2024-2025学年黑龙江省伊春市高二上学期11月期中考试数学检测试题

一、单选题：本题共8道小题每个小题5分共40分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．抛物线$y+3x^2=0$的焦点坐标为（　）

A．$\left(0,-\frac{3}{4}\right)$　　B．$\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　C．$\left(0,-\frac{1}{12}\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{12}\right)$

2．直线 l 将圆$x^2+y^2-2x-4y=0$平分，且与直线$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$平行，则直线$l$的方程是

A．$2x-y-4=0$

B．$x+2y-3=0$

C．$2x-y=0$

D．$x-2y+3=0$

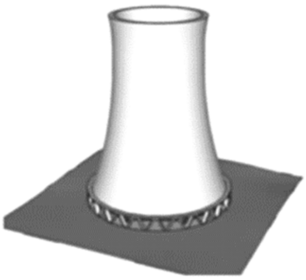
3．A,B,C,D,E五人站成一排，如果C,D必须相邻，那么排法种数为（　）

A．48　　B．24　　C．20　　D．16

4．已知图O的半径为定长r,A是圆O内一个定点,P是圆上任意一点,线段AP的垂直平分线和半径OP相交于点Q,当点P在圆上运动时,点Q的轨迹是（　）

A．圈　　B．椭圆　　C．双曲线的一支　　D．双曲线的两支CB

5．3D打印是快速成型技术的一种，它是一种以数字模型文件为基础，运用粉末状金属或塑料等可粘合材料，通过逐层打印的方式来构造物体的技术，如图所示的塔筒为3D打印的双曲线型塔筒，该塔筒是由离心率为$\sqrt{10}$的双曲线的一部分围绕其旋转轴逐层旋转打印得到的，已知该塔筒（数据均以外壁即塔筒外侧表面计算）的上底直径为$6\sqrt{2}\text{cm}$，下底直径为$9\sqrt{2}\text{cm}$，喉部（中间最细处）的直径为8cm，则该塔筒的高为（　）



A. $\frac{27}{2}\text{cm}$　　B. 18cm　　C. $\frac{27\sqrt{2}}{2}\text{cm}$　　D. $18\sqrt{2}\text{cm}$

6．已知椭圆$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，则椭圆C上的点到点$B(0,1)$的距离的最大值是（　）

A．2　　B．$\frac{16}{3}$　　C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D．$\sqrt{5}$

7．已知抛物线的方程为 $y^2=4x$，过其焦点F的直线交抛物线于A,B两点，若$\overline{AF}=3\overline{FB}$，$|AB|=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．3　　C．$\frac{16}{3}$　　D．2

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，右顶点为A，以A为圆心，$b$为半径作圆A，圆A与双曲线$C$的一条渐近线交于$M$，$N$两点，则有$\angle MAN=$（　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$90°$　　D．$120°$

二、多项选择题：本题共3道小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得2分或4分，有选错的得0分.

9．已知方程$\frac{x^2}{7-t}+\frac{y^2}{t-1}=1$表示的曲线为$C$，则下列四个结论中正确的是（　）

A．当$1<t<7$时，曲线C是椭圆

B．当$t>7$或$t<1$时，曲线C是双曲线

C．若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则$4<t<7$

D．若曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$t>7$

10．以下四个命题表述正确的是（　）

A．两圆$x^2+y^2+4x-4y=0$与$x^2+y^2+2x-12=0$的公共弦所在的直线方程为$x-2y+6=0$

B．圆C_1：$x^2+y^2+2x=0$与圆C_2：$x^2+y^2-4x-8y+4=0$恰有三条公切线

C．$P(x_1,y_1)$为圆C：$x^2+y^2=4$上的点，则$(x_1-1)^2+(y_1-2\sqrt{2})^2$的最大值为25

D．若圆C：$x^2+y^2=4$上有且仅有两个不同的点到直线l：$x+y+m=0$的距离为1，则m的取值范围是$\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$

11．已知点$P(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$是抛物线C_1：$y^2=-4x$上一点，过点P作抛物线C_2：$y^2=4x$的

两条切线 PM，PN，切点分别为 M，N，H 为线段 MN 的中点，F 为 C_2 的焦点，则（　）

A．若 $x_0=-1$，则直线 MN 经过点 F　　　　B．直线 $PH\perp y$ 轴

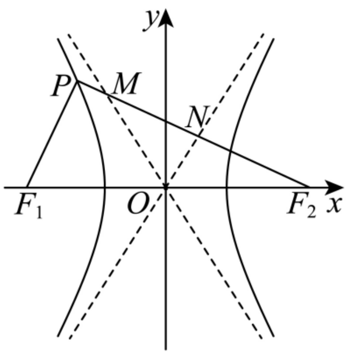
C．点 H 的轨迹方程为 $y^2=\dfrac{3}{4}x$　　　　D．$\angle PFM=\angle PFN$

三、填空题：本题共 3 道小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．有 4 封不同的信投入 3 个不同的信箱，可有__________种不同的投入方法.

13．已知 P 是椭圆 $16x^2+25y^2=1600$ 上的一点，且在 x 轴上方，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____________.

14．已知点 P 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左支上一点 F_1,F_2 是双曲线的左、右两个焦点，且 $PF_1\perp PF_2,PF_2$ 与两条渐近线相交于 M,N 两点（如图），点 N 恰好平分线段 PF_2，则双曲线的离心率是______.



四、解答题：本题共 5 道小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．已知直线 $l_1:2x-y-1=0$，直线 $l_2:3x-y-2=0$，l_1 与 l_2 交于点 A，点 $B(2,-2)$.

(1)求线段 AB 的垂直平分线的方程；

(2)求过 A,B 两点，且圆心在直线 $l:x-y+1=0$ 上的圆的标准方程.

16．已知 $y=\sqrt{2}x$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的一条渐近线，点 $\left(2,2\right)$ 在 C 上.

(1)求 C 的方程；

(2)已知直线 l 的斜率存在且不经过原点，l 与 C 交于 A,B 两点，AB 的中点在直线 $y=2x$ 上.若 $M\left(1,1\right)$，$\triangle MAB$ 的面积为 $\sqrt{6}$，求 l 的方程.

17．已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 四点 $P_1(\sqrt{2},1)$、$P_2(0,1)$、$P_3(-\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$、$P_4(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 中恰有

三点在椭圆C上.

(1)求C的方程;

(2)设直线l不经过点P_4且与C相交于A，B两点，若直线P_4A与直线P_4B的斜率的和为0，求证：l的斜率为定值.

18．已知动圆过定点$A\left(2,0\right)$，且截y轴所得的弦长为4.

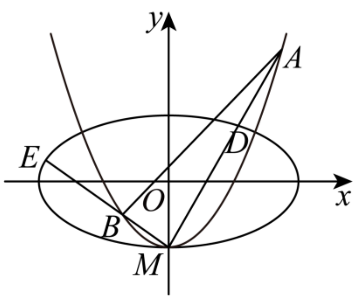
(1)求动圆圆心C的轨迹方程；

(2)过点$Q\left(5,-4\right)$的直线交C的轨迹于A,B两点.

（i）若点$F\left(1,0\right)$，求$\left|FA\right|\cdot\left|FB\right|$的最小值；

（ii）M为Q在x轴上的投影，连接AM与BM分别交抛物线于C，D，问：直线CD是否过定点，若存在，求出该定点；若不存在，请说明理由.

19．如图，已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，曲线$C_2:y=x^2-1$与y轴的交点为M，过坐标原点O的直线l与曲线C_2相交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$两点，直线MA，MB分别与C_1交于点D,E.



(1)求x_1x_2；

(2)证明：以DE为直径的圆经过点M；

(3)记$\triangle MAB$、$\triangle MDE$的面积分别为S_1、S_2，若$S_1=\lambda S_2$，求λ的取值范围.

1．C

【分析】将方程化成标准式，即可求解.

【详解】由 $y+3x^2=0$ 可得 $x^2=-\frac{1}{3}y$ ，故 $2p=-\frac{1}{3}$，则 $p=-\frac{1}{6}$，

故焦点坐标为 $\left(0,-\frac{1}{12}\right)$，

故选：C

2．C

【分析】由题易知，直线 l 过圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心，又因为与直线 $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ 平行，即可得出答案.

【详解】圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心坐标 $(1,2)$，

直线 l 将圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分，

所以直线 l 过圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 的圆心，

又因为与直线 $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ 平行，所以可设直线 l 的方程为 $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=\lambda$，

将 $(1,2)$ 代入可得 $\frac{1}{2}-\frac{2}{4}=\lambda,\therefore \lambda=0$

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=0$ 即 $2x-y=0$.

故选：C.

3．A

【分析】根据捆绑法即可求解.

【详解】由相邻问题捆绑法可得 $\mathrm{A}_4^4\mathrm{A}_2^2=48$，

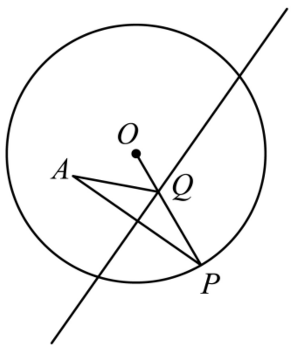
故选：A

4．B

【分析】连接 AQ,因为点 Q 在线段 AP 的垂直平分线上,所以 $AQ=QP$,所以

$QA+QO=QP+QO=OP=r>OA$,可得点 Q 的轨迹符合椭圆的定义.

【详解】解:连接 AQ,如图所示:



因为点 Q 在线段 AP 的垂直平分线上,所以 $AQ = QP$,

所以 $QA + QO = QP + QO = OP = r$,

因为 A 是圆 O 内一个定点,所以 $r > OA$,

即 $QA + QO = r > OA$,即动点 Q 到两定点 O、A 的距离和为定值,

根据椭圆的定义,可知点 Q 的轨迹是:以 O,A 为焦点,OA 为实轴长的椭圆.

故选:B

5．C

【分析】根据模型建立平面直角坐标系，由已知条件先求双曲线的标准方程，再计算高度即可.

【详解】该塔筒的轴截面如图所示，以喉部的中点 O 为原点，建立平面直角坐标系，

设 A 与 B 分别为上，下底面对应点.设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a > 0, b > 0\right)$,

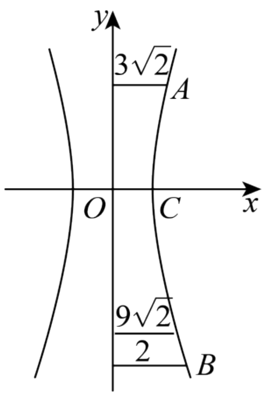
因为双曲线的离心率为 $\sqrt{10} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$，所以 $b^2 = 9a^2$.

又喉部（中间最细处）的直径为 8cm，所以 $2a = 8, a = 4$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{144} = 1$.

由题意可知 $x_A = 3\sqrt{2}, x_B = \frac{9\sqrt{2}}{2}$，代入双曲线方程，得 $y_A = 3\sqrt{2}, y_B = -\frac{21\sqrt{2}}{2}$,

所以该塔筒的高为 $y_A - y_B = \frac{27\sqrt{2}}{2}$.

故选:C.



6．C

【分析】根据点点距离公式即可结合二次函数的性质求解.

【详解】设$P(x,y)$是椭圆上的一个动点，则$x^2=4-4y^2$，

$|PB|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{4-4y^2+(y-1)^2}=\sqrt{-3y^2-2y+5}=\sqrt{-3\left(y+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$，

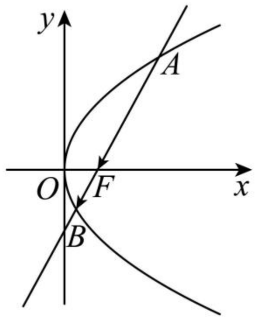
由于$-1\le y\le 1$，故当$y=-\frac{1}{3}$时，$|PB|$取最大值$\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

故选：C

7．C

【分析】设出直线方程与抛物线联立，利用韦达定理和焦点弦公式代入计算可求得$|AB|=\frac{16}{3}$.

【详解】如下图所示：



易知$F(1,0)$，不妨设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$；

设直线AB的方程为$x=my+1$，与$y^2=4x$联立消去x得，

$y^2-4my-4=0$，

由韦达定理可知$y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$；

由$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$可得$y_1=-3y_2$；联立解得$y_2=-2m, y_2^2=\frac{4}{3}$，即$m^2=\frac{1}{3}$；

根据焦点弦公式可得$|AB|=x_1+x_2+2=my_1+1+my_2+1+2=m\left(y_1+y_2\right)+4$；

代入计算可得$|AB|=4m^2+4=\frac{16}{3}$.

故选：C

8．B

【分析】由离心率求得$b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，求出渐近线方程，写出圆A方程后，两方程联立求得交点坐标后，由直线的倾斜角可得结论．

【详解】由已知$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$c=\frac{2}{\sqrt{3}}a$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$即为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

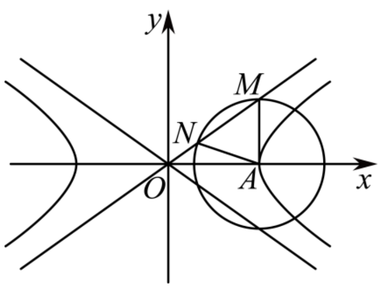
圆A方程为$(x-a)^2+y^2=b^2$，即$(x-a)^2+y^2=\frac{1}{3}a^2$，

取渐近线方程$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

由$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\\(x-a)^2+y^2=\frac{1}{3}a^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=a\\y=\frac{\sqrt{3}}{3}a\end{cases}$或$\begin{cases}x=\frac{a}{2}\\y=\frac{\sqrt{3}}{6}a\end{cases}$，

不妨设$M(a,\frac{\sqrt{3}}{3}a)$，$N(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{6}a)$，

显然$MA\perp x$轴，又$k_{NA}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{a}{2}-a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，即$NA$的倾斜角为$150°$，从而$\angle MAN=60°$．



故选：B．

9．BD

【分析】根据双曲线和椭圆的方程，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于A，当$t=4$时，曲线为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}=1$,此时表示圆，故A错误，

对于B，当$t>7$时，$7-t<0,t-1>0$，此时曲线表示焦点在y上的双曲线，

当$t<1$时$7-t>0,t-1<0$，此时曲线表示焦点在x上的双曲线，

故当$t>7$或$t<1$时，曲线C是双曲线，B正确，

对于C, 若曲线C是焦点在x轴上的椭圆，则满足$7-t>t-1>0$，解得$1<t<4$，故C错误，

对于D，曲线C是焦点在y轴上的双曲线，则$7-t<0,t-1>0$，故$t>7$，D正确，

故选：BD

10．ABC

【分析】对A，将两圆的方程相减即可；对B，根据两圆的位置关系判断即可；对C，根据$(x_1-1)^2+(y_1-2\sqrt{2})^2$的几何意义求解即可；对D，由圆心到直线的距离$d\in(1,3)$，即可求得$m$的取值范围，从而判断.

【详解】对于A，将两圆方程相减得：$x-2y+6=0$，故A正确；

对于B，将圆C：$x^2+y^2+2x=0$化为标准方程为：$(x+1)^2+y^2=1$，

其圆心$C(-1,0)$，半径$r_1=1$，将圆C_2：$x^2+y^2-4x-8y+4=0$化为标准方程为：

$(x-2)^2+(y-4)^2=16$，其圆心$C_2(2,4)$，$r_2=4$，

则$|CC_2|=\sqrt{(2+1)^2+4^2}=5=r_1+r_2$，则两圆外切，故两圆有3条公切线，故B正确；

对于C，因为$(x_1-1)^2+(y_1-2\sqrt{2})^2$表示圆$C$上的点到点$(1,2\sqrt{2})$的距离，

由圆心$(0,0)$到点$(1,2\sqrt{2})$的距离$d=\sqrt{1+8}=3$，

得$(x_1-1)^2+(y_1-2\sqrt{2})^2$的最大值为$(d+r)^2=(3+2)^2=25$，故C正确；

对于D，由圆C：$x^2+y^2=4$上有且仅有两个不同的点到直线$x+y+m=0$的距离为1，

所以圆心到直线的距离$d\in(1,3)$，即$1<\frac{|m|}{\sqrt{2}}<3$，

解得$\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$或$-3\sqrt{2}<m<-\sqrt{2}$，故D错误；

故选：ABC.

11．ABD

【分析】利用导数的几何意义，先表示出切线方程，联立方程组，得直线 MN 的方程为 $y_0y=2\left(x_0+x\right)$，解得 $y=\frac{y_1+y_2}{2}$，从而得 $P\left(\frac{y_1y_2}{4},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，可判定 A、B；再由点 $H\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，可得轨迹方程，判定 C；由向量坐标运算得 $\cos\angle PFM=\frac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FM}}{\left|\overrightarrow{FP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FM}\right|}=\frac{x_0+1}{\left|\overrightarrow{FP}\right|}$，$\cos\angle PFN=\frac{x_0+1}{\left|\overrightarrow{FP}\right|}$，判定 D.

【详解】已知抛物线的方程$y^2=2px(p>0)$，求经过抛物线上一点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 的切线的方程

由 $y^2=2px$，可得 $y=\sqrt{2px}$ 或 $y=-\sqrt{2px}$，

不妨设 $y_0>0$，则 $y=\sqrt{2px}$，则 $y'=\frac{p}{\sqrt{2px}}$，

由导数的几何意义知过点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 的切线的斜率为 $k=\frac{p}{\sqrt{2px_0}}=\frac{p}{y_0}$，

故所求切线方程为 $y-y_0=\frac{p}{y_0}\left(x-x_0\right)$，

化简得 $y_0y-y_0^2=px-px_0$ 即 $y_0y=px+y_0^2-px_0$

又 $M\left(x_0,y_0\right)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，$y_0^2=2px_0$，

所以切线方程为 $y_0y=p\left(x+x_0\right)$ (可验证对 $y_0\le 0$,此方程也适用)

所以设 $M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

设过点 M 的切线为 $y_1y=2\left(x_1+x\right)$，过点 N 的切线为 $y_2y=2\left(x_2+x\right)$，

这两条切线交于点$P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}y_1y_0=2\left(x_1+x_0\right)\\y_2y_0=2\left(x_2+x_0\right)\end{cases}$，

从而直线 MN 的方程为 $y_0y=2\left(x_0+x\right)$.

若 $x_0=-1$，则直线 MN 经过点$F(1,0)$，A 正确.

设过点 M 的切线为 $y_1y=2\left(x_1+x\right)$，过点 N 的切线为 $y_2y=2\left(x_2+x\right)$，