初中数学联赛
考前辅导

主　编　熊　斌　冯志刚
参编者　张思汇　柯新立　陈建豪

华东师范大学出版社

前　言

preface

数学竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养数学探索能力和创新能力、开拓视野有着非常积极的作用.通过开展数学竞赛活动,可以更好地发现和培养优秀学生,让他们得到进一步发展,同时也能提高教师的教学和科研水平,促进教学改革.

“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”于每年4月份举行.本书是为准备参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”的同学编写的,辅导数学竞赛的老师也可以作为参考资料.许多同学在参加“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”前夕,都会碰到这样的问题:应该如何复习,选择什么书来看,找一些怎样的题来做,是否还有什么知识和内容没有复习到等等.为此,我们把“全国初中数学联赛”和“全国初中数学竞赛”中的一些重要知识和内容,重要的数学思想方法和解题技巧重新梳理和整合,精选了一些经典赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,为同学们在考前复习提供一本有效的参考资料,以提高学生的解题能力和应试能力.

书中每一讲包括4个部分:(1)知识梳理:主要着重介绍全国初中数学联赛(竞赛)的考试热点、难点及相关的拓展知识,以及该类问题一般的解题方法和特别的方法.(2)例题精讲:围绕全国初中数学联赛(竞赛)的考点、热点、难点,精选一些经典的赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,以启发学生的解题思路和解题方法,进而提高学生分析问题和解决问题的能力.(3)实战演练:有针对性地选择一些与该部分内容有关的新题和好题,以利于学生巩固强化.题目分A组、B组,A组题相对容易些,B组题有一定的难度.(4)参考答案:对实战演练题给出参考答案,供同学们参考.

本书最后给出了4套模拟试题供同学们考前模拟测试用,以检验同学们的综合能力.

参加本书编写的都是在数学竞赛命题和辅导第一线的教师,其中有国家队的领队和教练,有培养出多名国际数学奥林匹克金牌选手的教师,还有参与各级各类数学竞赛命题的专家.本书第一版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、徐惟简、黄诚、黄忠裕.第二版的编写者为熊斌、冯志刚、张思汇、柯新立、陈建豪.

熊　斌　冯志刚
2010年12月8日

目　录

contents

第 1 讲　实数及其绝对值	1
第 2 讲　代数式变形与求值	14
第 3 讲　根式	22
第 4 讲　不等式与不等式组	30
第 5 讲　方程	41
第 6 讲　函数综合问题	51
第 7 讲　面积问题与面积方法	64
第 8 讲　全等三角形	77
第 9 讲　相似三角形	84
第 10 讲　与圆有关的问题	94
第 11 讲　解三角形	106
第 12 讲　点共线和线共点	114
第 13 讲　一元二次方程的整数解	126
第 14 讲　灵活多样的整数问题	134
第 15 讲　同余及其应用	145
第 16 讲　组合杂题	154
模拟试题(一)	163
模拟试题(二)	171
模拟试题(三)	175
模拟试题(四)	180

第 1 讲　实数及其绝对值

【知识梳理】

1. 有理数　形如 $\frac{m}{n}$($n \neq 0$,且 m 与 n 是互质的整数)的数叫做有理数,或者称有限小数或循环小数为有理数.

2. 无理数　不能用分数(包括分母为 1 的情形)表示的数叫做无理数.或者称无限不循环小数为无理数.

3. 实数　有理数和无理数统称为实数.全体实数和数轴上的点一一对应.在实数集内进行加、减、乘、除(除数不为零)运算,其结果仍是实数.任一实数都可以开奇次方,其结果仍为实数;当被开方数为非负数时,可以开偶次方,其结果仍是实数.

实数有无穷多个,既没有最大的实数,也没有最小的实数.任意两个实数,可以比较大小.

设 a 为有理数,b 为无理数,则 $a+b$、$a-b$ 是无理数;当 $a \neq 0$ 时,ab、$\frac{a}{b}$、$\frac{b}{a}$ 也是无理数.

设 a、b、c、d 是有理数,x 为无理数,且 $a + cx = b + dx$,则 $a = b$,$c = d$.

4. 绝对值　一个实数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离,记作 $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a, & 当 a \geqslant 时, \\ -a, & 当 a < 0 时. \end{cases}$$

正数的绝对值是它的本身,负数的绝对值为它的相反数,零的绝对值是零.

5. 绝对值的性质

(1) $|a| \geqslant a$, $|a| \geqslant -a$;

(2) $|ab| = |a| \cdot |b|$;

(3) $|a^n| = |a|^n$(n 为正整数);

(4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$($b \neq 0$);

(5) $|a-b| = |b-a|$;

(6) $|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$;

(7) 若 $|a| = |b|$,则 $a = b$(当 a, b 同号时),或 $a = -b$(当 a, b 异号时);

(8) 若 $a > 0$,则

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a;\ |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a \text{ 或 } x \geqslant a.$$

【例题精讲】

【例 1】 若两个不同的实数 a、b 使得 a^2+b 和 $a+b^2$ 都是有理数,则称数对(a,b)是"和谐"的.

(1) 试找出一对无理数 a、b,使得(a,b)是"和谐"的;

(2) 证明:若(a,b)是"和谐"的,且 $a+b$ 是不等于 1 的有理数,则 a,b 都是有理数;

(3) 证明:若(a,b)是"和谐"的,且$\frac{a}{b}$是有理数,则 a,b 都是有理数.(2009 年上海市初中数学竞赛)

【解】 (1) 令 $a=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$,$b=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$,则(a,b)是"和谐"的.(本小题答案不是唯一的)

(2) 按题设 $(a^2+b)-(b^2+a)=(a-b)(a+b-1)$ 为有理数,记为 q.

因为 $a+b-1\neq 0$,且为有理数,所以 $a-b=\frac{q}{a+b-1}$ 为有理数.

又 $a+b$ 为有理数,所以 $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}$ 为有理数,$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}$ 为有理数.

(3) 记 $\frac{a}{b}=k$,按题设 k 为有理数,且 $k\neq 1$(因为 $a\neq b$).

若 $k=0$,则 $a=0$,$b=a^2+b$ 都为有理数.

当 $k\neq 0$ 时,$a=kb$,$a^2+b=b(k^2b+1)$,$b^2+a=b(b+k)$ 都是有理数.

若 $b=-k$,则 b 为有理数,$a=kb$ 也为有理数.

若 $b\neq -k$,则$\frac{k^2b+1}{b+k}=\frac{a^2+b}{b^2+a}$为有理数.

令 $\frac{k^2b+1}{b+k}=r$,则 $b(r-k^2)=1-rk$.

若 $r=k^2$,则 $k^3=1$,$k=1$ 导致矛盾.

所以 $r\neq k^2$,$b=\frac{1-rk}{r-k^2}$ 为有理数,进而 $a=kb$ 也为有理数.

【例 2】 设 a、b 及$\sqrt{a}+\sqrt{b}$都是整数,证明:$\sqrt{a}$及$\sqrt{b}$都是整数.

【分析】 欲证$\sqrt{a}$及$\sqrt{b}$都是整数,只需证明$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$都是有理数即可.

【证明】 先证一个引理:若 n 是正整数,且$\sqrt{n}$是有理数,则 n 是完全平方数.

设 $\sqrt{n}=\dfrac{p}{q}$，p、q 为互质的正整数，则 $nq^2=p^2$.

从而 $q^2\mid p^2$，$q\mid p$，故 $q=1$. 所以 $n=p^2$. 引理得证.

现在回到本题. 由题设知，a、b 为非负整数. 当 $a=0$ 或 $b=0$ 时，易知结论成立.

当 a、b 都是正整数时，由 $\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a}$ 两边平方，得

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+a,$$

所以
$$\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+a-b}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})},$$

由题设知，$\sqrt{a}$ 是有理数，结合引理知，a 是完全平方数，故 $\sqrt{a}$ 是整数. 同理 $\sqrt{b}$ 也是整数，于是命题得证.

说明　本题中的引理是一个非常重要的结论，我们在解题中常常要用到它，希望读者能够牢记.

【例 3】 设 a、b 是实数，对所有正整数 $n(\geqslant 2)$，a^n+b^n 都是有理数，证明：$a+b$ 是有理数.

【分析】 由题意，a^2+b^2，a^3+b^3，a^4+b^4，$\cdots$ 都是有理数. 而 a^n+b^n 有如下"递推关系"：

$$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n),$$

所以
$$a^4+b^4=(a+b)(a^3+b^3)-ab(a^2+b^2),$$
$$a^5+b^5=(a+b)(a^4+b^4)-ab(a^3+b^3),$$

从中解出 $a+b$ 即可.

【证明】 设 $x=a+b$，$y=ab$，则有

$$a^4+b^4=(a^3+b^3)x-(a^2+b^2)y,$$
$$a^5+b^5=(a^4+b^4)x-(a^3+b^3)y.$$

消去 y，得

$$\begin{aligned}&[(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2]x\\&=(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4),\end{aligned}$$

所以，当 $(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2\neq 0$，即 $ab(a-b)\neq 0$ 时，

$$x=\frac{(a^2+b^2)(a^5+b^5)-(a^3+b^3)(a^4+b^4)}{(a^2+b^2)(a^4+b^4)-(a^3+b^3)^2}$$

是有理数.

当 $ab(a-b)=0$ 时,若 a、b 全为 0,则结论成立;若 a、b 中恰有一个为 0,不妨设 $a=0$,则 $b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ 为有理数,从而 $a+b=b$ 为有理数;若 $a-b=0$,且 a、b 均不为 0,则

$$a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2-ab}=\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2+\dfrac{(a-b)^2-(a^2+b^2)}{2}}$$
$$=\frac{2(a^3+b^3)}{a^2+b^2}$$

是有理数.

从而命题得证.

说明　本题分析中给出的递推关系:$a^{n+2}+b^{n+2}=(a+b)(a^{n+1}+b^{n+1})-ab(a^n+b^n)$ 非常重要.遇到涉及 a^n+b^n 类型的问题时,利用这一递推关系,可以帮助我们解题.

【例 4】 $[x]$表示不超过实数 x 的最大整数,令 $\{x\}=x-[x]$.

(1) 找出一个实数 x,满足 $\{x\}+\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=1$;

(2) 证明:满足上述等式的 x,都不是有理数.(1990 年全国初中数学联赛)

【分析】 设 $[x]=m$, $\{x\}=\alpha$, $\left[\dfrac{1}{x}\right]=n$, $\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=\beta$,则 m、n 是整数,$0\leqslant\alpha$, $\beta<1$.

由题设 $\alpha+\beta=1$,所以 $x+\dfrac{1}{x}=m+n+\alpha+\beta=m+n+1$, $x^2-(m+n+1)x+1=0$, $x=\dfrac{1}{2}(m+n+1\pm\sqrt{(m+n+1)^2-4})$.

令 $m+n+1=3$,则 $x=\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$,再验证它满足$\{x\}+\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=1$.

【解】 (1) 取 $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$,则$\dfrac{1}{x}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,于是$\{x\}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\left\{\dfrac{1}{x}\right\}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,所以

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1.$$

(2) 设 $x=m+\alpha$, $\dfrac{1}{x}=n+\beta$,其中 m、n 是整数,$0\leqslant\alpha$, $\beta<1$.则 $\alpha+\beta=1$, $x+\dfrac{1}{x}=m+n+1$. 于是

$$x^2-(m+n+1)x+1=0,$$
$$x=\frac{1}{2}(m+n+1\pm\sqrt{(m+n+1)^2-4}).$$

当 $(m+n+1)^2=4$ 时，$x=\pm 1$，均不满足 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$.

当 $(m+n+1)^2>4$ 时，若

$$(m+n+1)^2-4=k^2,$$

其中 k 为正整数，则

$$(m+n+1-k)(m+n+1+k)=4.$$

由于 $m+n+1-k<m+n+1+k$，且 $m+n+1-k$ 与 $m+n+1+k$ 同奇偶，所以

$$\begin{cases}m+n+1-k=-2,\\ m+n+1+k=-2\end{cases} \text{或} \begin{cases}m+n+1-k=2,\\ m+n+1+k=2\end{cases}$$

均不可能. 故 $(m+n+1)^2-4$ 不是完全平方数，从而 x 是无理数.

说明　对于整系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，若 $\Delta=b^2-4ac(>0)$ 不是完全平方数，则它的根是无理根.

下面我们来讨论几个与绝对值有关的问题.

【例 5】 若实数 a、b 满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$，求 $S=2\sqrt{a}-3|b|$ 的取值范围.（1997 年全国初中数学联赛）

【分析】 利用已知条件分别消去 b、a，得 $21+5S=19\sqrt{a}$，$14-3S=19|b|$，再利用 $\sqrt{a}$ 与 $|b|$ 是非负数便可得 S 的取值范围.

【解】 由题设分别消去 b、a，得

$$21+5S=19\sqrt{a},$$
$$14-3S=19|b|.$$

而 $\sqrt{a}\geqslant 0$，$|b|\geqslant 0$，所以

$$\begin{cases}21+5S\geqslant 0,\\ 14-3S\geqslant 0,\end{cases}$$

所以
$$-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}.$$

反之，若 S 满足不等式 $-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}$，则易知存在 a、b 满足题设条件.

所以，所求的 S 的取值范围为 $-\frac{21}{5}\leqslant S\leqslant\frac{14}{3}$.

【例 6】 关于 x 的方程 $|x^2-2|x|+3|=2\sqrt{9-6x+x^2}-1$ 有几个实根？（1998

年全国高中理科班招生考试试题)

【解】 由于 $x^2-2|x|+3=(|x|-1)^2+2>0$，所以原方程可化为

$$x^2-2|x|+3=2|x-3|-1. \qquad ①$$

(1) 当 $x<0$ 时，方程①为 $x^2+2x+3=2(3-x)-1$，

即 $$x^2+4x-2=0,$$

解得 $$x=-2\pm\sqrt{6}.$$

结合 $x<0$，得 $x_1=-2-\sqrt{6}$.

(2) 当 $0\leqslant x<3$ 时，方程①为 $x^2-2x+3=2(3-x)-1$，即 $x^2=2$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$.

结合 $0\leqslant x<3$，得 $x_2=\sqrt{2}$.

(3) 当 $x\geqslant 3$ 时，方程①为 $x^2-2x+3=2(x-3)-1$，即 $x^2-4x+10=0$，此方程无实根.

综上所述，原方程有两个实根.

说明 在解答与绝对值有关的方程和不等式时，常常需要把绝对值符号先去掉，于是，我们就必须分几种情况来讨论. 这是我们处理含绝对值的方程和不等式的常用方法.

【例7】 求使方程

$$|x-1|-|x-2|+2|x-3|=c$$

恰好有两个解的所有实数 c.(1997 年全国高中理科班招生考试试题)

【解】 先作出 $y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|$ 的图象. 由

$$y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|=\begin{cases}-2x+5, & \text{当 } x<1 \text{ 时},\\ 3, & \text{当 } 1\leqslant x<2 \text{ 时},\\ -2x+7, & \text{当 } 2\leqslant x<3 \text{ 时},\\ 2x-5, & \text{当 } x\geqslant 3 \text{ 时},\end{cases}$$

可得图象如图 1-1 所示：

从图 1-1 中可知，当且仅当 $1<c<3$ 或 $c>3$ 时，$y=c$ 的图象与 $y=|x-1|-|x-2|+2|x-3|$ 有两个不同的交点. 所以，所求的 c 为 $1<c<3$ 或 $c>3$.

说明 本题解答所用的方法是"数形结合法". 通过函数的图象，可以"直观"地解决问题. 本题也可以通过分类讨论的方法解决. 请读者自己试一试.

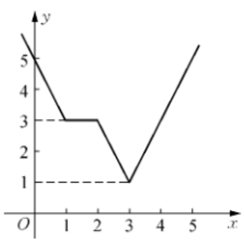


图 1-1

【例 8】 已知实数 a、b、c 满足不等式

$$|a| \geqslant |b+c|,\ |b| \geqslant |c+a|,\ |c| \geqslant |a+b|,$$

求证：$a+b+c=0$.（2000 年上海市高中理科班、数学班招生考试试题）

【证明】 由题设，对三个不等式两边平方，得

$$a^2 \geqslant b^2+2bc+c^2,$$
$$b^2 \geqslant c^2+2ca+a^2,$$
$$c^2 \geqslant a^2+2ab+b^2,$$

把上面三个不等式相加，便得

$$0 \geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$

即 $$(a+b+c)^2 \leqslant 0,$$

所以 $$a+b+c=0.$$

说明 两边平方，这也是去掉绝对值符号的一个常用方法. 需要注意的是，在两边平方前，先观察一下两边是否都是非负的.

【例 9】 已知实数 a、b、c 满足：$a+b+c=2$，$abc=4$.

(1) 求 a、b、c 中的最大者的最小值；

(2) 求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值.（2003 年全国初中数学竞赛）

【解】 (1) 不妨先设 $a=\max\{a, b, c\}$，再求 a 的最小值. 由题设知 $a>0$，且

$$b+c=2-a,\ bc=\frac{4}{a}.$$

因为 $(b+c)^2 \geqslant 4bc$，所以

$$(2-a)^2 \geqslant 4 \cdot \frac{4}{a},$$
$$a^3-4a^2+4a-16 \geqslant 0,$$
$$(a^2+4)(a-4) \geqslant 0,$$

所以，$a \geqslant 4$.

又当 $a=4$，$b=c=-1$ 时，满足题设条件. 所以 a 的最小值为 4，即 a、b、c 中的最大者的最小值为 4.

(2) 因为 $abc=4>0$，所以 a、b、c 为全大于 0 或一正二负.

若 a、b、c 均大于 0，由(1)知，a、b、c 中的最大者不小于 4，这与 $a+b+c=2$ 矛盾.

若 a、b、c 为一正二负，不妨设 $a>0$，$b<0$，$c<0$. 则

$$|a|+|b|+|c|=a-b-c=a-(2-a)=2a-2,$$

由(1)知，$a \geqslant 4$，所以

$$|a|+|b|+|c| \geqslant 2\times 4-2=6,$$

当 $a=4$，$b=c=-1$ 时等号成立.

故$|a|+|b|+|c|$的最小值为 6.

【实战演练】

A 组

一、选择题

1. 若 $|(3a-b-4)x|+|(4a+b-3)y|=0$，且 $xy\neq 0$，则$|2a|-3|b|$等于(　　). (1999 年全国高中理科班招生考试试题)

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

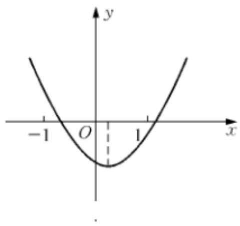
2. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，并设 $M=|a+b+c|-|a-b+c|+|2a+b|-|2a-b|$，则(　　). (2002 年全国初中数学联赛)

(A) $M>0$

(B) $M=0$

(C) $M<0$

(D) 不能确定 M 为正、为负或为 0



(第 2 题图)

3. 若 a、b、c 均为整数且满足 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$，则 $|a-b|+|b-c|+|c-a|=$(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

4. 已知 $\frac{1}{a}-|a|=1$，那么代数式$\frac{1}{a}+|a|$的值为(　　). (1999 年全国初中数学竞赛)

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　(B) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　(C) $-\sqrt{5}$　　(D) $\sqrt{5}$

5. 有下列三个命题：

(甲) 若 α、β 是不相等的无理数，则 $\alpha\beta+\alpha-\beta$ 是无理数.

(乙) 若 α、β 是不相等的无理数，则$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$是无理数；

(丙) 若 α、β 是不相等的无理数，则$\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}$是无理数.

其中正确命题的个数是(　　). (1999 年全国初中数学联赛)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

二、填空题

6. 如果实数 a、b 满足条件 $a^2+b^2=1$，$|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$，则 $a+b=$

________.

7. 已知关于 x 的方程 $|a|x=|a+1|-x$ 的解为 1，那么，有理数 a 的取值范围是________；若关于 x 的方程 $|a|x=|a+1|-x$ 的解是 0，则 a 的值是________.（1997 年"希望杯"数学邀请赛）

8. 若关于 x 的方程 $|1-x|=mx$ 有解，则实数 m 的取值范围是________.（2000 年上海市初中数学竞赛）

三、解答题

9. a、b 为有理数，且 $|a|>0$，方程 $||x-a|-b|=3$ 有三个不相等的解，求 b 的值.（第七届"华罗庚杯"少年数学邀请赛决赛）

10. 令 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{ab}{|ab|}$，求 x 的最大值与最小值的和.（第八届"华罗庚杯"少年数学邀请赛决赛）

11. 已知实数 a、b 满足 $a^2+ab+b^2=1$，且 $t=ab-a^2-b^2$，求 t 的取值范围.

B 组

12. 已知实数 a、b、c、d 互不相等，且 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$，求 x 的值.（2003 年全国初中数学联赛）

13. 有一无限小数 $A=0.a_1a_2a_3a_4\cdots$，其中 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 是 $0,1,2,\cdots,9$ 中的一个，并且 a_1 是奇数，a_2 是偶数，a_3 等于 a_1+a_2 的个位数，a_4 等于 a_2+a_3 的个位数，…，a_{n+2} 是 a_n+a_{n+1} 的个位数$(n=1,2,\cdots)$. 证明：A 是有理数.

14. 如果在小数点后依次写出一切正整数，得到一无限小数：

$$A=0.123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\cdots,$$

证明：A 是无理数.

15. 设 x、y、z 是任意实数，证明恒等式

$$||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z=4\max\{x,y,z\}.$$

其中 $\max\{x,y,z\}$ 表示 x、y、z 的最大值.

16. 设有理数 x、y 满足等式

$$x^5+y^5=2x^2y^2,$$

证明：$1-xy$ 是有理数的平方.

17. 是否存在这样的实数 a 和 b，使得对每个正整数 $n\geqslant 2$，

(1) $a+b$ 是有理数，而 a^n+b^n 是无理数；

(2) $a+b$ 是无理数，而 a^n+b^n 是有理数.

18. 设 n 个互不相同的有理数，任意两个不同数的乘积均是整数. 证明：任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 个不同数的乘积也是整数.

【参考答案】

1. A.

由题设得 $\begin{cases}3a-b-4=0,\\4a+b-3=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$, $b=-1$，所以 $|2a|-3|b|=-1$.

2. C.

由图象可知 $a>0$, $0<-\dfrac{b}{2a}<1$，所以得 $b<0$, $2a+b>0$, $2a-b>0$. 又 $x=-1$ 时，$a-b+c>0$；当 $x=1$ 时，$a+b+c<0$，故

$$\begin{aligned}M&=-(a+b+c)-(a-b+c)+(2a+b)-(2a-b)\\&=-2(a-b+c)<0.\end{aligned}$$

3. B.

因为 a、b、c 均为整数，所以 $a-b$ 和 $a-c$ 均为整数，从而由 $(a-b)^{10}+(a-c)^{10}=1$ 可得

$$\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1.\end{cases}$$

若 $\begin{cases}|a-b|=1,\\|a-c|=0,\end{cases}$ 则 $a=c$，从而

$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-b|+|b-a|+|a-a|=2|a-b|=2.$

若 $\begin{cases}|a-b|=0,\\|a-c|=1,\end{cases}$ 则 $a=b$，从而

$|a-b|+|b-c|+|c-a|=|a-a|+|a-c|+|c-a|=2|a-c|=2.$

因此，
$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=2.$$

4. D.

由题设知，a、$\dfrac{1}{a}$ 都是正数，所以由 $\left(\dfrac{1}{a}-|a|\right)^2=1$，得 $\dfrac{1}{a^2}+|a|^2=3$，$\left(\dfrac{1}{a}+|a|\right)^2=5$，$\dfrac{1}{a}+|a|=\sqrt{5}$.

5. A.

因为 $\alpha\beta+\alpha-\beta=(\alpha-1)(\beta+1)+1$，令 $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=-1+\sqrt{2}$，则 $\alpha\beta+\alpha-\beta=3$ 为有理数，故(甲)不对.

令 $\alpha=2\sqrt{2}$，$\beta=\sqrt{2}$，则$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1}{3}$ 是有理数，故(乙)不对.

又令 $\alpha=\sqrt[3]{2}$，$\beta=-\sqrt{2}$，则$\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}=0$ 为有理数，故(丙)不对.

6. -1.

因为 $a^2+b^2=1$，所以 $-1\leqslant a\leqslant 1$，$-1\leqslant b\leqslant 1$. 由 $|1-2a+b|+2a+1=b^2-a^2$ 可得 $|1-2a+b|=b^2-a^2-2a-1=1-a^2-a^2-2a-1=-2a^2-2a$，从而 $-2a^2-2a\geqslant 0$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 0$.

从而 $1-2a+b\geqslant 0$，因此 $1-2a+b=-2a^2-2a$，即 $1+b=-2a^2=-2(1-b^2)$，整理得 $2b^2-b-3=0$，解得 $b=-1$(另一根 $b=\frac{3}{2}$ 舍去).

把 $b=-1$ 代入 $1+b=-2a^2$ 计算可得 $a=0$，所以 $a+b=-1$.

7. $a\geqslant 0$；-1.

8. $m<-1$ 或 $m\geqslant 0$.

当 $x<1$ 时，$1-x=mx$，$(m+1)x=1$，$x=\frac{1}{m+1}$. 所以，$\frac{1}{m+1}<1$，$\frac{m}{m+1}>0$，得 $m>0$ 或 $m<-1$；当 $x\geqslant 1$ 时，$x-1=mx$，$(1-m)x=1$，$x=\frac{1}{1-m}$. 所以，$\frac{1}{1-m}\geqslant 1$，$\frac{m}{m-1}\leqslant 0$，$0\leqslant m<1$. 而当 $m=0$ 时，方程显然有解. 故 m 的取值范围是 $m<-1$ 或 $m\geqslant 0$.

9. $b=3$.

原方程可化为 $|x-a|-b=\pm 3$，即 $|x-a|=b\pm 3$. 若 $b-3$ 与 $b+3$ 均大于 0，则原方程的解为 $a\pm(b+3)$，$a\pm(b-3)$，易知这 4 个解两两不同；若 $b-3$ 与 $b+3$ 中恰有一个为 0，则当 $b-3=0$ 时，原方程有 3 个解，$b+3=0$ 时，原方程只有一解；若 $b-3$ 与 $b+3$ 中有小于 0 的，则原方程的解少于 3 个. 故 $b=3$.

10. 2.

当 a、b 均大于 0 时，$x=3$；当 a、b 均小于 0 时，$x=-1$；当 $a>0$，$b<0$ 或 $a<0$，$b>0$ 时，$x=-1$. 所以 x 的最小值为 -1，最大值为 3.

11. $-3\leqslant t\leqslant -\frac{1}{3}$.

$t=ab-a^2-b^2=ab-(1-ab)$，所以 $ab=\frac{t+1}{2}$. 又 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=1+ab=\frac{t+3}{2}$，所以 $t+3\geqslant 0$，$t\geqslant -3$.

因为 $(a+b)^2\geqslant 4ab$，所以 $\frac{t+3}{2}\geqslant 4\cdot\frac{t+1}{2}$，得 $t\leqslant -\frac{1}{3}$.

所以，t 的取值范围为 $-3\leqslant t\leqslant -\frac{1}{3}$.

12. $\pm\sqrt{2}$.

由题设有

$$a+\frac{1}{b}=x, \quad ①$$

$$b+\frac{1}{c}=x, \quad ②$$

$$c+\frac{1}{d}=x, \quad ③$$

$$d+\frac{1}{a}=x. \quad ④$$

由①得 $b=\dfrac{1}{x-a}$,代入②,得 $c=\dfrac{x-a}{x^2-ax-1}$,再代入③,得

$$dx^3-(ad+1)x^2-(2d-a)x+ad+1=0. \quad ⑤$$

由④得 $ad+1=ax$,代入⑤,得

$$(d-a)(x^3-2x)=0,$$

所以

$$x(x^2-2)=0.$$

若 $x=0$,则 $c=\dfrac{-a}{-1}=a$,与已知条件矛盾. 所以 $x^2-2=0$,即 $x=\pm\sqrt{2}$.

13. 由题设条件可知 A 的各位数字有如下规律:

$$A=0.\text{奇偶奇奇偶奇奇偶奇}\cdots$$

每一个非负有序整数对(奇,偶,奇)有 $5\times5\times5=125$ 种不同的数对. 因此在前 126 个这样的数对中至少有两对相同,所以 A 是一个循环小数,即 A 是有理数.

14. 假设 A 是有理数,则 A 是循环小数,且循环节是从第 m 位后开始,由 n 位数码组成的. 考虑数 $100\cdots0$(共 $m+2n$ 个 0),它必在 A 中出现,于是 $00\cdots0$(共 $m+2n$ 个 0)中至少有一个循环节,即循环节的所有数码为 0,不可能.

15. 记恒等式的左端为 A.

(1) 若 $x=\max\{x, y, z\}$,则 $x\geqslant y$, $x\geqslant z$, 于是

$$\begin{aligned}A&=|x-y+x+y-2z|+x-y+x+y+2z\\&=2|x-z|+2x+2z=2x-2z+2x+2z\\&=4x.\end{aligned}$$

(2) 若 $y=\max\{x, y, z\}$,则 $y\geqslant x$, $y\geqslant z$, 于是

$$\begin{aligned}A&=|y-x+x+y-2z|+y-x+x+y+2z\\&=2(y-z)+2y+2z=4y.\end{aligned}$$

(3) 若 $z=\max\{x, y, z\}$,则 $z\geqslant x$, $z\geqslant y$,于是

$$\begin{aligned}A&=|2\max\{x, y\}-2z|+2\max\{x, y\}+2z\\&=2z-2\max\{x, y\}+2\max\{x, y\}+2z\\&=4z.\end{aligned}$$

16. 若 $xy=0$,则 $1-xy=1$,结论成立.

若 $xy\neq 0$,则利用条件,可得 $1-xy=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2$,结论也成立.

17. (1) 存在.例如,取 $a=2+\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$,则 $a+b=2$ 是有理数,而 $a^n+b^n=(2+\sqrt{2})^n+(-\sqrt{2})^n$ 是无理数.

(2) 不存在.参见例题 3.

18. 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_k 是给定的有理数中的任意 k 个.若 k 是偶数,则

$$a_1a_2\cdots a_k=(a_1a_2)\cdot\cdots\cdot(a_{k-1}a_k)$$

显然是整数.

若 k 是奇数,因为

$$(a_1a_2\cdots a_k)^2=(a_1a_k)(a_2a_{k-1})\cdots(a_ka_1)$$

是整数,而 $a_1a_2\cdots a_k$ 是有理数,由例题 2 的引理知,$a_1a_2\cdots a_k$ 是整数.

第 2 讲 代数式变形与求值

【知识梳理】

进入中学以来，由于字母代替数字的概念的引入，对数学的认知也经历了一个飞跃．对应于数的四则运算，代数式的变形与计算也是代数学科中最基础的部分．熟练而富有技巧地进行代数式变形、化简并保持高正确率是学好数学的必要条件．

代数式变形主要包括对多项式、分式、根式进行的变形，本讲主要向读者介绍一些多项式及分式变形的方法．

【例题精讲】

【例 1】 已知实数 a、b、x、y 满足 $a+b=x+y=2$，$ax+by=5$，求 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)$ 的值．

【解】 由 $a+b=x+y=2$，得 $(a+b)(x+y)=ax+by+ay+bx=4$．

因为 $ax+by=5$，所以

$$ay+bx=-1.$$

因而，

$$(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=(ay+bx)(ax+by)=-5.$$

【例 2】 已知 $\dfrac{x}{y+z+u}=\dfrac{y}{z+u+x}=\dfrac{z}{u+x+y}=\dfrac{u}{x+y+z}$，求 $\dfrac{x+y}{z+u}+\dfrac{y+z}{u+x}+\dfrac{z+u}{x+y}+\dfrac{u+x}{y+z}$ 的值．

【解】 由题设得 $\dfrac{x+y+z+u}{y+z+u}=\dfrac{x+y+z+u}{z+u+x}=\dfrac{x+y+z+u}{u+x+y}=\dfrac{x+y+z+u}{x+y+z}$．

(1) 若 $x+y+z+u\neq 0$，则由上式可得 $x=y=z=u$，从而

$$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=1+1+1+1=4.$$

(2) 若 $x+y+z+u=0$，则 $x+y=-(z+u)$，$y+z=-(u+x)$，从而

$$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4.$$

【例 3】 求下式的值：$\dfrac{1^2}{1^2-100+5000}+\dfrac{2^2}{2^2-200+5000}+\cdots+\dfrac{99^2}{99^2-9900+5000}$．