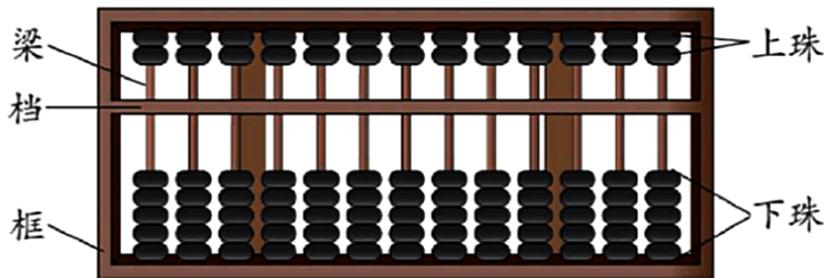


2023-2024 学年高二上册数学期末试卷 4 ( 人教版 )

一、单选题:本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分.

- 已知集合  $A = \{y \mid y = 4x\}$ ,  $B = \{x \mid x = 4 + 2x\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )
  - $\{x \mid x = \frac{4}{5}\}$
  - $\{x \mid x = \frac{4}{5}\}$
  - $\{x \mid x = 4 \text{ 或 } x = \frac{4}{5}\}$
  - $\mathbb{R}$
- 已知  $i$  是虚数单位, 若复数  $z$  满足  $\frac{z}{1-i} = 2i$ , 则  $|z| =$  ( )
  - $\sqrt{2}$
  - 2
  - $2\sqrt{2}$
  - 4
- 若  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  构成空间的一个基底, 则下列向量能构成空间的一个基底的是 ( )
  - $\vec{b}, \vec{c}, \vec{b} + \vec{c}$
  - $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}$
  - $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}$
  - $\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{c}$
- 等比数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 + a_3 = 8$ ,  $a_2 + a_4 = 4$ ,  $a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15}$  的值为 ( )
  - 1
  - 2
  - 3
  - 5
- $\triangle ABC$  的两个顶点坐标  $A(-4, 0)$ ,  $B(4, 0)$  它的周长是 18, 则顶点  $C$  的轨迹方程是 ( )
  - $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
  - $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1 (y \neq 0)$
  - $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$
  - $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$
- 算盘是中国传统的计算工具, 是中国人在长期使用算筹的基础上发明的, “珠算” 一词最早见于东汉徐岳所撰的《数术记遗》其中有云: “珠算控带四时, 经纬三才.” 北周甄鸾为此作注, 大意是: 把木板刻为 3 部分, 上下两部分是停游珠用的, 中间一部分是作定位用的. 下图是一把算盘的初始状态, 自右向左, 分别是个位、十位、百位..., 上面一粒珠 (简称上珠) 代表 5, 下面一粒珠 (简称下珠) 是 1, 即五粒下珠的大小等于同组一粒上珠的大小. 现在从个位和十位这两组中随机选择往下拨一粒上珠, 往上拨 3 粒下珠, 得到的数为质数 (除了 1 和本身没有其它的约数) 的概率是 ( )



- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{2}{3}$

7. 直线  $x^2 + y^2 = 2$  分别与  $x$  轴,  $y$  轴交于  $A, B$  两点, 点  $P$  在圆  $x^2 + y^2 = 2$  上, 则  $\triangle ABP$  面积的取值范围是

- A.  $[2, 6]$                       B.  $[4, 8]$                       C.  $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$                       D.  $[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

8. 已知  $A, B$  是球  $O$  的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $C$  为该球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  体积的最大值为  $36$ , 则  $O$  的表面积为 ( )

- A.  $36\pi$                       B.  $64\pi$                       C.  $144\pi$                       D.  $256\pi$

**二、多选题:本大题共 4 小题, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多个符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.**

9. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$ , 则下列各数是  $\frac{1}{a_n}$  的项的有 ( )

- A. 2                      B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $\frac{3}{2}$                       D. 3

10. 血压 (blood pressure, BP) 是指血液在血管内流动时作用于单位面积血管壁的侧压力, 它是推动血液在血管内

流动的动力, 血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压. 未使用抗高血压药的前提下, 18 岁以上成人收缩压

$\geq 140$  mmHg 或舒张压  $\geq 90$  mmHg, 则说明这位成人有高血压, 设从未使用抗高血压药的李华今年 40 岁, 从某

天早晨 6 点开始计算 (即早晨 6 点时) 他的血压  $p$  (mmHg) 与经过的时间  $t$  (h) 满足关系式

$$p = 11 + 22 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right), \text{ 则 ( )}$$

- A. 函数  $p$  的最小正周期为 6                      B. 当天早晨 7 点时李华的血压为 138 mmHg  
C. 当天李华有高血压                      D. 当天李华的收缩压与舒张压之差为 44 mmHg

11. 已知动点  $P$  在双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  上, 双曲线  $C$  的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 下列结论正确的是 ( )

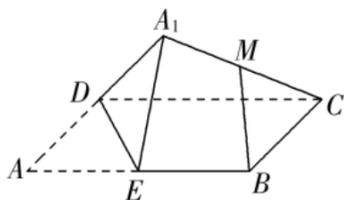
A.  $C$  的离心率为 2

B.  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

C. 动点  $P$  到两条渐近线的距离之积为定值

D. 当动点  $P$  在双曲线  $C$  的左支上时,  $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$  的最大值为  $\frac{1}{4}$

12. 如图, 矩形  $ABCD$  中,  $E$  为边  $AB$  的中点, 将  $\triangle ADE$  沿直线  $DE$  翻转成  $\triangle A_1DE$ . 若  $M$  为线段  $A_1C$  的中点, 则在  $\triangle ADE$  翻转过程中, 下列命题正确的是 ( )



A.  $MB$  是定值

B. 点  $M$  在圆上运动

C. 一定存在某个位置, 使  $DE \perp A_1C$

D. 一定存在某个位置, 使  $MB \parallel$  平面  $A_1DE$

### 三. 填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若抛物线  $y^2 = 2px$  上一点  $P(2, 0)$  到其准线的距离为 4, 则抛物线的标准方程为\_\_\_\_\_.

14. 已知圆锥的母线长为  $\sqrt{3}$  cm, 其侧面展开图是一个半圆, 则底面圆的半径为\_\_\_\_\_ cm.

15. 基础建设对社会经济效益产生巨大的作用. 某市投  $a$  亿元进行基础建设, 年后产生  $f = ac^n$  亿元社会经济效益. 若该市投资基础建设 4 年后产生的社会经济效益是投资额的 2 倍, 则再过\_\_\_\_\_年. 该项投资产生的社会经济效益是投资额的 8 倍.

16. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = 2^n - 1$ ,  $b_n = \log_2 \frac{a_n^2}{2}$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 则满足  $T_n \geq 102$  的最小  $n$  的值为\_\_\_\_\_.

**四. 解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.**

17. 已知直线  $l$  经过两条直  $2x + y - 3 = 0$  和  $4x + y - 5 = 0$  的交点，且与直线  $x + y - 2 = 0$  垂直.

(1) 求直线  $l$  的一般式方程；

(2) 若圆  $C$  的圆心为点  $(3, 0)$ ，直线  $l$  被该圆所截得的弦长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求圆  $C$  的标准方程.

18. 在  $\triangle ABC$  的三个内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，且满足  $2a \cos C = c \cos A$ .

(1) 求角  $A$  的大小；

(2) 若  $b = 3, c = 4, \frac{BD}{DC} = 2$ ，求  $AD$  的长.

19. 已知数列  $\{a_n\}$ ，若\_\_\_\_\_.

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

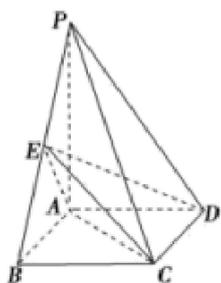
从下列三个条件中任选一个补充在上面的横线上，然后对题目进行求解.

$$\textcircled{1} a_1 \square a_2 \square a_3 \square \dots \square a_n \square n^2 ;$$

$$\textcircled{2} \frac{a}{n-1}, \frac{a}{n-7}, 2\frac{a}{n-1} \square \frac{a}{n-1} [n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2];$$

$$\textcircled{3} \frac{a}{n-1}, \text{点 } A(n-1, a_n), B(n-1, a) \text{ 在斜率是 } 2 \text{ 的直线上.}$$

20. 如图，四棱  $P \square ABCD$  中，底面  $ABCD$  为矩形， $PA \perp$  底面  $ABCD$ ， $PA \square AB \square \sqrt{6}$ ，点  $E$  是棱  $PB$  的中点。



(1) 求证： $AE \perp$  平面  $PBC$ ，并求直线  $AD$  与平面  $PBC$  的距离；

(2) 若  $AD \square \sqrt{3}$ ，求平面  $AEC$  与平面  $DEC$  所成夹角的余弦值。

21. 习近平总书记指出：“我们既要绿水青山，也要金山银山。”新能源汽车环保、节能，以电代油，减少排放，既符合我国的国情，也代表了世界汽车产业发展的方向。工业部表示，到 2025 年中国的汽车总销量将达到 3500 万辆，并希望新能源汽车至少占总销量的五分之一。江苏某新能源公司年初购入一批新能源汽车充电桩，每台 16200 元，第一年每台设备的维修保养费用为 1100 元，以后每年增加 400 元，每台充电桩每年可给公司收益 8100 元。(1) 每台充电桩第几年开始获利？  
(2) 每台充电桩在第几年时，年平均利润最大。

22. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ ，点  $A(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  在椭圆  $C$  上。

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程；

(2) 已知直线  $l: y = kx + 3 (k \neq 0)$  与椭圆  $C$  交于  $P, Q$  两点，点  $M$  是线段  $PQ$  的中点，直线  $l'$  过点  $M$ ，且与直线  $l$  垂直。记直线  $l'$  与  $y$  轴的交点为  $N$ ，求  $\frac{|MN|}{|AM|}$  的取值范围。



【答案】 B

【解析】

【分析】 由空间向量内容知，构成基底的三个向量不共面，对选项逐一分析

【详解】 对于 A:  $[b, c, \frac{2}{h}c]$ , 因此 A 不满足题意;

对于 B: 根据题意知道  $a, b, c$  不共面, 而  $\frac{1}{h}a$  和  $\frac{1}{h}a$  显然位于向量  $a$  和向量  $b$  所成平面内, 与向量  $c$  不共面, 因此 B 正确;

对于 C:  $2a, a, b, a, b$ , 故 C 不满足题意;

对于 D: 显然  $c, a, b, c, a, b$ , 选项 D 不满足题意.

故选: B

4. 等比数列  $\{a_n\}$  中, 已知  $a_1 + a_3 = 8$ ,  $a_2 + a_4 = 4$ , 则  $a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15}$  的值为 ( )

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 由等比数列性质求出公比, 将原式化简后计算

【详解】 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 则  $a_2 = a_1 q$ ,  $a_3 = a_1 q^2$ , 所以  $q^4 = \frac{a_5 a_7}{a_1 a_3} = \frac{1}{2}$ .

又  $a_1 + a_3 = a_1 + a_1 q^2 = (a_1 + a_1) q^8 = 8 \times (\frac{1}{2})^2 = 2$ ,

$a_{13} + a_{15} = a_1 q^{12} + a_1 q^{14} = (a_1 + a_1 q^2) q^{12} = (\frac{1}{2})^3 = 1$ ,

所以  $a_1 + a_3 + a_{13} + a_{15} = 2 + 1 = 3$ .

故选: C

5.  $\triangle ABC$  的两个顶点坐标  $A(-4, 0)$   $B(4, 0)$  它的周长是 18, 则顶点  $C$  的轨迹方程是 ( )

- A.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
- B.  $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{19} = 1 (y \neq 0)$
- C.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$
- D.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$

【答案】 D

【解析】

【分析】根据三角形的周长得出  $|AC| + |BC| = 10 - |AB|$ ，再由椭圆的定义得顶点  $C$  的轨迹为以  $A, B$  为焦点的椭圆，去掉  $A, B, C$  共线的情况，可求得顶点  $C$  的轨迹方程。

【详解】因为  $|AB| + |AC| + |BC| = 18$ ，所以  $|AC| + |BC| = 18 - |AB|$ ，

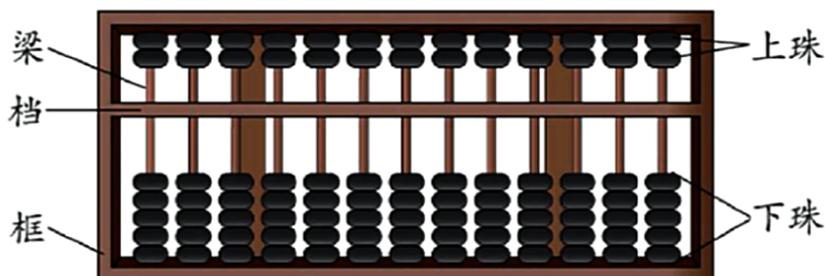
所以顶点  $C$  的轨迹为以  $A, B$  为焦点的椭圆，去掉  $A, B, C$  共线的情况， $2a = 10, c = 4, b^2 = 9$ ，

所以顶点  $C$  的轨迹方程是  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$ ，

故选：D。

【点睛】本题考查椭圆的定义，由定义求得动点的轨迹方程，求解时，注意去掉不满足的点，属于基础题。

6. 算盘是中国传统的计算工具，是中国人在长期使用算筹的基础上发明的，“珠算”一词最早见于东汉徐岳所撰《数术记遗》其中有云：“珠算控带四时，经纬三才。”北周甄鸾为此作注，大意是：把木板刻为 3 部分，上、下两部分是停游珠用的，中间一部分是作定位用的。下图是一把算盘的初始状态，自右向左，分别是个位、十位、百位...，上面一粒珠（简称上珠）代表 5，下面一粒珠（简称下珠）是 1，即五粒下珠的大小等于同组一粒上珠的大小。现在从个位和十位这两组中随机选择往下拨一粒上珠，往上拨 3 粒下珠，得到的数为质数（除了 1 和本身没有其它的约数）的概率是（ ）



- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{3}{8}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{2}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据古典概型概率计算公式，计算出所求的概率。

【详解】依题有，算盘所表示的数可能有：17, 26, 8, 35, 62, 71, 80, 53，其中是质数的有：17, 71, 53，故

所求事件的概率为  $P = \frac{3}{8}$ 。

故选：B

7. 直线  $x - y + 2 = 0$  分别与  $x$  轴， $y$  轴交于  $A, B$  两点，点  $P$  在圆  $(x - 2)^2 + y^2 = 2$  上，则  $\triangle ABP$  面积的取值范

围是

A.  $[2, 6]$

B.  $[4, 8]$

C.  $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$

D.  $[\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}]$

【答案】A

【解析】

【详解】分析：先求出 A, B 两点坐标得到  $|AB|$ ，再计算圆心到直线距离，得到点 P 到直线距离范围，由面积公式计算即可

详解：直线  $x - y - 2 = 0$  分别与 x 轴, y 轴交于 A, B 两点

$A(2, 0), B(0, -2)$ , 则  $|AB| = 2\sqrt{2}$

点 P 在圆  $(x-2)^2 + y^2 = 2$  上

圆心为  $(2, 0)$  则圆心到直线距离  $d_1 = \frac{|2-0-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

故点 P 到直线  $x - y - 2 = 0$  的距离  $d$  的范围为  $[\frac{2\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}]$

则  $S_{ABP} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot d = \sqrt{2} d \in [2, 6]$

故答案选 A.

点睛：本题主要考查直线与圆，考查了点到直线的距离公式，三角形的面积公式，属于中档题。

8. 已 A, B 是球 O 的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ , C 为该球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  体积的最大值为 36, 则 O 的表面积为 ( )

A.  $36\pi$

B.  $64\pi$

C.  $144\pi$

D.  $256\pi$

【答案】C

【解析】

【分析】当 OC 平面 OA 时, 三棱锥  $O-ABC$  体积最大, 根据棱长与球半径关系即可求出球半径, 从而求出表面积.

【详解】当 OC 平面 OA 时, 三棱锥  $O-ABC$  体积最大.

又  $\angle AOB = 90^\circ$ , 则三棱锥体积  $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} r^3 = 36$ , 解得  $r = 6$ ;

故表面积  $S = 4\pi r^2 = 144\pi$ .

故选：C.

【点睛】关键点睛：本题考查三棱锥与球的组合体的综合问题，本题的关键是判断当  $OC \perp$  平面  $OA$  时，三

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/868137027125006123>