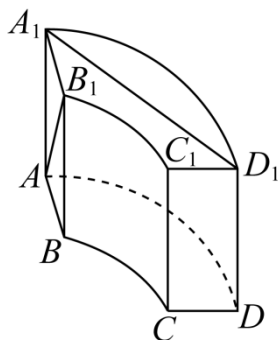
若 a_2 为奇数, 则由 $a_3 = 2$ 可得 $a_3 = 3a_2 + 1 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}$, 不符合要求, 舍去,

②若 a_3 为奇数, 则由 $a_4 = 1$ 可得 $a_4 = 3a_3 + 1 \Rightarrow a_3 = 0$, 不符合要求, 舍去,

综上 $a_1 = 8$ 或 $a_1 = 1$,

故答案为: 1 或 8

15. 在中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体, 该几何体的上下底面平行, 且均为扇环形 (扇环是指圆环被扇形截得的部分). 现有一个如图所示的曲池, AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 均与曲池的底面垂直, 且 $AA_1 = 2$, 每个底面扇环对应的两个圆的半径分别为 1 和 2, 对应的圆心角为 90° , 则直线 AB_1 与 A_1D_1 所成角的余弦值为_____.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/858043032043006023>