高中数学球与各种几何体切、接问题专题（一））

球与各种几何体切、接问题

近几年全国高考命题来看,这部分内容以选择题、填空题为主，大题很少见。

首先明确定义 1：若一个多面体的各顶点都在一个球的球面上，则称这个多面体是这个球的内接多面体，这个球是这个多面体的外接球。

定义 2：若一个多面体的各面都与一个球的球面相切， 则称这个多面体是这个球的外切多面体，这个球是这个多面体的内切球.

一、球与柱体的切接

规则的柱体，如正方体、长方体、正棱柱等能够和球进行充分的组合，以外接和内切两种形态进行结合，通过球的半径和棱柱的棱产生联系，然后考查几何体的体积或者表面积等相关问题.

1、 球与正方体

（1）正方体的内切球，如图 1. 位置关系：正方体的六个面都与一个球都相切，正方体中心与球心重合；

数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 2r a =.

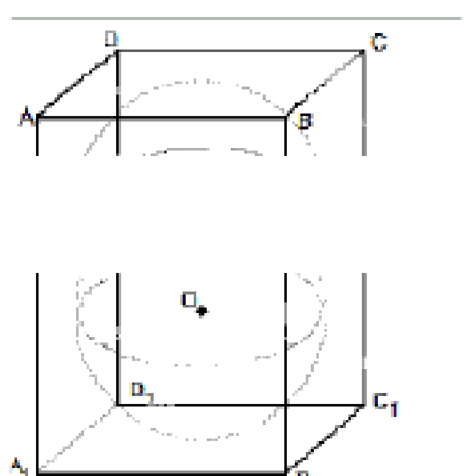


图1

（2）正方体的棱切球，如图 2. 位置关系：正方体的十二条棱与球面相切，正方体中心与球心重合；数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 22r a =

.

2

（3）正方体的外接球，如图 3. 位置关系：正方体的八个顶点在同一个球面上；正方体中心与球心重合；

数据关系：设正方体的棱长为 a ，球的半径为 r ，这时有 23r a =

.

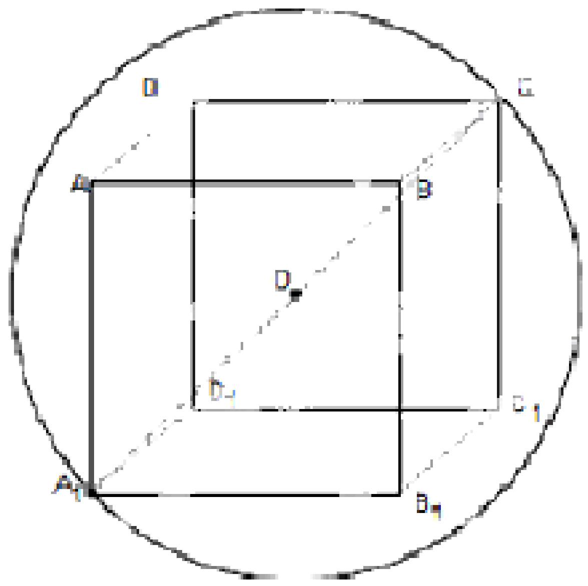


图 3

例 1 棱长为 1 的正方体 1111ABCD A B C D -的 8 个顶点都在球 O 的表面上，E F ，分别是棱

1AA ，1DD 的中点，则直线 EF 被球 O 截得的线段长为（ ）

A ．

22

B ．1

C ．212

+

D ．2

思路分析：由题意推出，球为正方体的外接球.平面 11AA DD 截面所得圆面的半径

12,22

AD R ==得知直线 EF 被球 O 截得的线段就是球的截面圆的直径.

2、 球与长方体

例 2 自半径为 R 的球面上一点 M ，引球的三条两两垂直的弦 MC MB MA ,,，求

222MC MB MA ++的值．

【解析】以 MA, MB , MC 为从一个顶点出发的三条棱，将三棱锥 $M-ABC$ 补成一个长方体，则另外四个

结论：长方体的外接球直径是长方体的对角线．

例 3（全国卷 I 高考题）已知各顶点都在一个球面上的正四棱柱高为 4，体积为 16，则这个球的表面积为（ ）.

A. 16π

B. 20π

C. 24π

D. 32π

思路分析：正四棱柱也是长方体.由长方体的体积 16 及高 4 可以求出长方体的底面边长为 2，可得长方体的长、宽、高分别为 2，2，4，长方体内接于球，它的体对角线正好为球的直径.

顶点必在球面上，故长方体是球的内接长方体，则长方体的对角线长是球的直径.

$\therefore MA^2+MB^2+MC^2=(2R)^2=4R^2$.

点评：此题突出构造法的使用，以及渗透利用分割补形的方法解决立体几何中体积计算．．

3、球与正棱柱

（1）结论 1：正棱柱的外接球的球心是上下底面中心的连线的中点．

（2）结论 2：直三棱柱的外接球的球心是上下底面三角形外心的连线的中点．

二、球与锥体的切接

规则的锥体，如正四面体、正棱锥、特殊的一些棱锥等能够和球进行充分的组合，以外接和内切两种形态进行结合，通过球的半径和棱锥的棱和高产生联系，然后考查几何体的体积或者表面积等相关问题.

1、正四面体与球的切接问题

（1）正四面体的内切球，如图 4.位置关系：正四面体的四个面都与一个球相切，正四面体的中心与球心重合；

数据关系：设正四面体的棱长为 a，高为 h；球的半径为 R，这时有

6

4

3

R h a

==；

—

例 4 正四面体的棱长为 a，则其内切球的半径为______．

【解析】如图正四面体 A－BCD 的中心为 O，即内切球球心，内切球半径 R 即为 O 到

正四面体各面的距离．∵AB＝a, ∴正四面体的高 h＝

6

3a，又 V A－BCD＝4V O－BCD，（ ）∴R＝

1

4h

＝

612

a．（2）正四面体的外接球，位置关系：正四面体的四个顶点都在一个球面上，正四面体的中心与球心重合；

数据关系：设正四面体的棱长为 a ，高为 h ；球的半径为 R ，这时有 43R h ==；

$\sqrt{3}$

（可用正四面体高 h 减去内切球的半径得到） 例 5 求棱长为 1 的正四面体外接球的半径。

设 SO 1 是正四面体 S - ABC 的高，外接球的球心 O 在 SO 1 上，设外接球半径为 R ，AO 1 = r ，

则在△ABC 中，用解直角三角形知识得 r = 3

3

， 从而 SO 1 = SA 2 - AO 21 =

1 - 1

3

= 23

， 在 Rt △AOO 1 中，由勾股定理得 R 2 = (

23 - R)2 + (33)2，解得 R = 64. 结论：正四面体的高线与底面的交点是△ABC 的中心且其高线通过球心，这是构造直角三角形解题的依据．此题关键是确定外接球的球心的位置，突破这一点此问题便迎刃而解，正四面体外接球的半径是正四面体高的 3

4，内切球的半径是正

四面体高的 1

4

.

（3） 正四面体的棱切球，位置关系：正四面体的六条棱与球面相切，正四面体的中心与球心重合；

数据关系：设正四面体的棱长为 a ，高为 h ；球的半径为 R ，这时有

6

432,.3

R h a h a ===

例 6

$CE=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$CG=\frac{2}{3}CE=\frac{\sqrt{3}a}{3}$，$EG=\frac{1}{3}CE=\frac{\sqrt{3}a}{6}$

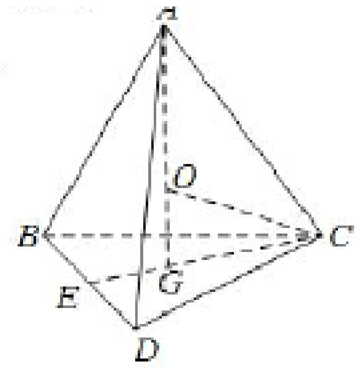
所以 $AG=\sqrt{AC^2-CG^2}=\frac{\sqrt{6}a}{3}$．

所以 $OG=\frac{\sqrt{6}a}{3}-R$

$Rt\triangle OCG$中，$OC^2=OG^2+CG^2$，即 $R^2=(\frac{\sqrt{6}a}{3}-R)^2+\frac{a^2}{3}$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}a}{4}$．

内切球半径 $r=OG=AG-AO=\frac{\sqrt{6}a}{3}-\frac{\sqrt{6}a}{4}=\frac{\sqrt{6}a}{12}$．

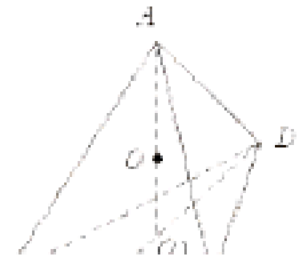
棱切球半径为 $OE=\sqrt{EG^2+OG^2}=\sqrt{\frac{a^2}{12}+\frac{a^2}{24}}=\frac{\sqrt{2}a}{4}$．



例 7 设正四面体中，第一个球是它的内切球，第二个球是它的外接球，求这两个球的表面积之比及体积之比．

思路分析：此题求解的第一个关键是搞清两个球的半径与正四面体的关系，第二个关键是两个球的半径之间的关系，依靠体积分割的方法来解决的．

所以 $\frac{\text{内切球的表面积}}{\text{外接球的表面积}}=\frac{4\pi r^2}{4\pi R^2}=\frac{1}{9}$，$\frac{\text{内切球的体积}}{\text{外接球的体积}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{27}$．



（4）为什么正四面体外接球和内切球心是同一个点？

点评：正四面体与球的接切问题，可通过线面关系证出，内切球和外接球的两个球心是重合的，为正四面体高的四等分点，　　那定有内切球的半径 $r=\frac{1}{4}h$（h 为正四面体的高），且外接球的半径 $R=3r$．

2.其它棱锥与球的切接问题

（1）球与正棱锥的组合，常见的有两类，一是球为三棱锥的外接球，此时三棱锥的各个顶点在球面上，根据截面图的特点，可以构造直角三角形进行求解.二是球为正棱锥的内切球，例如正三棱锥的内切球，球与正三棱锥四个面相切，球心到四个面的距离相等，都为球半径 R．这

样求球的半径可转化为球球心到三棱锥面的距离，故可采用等体积法解决，即四个小三棱锥的体积和为正三棱锥的体积.

（2）球与一些特殊的棱锥进行组合，一定要抓住棱锥的几何性质，可综合利用截面法、补形法等进行求解.

结论 1：正棱锥的外接球的球心在其高上，具体位置可通过计算找到．