第五章勒让德函数及其应用

§1勒让德方程及其本征值问题

亥姆霍兹方程: $\nabla^2 V + \lambda V = 0$ 在球系分离变量的成果

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+(\mu-\frac{m^2}{\sin^2\theta})\Theta=0$$

连带勒让德方程

从数学上看，当$u=u\,(r,\theta)=R\,(r)\Theta(\theta)$时 $\rightarrow$ $m^2=0$,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta})+\mu\Theta=0$$

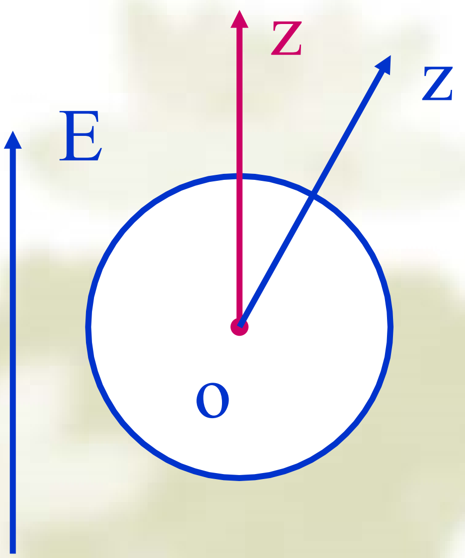
勒让德方程

从物理上看，$u(r,\theta)$代表的是一种对z轴具有旋转对称性的场。

例：一导体球放入均匀电场中，求球外电位分布。

当z轴选任意方向时，$u=u(r,\theta,\phi)$

当z轴选为电场方向时，$u=u(r,\theta)$



$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 \le r < a,\ 0 \le \theta \le \pi$$

设 $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ 代入方程得:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}) + \mu\Theta = 0 \\ r^2 R'' + 2rR' - \mu R = 0 \end{cases}$$

勒让德方程

欧拉型方程

一、勒让德方程的本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta})+\mu\Theta=0 \quad 0\le\theta\le\pi \\ \left|\Theta(\theta)\big|_{\theta=0,\pi}\right|<\infty \end{cases} \qquad ①$$

为了求解以便，作变量变换：

$$x=\cos\theta,\quad dx=-\sin\theta d\theta,\qquad \Theta(\theta)\to y(x)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+\mu y=0 \quad -1\le x\le 1 \\ \left|y(x)\big|_{x=\pm1}\right|<\infty \end{cases} \qquad ②$$

二、勒让德方程的级数解

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0 \qquad ②$$

理论根据：

若$P(x)$、$Q(x)$在$|x-x_0|<R$内解析，则方程

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=0$$

在$|x-x_0|<R$内的解一定是解析的。

将②中方程原则化：

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y'(x) + \frac{\mu}{1-x^2} y(x) = 0$$

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad Q = \frac{\mu}{1-x^2}$$ 在|x|<1内解析

∴ |x|<1内解$y(x)$一定是解析的

由泰勒定理：y(x)一定可展为：

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \qquad |x| < 1$$

将级数解代入: $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\mu y=0$$

$$C_{k+2}=\frac{k(k+1)-\mu}{(k+2)(k+1)}C_k \qquad k=0,1,2\cdots\cdots \qquad ③$$

③为一种递推公式，其功能为

$$\left.\begin{array}{l} C_0\to C_2\to C_4\to\cdots\cdots C_{2j} \\ \\ C_1\to C_3\to C_5\to\cdots\cdots C_{2j+1} \end{array}\right\} j=1,2\cdots\cdots$$

偶次幂系数

奇次幂系数

$$\therefore y(x)=C_0y_0(x)+C_1y_1(x) \qquad ④$$

推导C_{2j}的一般体现式：

$$C_{k+2}=\frac{k(k+1)-\mu}{(k+2)(k+1)}C_k$$

③中令k=0 $\quad C_2=\frac{-\mu}{2\times1}C_0$

令k=2 $\quad C_4=\frac{2\times3-\mu}{4\times3}C_2=\frac{2\times3-\mu}{4\times3}\frac{-\mu}{2\times1}C_0$

令k=4 $\quad C_6=\frac{4\times5-\mu}{6\times5}C_4=\frac{(4\times5-\mu)(2\times3-\mu)(-\mu)}{6\times5\times4\times3\times2\times1}C_0$

令k=2j-2

$$C_{2j}=\frac{[(2j-2)(2j-1)-\mu][(2j-4)(2j-3)-\mu]\text{L L}[-\mu]}{(2j)!}C_0$$

$$j=1,2\text{L L}$$

同理得:

$$C_{2j+1}=\frac{\left[(2j-1)2j-\mu\right]\left[(2j-3)(2j-2)-\mu\right]\cdots\cdots[2-\mu]}{(2j+1)!}C_1$$

$$j=1,2\cdots\cdots$$

$$y(x)=C_0+\sum_{j=1}^{\infty}C_{2j}x^{2j}+C_1x+\sum_{j=1}^{\infty}C_{2j+1}x^{2j+1}$$

$$=C_0+C_0\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left[(2j-2)(2j-1)-\mu\right]\cdots\cdots[-\mu]}{(2j)!}x^{2j}$$

$$+C_1x+C_1\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left[(2j-1)2j-\mu\right]\cdots\cdots[2-\mu]}{(2j+1)!}x^{2j+1}$$

$$\therefore y(x)=C_0 y_0(x)+C_1 y_1(x) \qquad ④$$

C_0 ,C_1为两个任意常数，y_0 ,y_1为两个线性无关的特解

∴④是方程 $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\mu y=0$ 的通解

解的收敛性：

i） $|x|<1$ ，$y_0(x)$、$y_1(x)$均收敛 （定理）

ii) $x=\pm 1$

当$\mu \neq l(l+1)$时，y_0, y_1 均为发散的无穷级数。

当$\mu=l(l+1)$时 $$C_{k+2}=\frac{(k+l+1)(k-l)}{(k+1)(k+2)}C_k$$

当 $k<l$ 时，上面递推可进行：

当 $k=l$ 时 ，$C_{l+2}=0$ $C_{l+4}=C_{l+6}=\ldots\ldots=0$

$y_0(x)$或$y_1(x)$的前有限项不为零

当$l=2j$时， $C_{2j+2}=C_{2j+4}=\ldots\ldots=0$

$\mu=2j(2j+1)$ $y_0(x)$断为2j次的多项式

$$y_0(x)=C_0+C_2x^2+\cdots\cdots C_{2j}x^{2j}$$

$y_1(x)$仍为发散的无穷级数

当l=2j+1时， μ=(2j＋1)(2j+2)

$$C_{2j+3}=C_{2j+5}=\cdots\cdots=0$$

$y_1(x)$中断为2j+1次的多项式

$$y_1(x)=C_1x+C_3x^3+\cdots\cdots C_{2j+1}x^{2j+1}$$

$y_0(x)$仍为发散的无穷级数

总之,当$\mu_l=l(l+1)$时，两个特解之一退化为l次多项式。这l次多项式就是勒让德本征值问题的解。

令另一种发散的无穷级数特解前的系数为零

将本征函数取为P $_l$(x) = 常量y $_l$(x)，

并使最高次幂项x^{l}的系数为 $$C_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2}$$

然后利用递推公式 $$C_{k+2} = \frac{k(k+1)-\mu_l}{(k+2)(k+1)} C_k$$

反推：$$C_k = \frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)-\mu_l} C_{k+2} \qquad \mu_l = l(l+1)$$

得：$$C_{l-2r} = (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} C_l$$

$$\therefore P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r}$$

证明：利用二项式定理

$$(a+b)^l=\sum_{r=0}^{l}\frac{l!}{r!(l-r)!}a^{l-r}b^r$$

$$\therefore (x^2-1)^l=\sum_{r=0}^{l}\frac{l!}{r!(l-r)!}(x^2)^{l-r}(-1)^r$$

$$=\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r l!x^{2l-2r}}{r!(l-r)!}$$

$$\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^l\right]=\sum_{r=0}^{l}\frac{(-1)^r l!}{r!(l-r)!}\frac{d^l}{dx^l}x^{2l-2r}$$

$$=\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}\frac{(-1)^r l!}{r!(l-r)!}(2l-2r)(2l-2r-1)\cdots(2l-2r-l+1)x^{2l-2r-l}$$

$$=\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}\frac{(-1)^r l!(2r-2l)!}{r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

$$\therefore\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\left[(x^2-1)^l\right]=\sum_{r=0}^{[\frac{l}{2}]}\frac{(-1)^r(2r-2l)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}=P_l(x)$$ 证毕

给出了勒让德函数除多项式定义之外的另一种体现形式

解释：

- $[l/2]$代表不不小于$l/2$ 的最大整数

∵r=0时，$C_{l-2r}=C_l$，是最高次幂系数，

r 越大，l-2r 越小

为确保$l-2r\geq0$ 即 $2r\leq l$ $r\leq l/2$

$$r_{\max}=\begin{cases} l/2 & l\text{偶} \quad 2r=l \\ (l-1)/2 & l\text{奇} \quad 2r=l-1 \end{cases}$$

- l=偶数时，$P_l(x)$是偶次多项式

l=奇数时，$P_l(x)$是奇次多项式

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

给出前几阶勒让德多项式：

$$l=0\quad P_0(x)=\sum_{r=0}^{0}\frac{(-1)^0(0-0)!}{2^0 0!(0-0)!(0-0)!}x^{0-0}=1$$

$$l=1\quad P_1(x)=\sum_{r=0}^{0}\frac{(-1)^0(2\times1-0)!}{2^1 0!(1-0)!(1-0)!}x^{1-0}=x$$

$$l=2\quad P_2(x)=\frac{(-1)^0(2\times2-0)!}{2^2 0!(2-0)!(2-0)!}x^{2-0}+\frac{(-1)^1(2\times2-2\times1)!}{2^2 1!(2-1)!(2-2)!}x^{2-2}$$

$$=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

三、勒让德本征值问题的解

本征值：$\mu_l = l(l+1)$　　$l = 0,1,2\mathrm{L}\ \mathrm{L}$

本征函数：$P_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \dfrac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r}$

同理：
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right) + \mu\Theta = 0 \\ \left|\Theta(\theta)\big|_{\theta=0,\pi}\right| < \infty \end{cases}$$

解为：
$$\begin{cases} \mu_l = l(l+1) \\ \Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta) \quad l = 0,1,2\mathrm{L}\ \mathrm{L} \end{cases}$$

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

给出前几阶勒让德多项式：

$l=0 \quad P_0(x)=1$

$P_0(\cos\theta)=1$

$l=1 \quad P_1(x)=x$

$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$

$l=2 \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$

直角系

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad 0 < x < l \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases} \qquad ①$$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2 \\ X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi}{l}x \quad n = 1,2L\;L \end{cases}$$

球系

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right] + \mu y = 0 \quad -1 < x < 1 \\ \left| y(x)\big|_{x=\pm 1} \right| < \infty \end{cases} \qquad ②$$

$$\begin{cases} \mu_l = l(l+1) \\ P_l(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{[l/2]} (-1)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!} x^{l-2r} \end{cases} \qquad l = 0,1,2L\;L$$

$$P_l(x)=\sum_{r=0}^{[l/2]}(-1)^r\frac{(2l-2r)!}{2^l r!(l-r)!(l-2r)!}x^{l-2r}$$

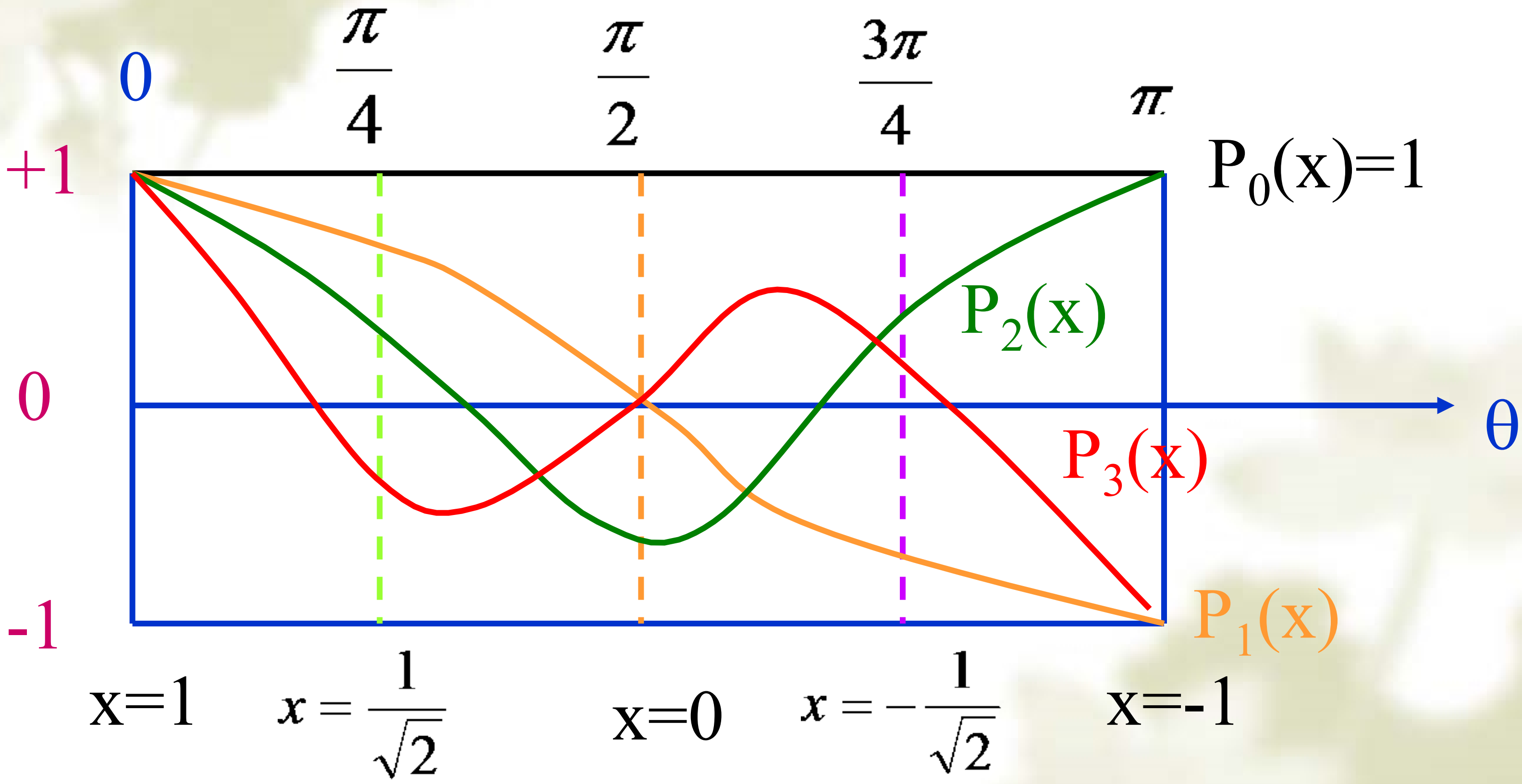
四、勒让德函数系 $\{P_l(x)\}$ 的性质

1.奇偶性

$$P_l(-x)=(-1)^l P_l(x)\rightarrow\begin{cases}P_l(-x)=P_l(x) & l=\text{偶}\\ P_l(-x)=-P_l(x) & l=\text{奇}\end{cases}$$

2. $P_l(x)$的取值

$$x = \cos\theta$$



i) 值域：$|P_l(x)| \le 1$　$P_l(x)$ 为一有界函数

定义域：$|x| \le 1$

ii) $P_l(x)$ 有l个分立的零点

iii) $P_l(0) = \begin{cases} 0 & l = 2n+1 \\ \dfrac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} & l = 2n \end{cases}$　　$n = 0,1,2\cdots$

iv）端点值

$P_l(1) = 1$　　$P_l(-1) = (-1)^l$

3. $P_l(x)$的微分体现式—罗巨格公式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l\,l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

4. 积分性质

若$f(x)$是k次多项式　$f(x)=a_kx^k+\cdots\cdots a_1x+a_0$

且$k<l$，则 $(f,P_l)=0$　，x∈[-1 , 1]

证明：不失一般性，设$f(x)$为实函数

$$(f,P_l)=\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx$$

$$=\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{1} f(x)d\,\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l$$

分部积分一次：

$$=\frac{1}{2^l l!}\left[f(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{1} f^1(x)\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l dx \right]$$

分部积分k次：

$$= \frac{(-1)^k}{2^l l!} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(x) \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} (x^2-1)^l \, dx$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^l l!} \left[f^{(k)}(x) \frac{d^{l-k-1}}{dx^{l-k-1}} (x^2-1)^l \right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 0$$

特例： $\int_{-1}^{1} x^k P_l(x) dx = 0 \quad k < l$

全部k次多项式(k<*l*) f (x)与P$_l$(x)在[-1,1]上正交

5. $\{P_l(x)\}$是 $x \in [-1,1]$ 上的正交完备系

正交归一性： $(P_k, P_l) = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}$

完备性：

对于定义在[-1,1]上具有一、二阶连续导数的函数$f(x)$均可按 $\{P_l(x)\}$ 展为绝对且一致收敛的广义付氏级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l P_l(x)$$

$$C_l=\frac{(P_l,f(x))}{(P_l,P_l)}=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)P_l(x)dx$$

或 $$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l P_l(\cos\theta)$$

$$C_l=\frac{(P_l,f(\theta))}{(P_l,P_l)}=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

[例]将f (x)=x^2在x∈[-1,1]上按 {$P_l(x)$ }展为广义付氏级数

法一： $$x^2=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(x)$$

$$C_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}x^2P_l(x)dx$$

$$\therefore x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

法二： $$f(x)=x^2=\frac{2}{3}(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2})+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$$

法三：$\because x^2$是偶函数，只能用偶数阶勒让德多项式展开

设：$x^2 = C_0 P_0(x) + C_2 P_2(x)$

$$x = 0 \quad 0 = C_0 P_0(0) + C_2 P_2(0)$$

$$x = 1 \quad 1 = C_0 P_0(1) + C_2 P_2(1)$$

$$\begin{cases} 0 = C_0 - \dfrac{1}{2} C_2 & ① \\ 1 = C_0 + C_2 & ② \end{cases} \qquad C_0 = \frac{1}{3},\ C_2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x)$$

6.$P_l(x)$的生成函数公式

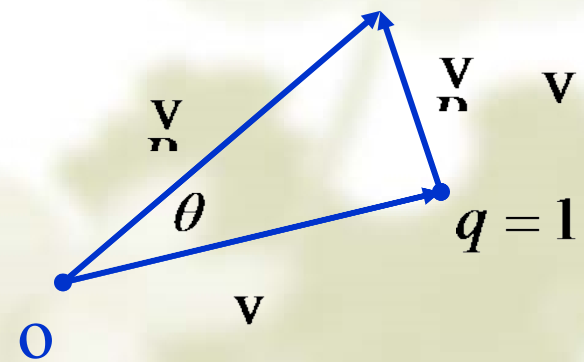
从历史上看，勒让德多项式首先是由势论中引出的

例：求处于$\vec{r}$ 点处的单位正电荷在 $\vec{R}$ 点产生的电位

若选择自然单位制 $u(\vec{R}) = \dfrac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}$

$$|\vec{R}-\vec{r}| = \left[R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= R\left[1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$



设 $\frac{r}{R}=t,\quad x=\cos\theta$

$$\frac{1}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}=\frac{1}{R}\left[1-2tx+t^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$\left[1-2tx+t^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ 在t=0点邻域|t|<1内可展为泰勒级数

$$\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}a_l t^l \qquad |t|<1$$

计算可得： $a_l=P_l(x)$

$$\therefore \left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \qquad |t|<1$$

称 $\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 为 $P_l(x)$ 的生成函数

每个特殊函数都有一种相应的生成函数

利用生成函数公式证明：$P_l(1)=1$

$P_l(-1)=(-1)^l$

令x=1

左$=\left(1-2tx+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{1-t}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l$

右$=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(1)t^l$

左＝右：$\sum_{l=0}^{\infty}t^l=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(1)t^l$

比较t^l前系数：$1=P_l(1)$

应用：

R：场点　r：源点

$\frac{r}{R}<1$时：

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}=\frac{1}{R}\left[1-2\frac{r}{R}\cos\theta+(\frac{r}{R})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

场点比源点距离原点远

$$=\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)(\frac{r}{R})^l \qquad ①$$

$\frac{r}{R}>1$时：

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}=\frac{1}{r}\left[1-2\frac{R}{r}\cos\theta+(\frac{R}{r})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

场点比源点距离原点近

$$=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^l \qquad ②$$