2024届山东省威海市高考二模数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．样本数据11，12，13，16，20，22，25，27，36的60%分位数为（   ）

A．20　　B．21　　C．22　　D．23.5

2．在研究集合时，用$\text{card}(A)$来表示有限集合A中元素的个数．集合$M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{x|x>m\}$，若$\text{card}(M\cap N)=2$，则实数m的取值范围为（   ）

A．$[2,3)$　　B．$[2,3]$　　C．$(2,3)$　　D．$(2,+\infty)$

3．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{5}{4}$，则该双曲线的渐近线方程为（   ）

A．$y=\pm 2x$　　B．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　C．$y=\pm\frac{4}{3}x$　　D．$y=\pm\frac{3}{4}x$

4．已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$-a_5$，a_4，a_6成等差数列，则$a_2=$（   ）

A．2　　B．3　　C．4　　D．6

5．已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，斜率为$\sqrt{3}$的直线过点F，且与C在第一象限的交点为A，若$|AF|=8$，则$p=$（   ）

A．2　　B．4　　C．8　　D．12

6．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为棱BC，B_1C_1的中点，若平面DBB_1与平面AEF的交线为l，则l与直线AD_1所成角的大小为（   ）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

7．已知向量a，b满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且对$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$|\vec{b}+\lambda\vec{a}|\geq|\vec{b}-\vec{a}|$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$（   ）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

8．设$a=\frac{1}{10}$，$b=\ln 1.21$，$c=10\sin\frac{1}{100}$，则（   ）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

二、多选题

9．下列命题为真命题的是（　）

A．$\left(1+\mathrm{i}\right)^2$是纯虚数

B．对任意的复数z，$z^2=\left|z\right|^2$

C．对任意的复数z，$\left(z-1\right)\left(\overline{z}-1\right)$为实数

D．$\dfrac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta}=\cos\left(\alpha+\beta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\alpha-\beta\right)$

10．已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，则（　）

A．$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减

B．将$y=f\left(x\right)$图象上的所有点向左平移$\dfrac{2}{3}$个单位长度后得到的曲线关于y轴对称

C．$f\left(x\right)$在$\left(-1,2\right)$上有两个零点

D．$\sum\limits_{i=0}^{2024}f\left(i\right)=\dfrac{1}{2}$

11．数学家加斯帕尔·蒙日在研究圆锥曲线时发现：椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$任意两条互相垂直的切线的交点都在以原点$O$为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$为半径的圆上，这个圆被称为该椭圆的蒙日圆．已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(0<b<3\right)$可以与边长为$2\sqrt{6}$的正方形的四条边均相切，它的左、右顶点分别为$A$，$B$，则（　）

A．$b=\sqrt{3}$

B．若矩形的四条边均与椭圆C相切，则该矩形面积的最大值为12

C．椭圆C的蒙日圆上存在两个点M满足$\left|MA\right|=\sqrt{3}\left|MB\right|$

D．若椭圆C的切线与C的蒙日圆交于E，F两点，且直线OE，OF的斜率都存在，记为k_1，k_2，则$k_1\cdot k_2$为定值

三、填空题

12．$\left(x^3-x\right)^7$的展开式中x^{13}的系数为_____．（用数字作答）

13．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知$a=\sqrt{6}$，$b+c=4$，

$\cos C=-\frac{\sqrt{6}}{6}$．则$\sin A=$_____．

14．已知圆锥的顶点与底面圆周都在半径为3的球面上，当该圆锥的侧面积最大时，它的体积为_____．

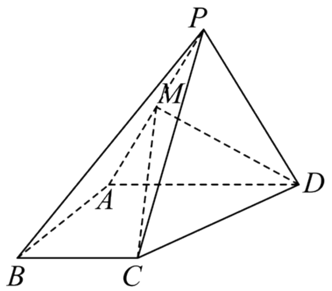
四、解答题

15．市场供应的某种商品中，甲厂产品占60%，乙厂产品占40%，甲厂产品达到优秀等级的概率为90%，乙厂产品达到优秀等级的概率为65%．现有某质检部门对该商品进行质量检测．

(1)若质检部门在该市场中随机抽取1件该商品进行检测，求抽到的产品达到优秀等级的概率；

(2)若质检部门在该市场中随机抽取4件该商品进行检测，设抽到的产品中能达到优秀等级的件数为X，求X的分布列和数学期望．

16．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$\triangle PAD$为等边三角形，$PD\perp AB$，$AD\parallel BC$，$AD=4$，$AB=BC=2$，M为PA的中点．



(1)证明：$DM\perp$平面PAB；

(2)求直线PB与平面MCD所成角的正弦值．

17．已知函数$f\left(x\right)=\ln x-ax+1$．

(1)求$f\left(x\right)$的极值；

(2)证明：$\ln x+x+1\le x\mathrm{e}^{x}$．

18．在直角坐标系xOy中，已知曲线C：$y=ax^2+c$过点$\left(0,-1\right)$，且与x轴的两个交点为A，B，$\left|\mathrm{AB}\right|=4$．

(1)求C的方程；

(2)已知直线 l 与 C 相切.

（i）若 l 与直线 $y=-1$ 的交点为 M，证明：$l\perp OM$；

（ii）若 l 与过原点 O 的直线相交于点 P，且 l 与直线 OP 所成角的大小为 45°，求点 P 的轨迹方程.

19．设 $x\in\mathbf{R}$，y 是不超过 x 的最大整数，且记 $y=[x]$，当 $x\geq 1$ 时，$[x]$ 的位数记为 $f(x)$ 例如：$f(1.6)=1$，$f\left(\frac{100}{3}\right)=2$，$f(996.2)=3$.

(1)当 $10^{n-1}\leq x<10^{n}\left(n\in\mathbf{N}_{+}\right)$ 时，记由函数 $y=f(x)$ 的图象，直线 $x=10^{n-1}$，$x=10^{n}$ 以及 x 轴围成的平面图形的面积为 a_n，求 a_1，a_2 及 $a_1+a_2+\cdots+a_n$；

(2)是否存在正数 M，对 $\forall x\in[M,+\infty)$，$f\left(3^{x}\right)>f\left(2^{x}\right)$，若存在，请确定一个 M 的值，若不存在，请说明理由；

(3)当 $x\geq 1$，$n\in\mathbf{N}_{+}$ 时，证明：$f(x)+f\left(10^{\frac{1}{n}}x\right)+f\left(10^{\frac{2}{n}}x\right)+\cdots+f\left(10^{\frac{n-1}{n}}x\right)=f\left(10^{n}x^{n}\right)-1$.

参考答案：

1．C

【分析】由百分位数的定义计算即可.

【详解】样本数据 11，12，13，16，20，22，25，27，36 共 9 个数字，

所以$9\times 60\% = 5.4$，所以60%分位数为从小到大排列的第6个数，即为22.

故选：C.

2．A

【分析】根据题意，确定$M \cap N = \{3,4\}$，从而求出m的值.

【详解】由题：$M \cap N = \{3,4\}$

所以$2 \le m < 3$，

故选：A.

3．D

【分析】根据公式$e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$求出$\frac{b}{a}$，结合焦点位置即可得渐近线方程.

【详解】由题知，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{5}{4}$，解得$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，

又双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在$x$轴上，所以渐近线方程为$y=\pm\frac{3}{4}x$.

故选：D

4．A

【分析】由等差中项的性质可得$2a_4=-a_5+a_6$，再由等比数列的性质可得$q=2$，即可得出答案.

【详解】因为$-a_5$，a_4，a_6成等差数列，

所以$2a_4=-a_5+a_6$，因为$\{a_n\}$是正项等比数列，且$a_1=1$，

$2a_4=-a_4\cdot q+a_4\cdot q^2$，所以$2=-q+q^2$，解得：$q=2$或$q=-1$（舍去），

所以$a_2=a_1q=1\times 2=2$.

故选：A.

5．B

【分析】过点A作x轴的垂线，垂足为H，利用斜率求出点A

的坐标，然后代入抛物线方程即可得解.

【详解】过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为 H，

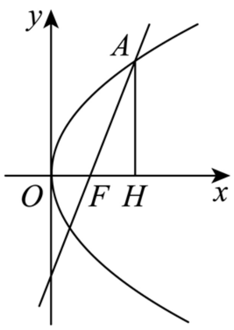
因为直线 AF 的斜率为 $\sqrt{3}$，所以 $\angle AFH=\frac{\pi}{3}$，

则 $|AH|=|AF|\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3},|FH|=|AF|\cos\frac{\pi}{3}=4$，

所以，点 A 坐标为 $\left(\frac{p}{2}+4,4\sqrt{3}\right)$，代入 $y^2=2px(p>0)$ 得 $\left(4\sqrt{3}\right)^2=2p\left(\frac{p}{2}+4\right)$，

整理得 $p^2+8p-48=0$，解得 $p=4$ 或 $p=-12$（舍去）.

故选：B



6．C

【分析】利用线面平行判定定理和性质定理可证 $BB_1//l$，再由直线平行的传递性可得 $AA_1//l$，

可知 $\angle A_1AD_1$ 即为所求，可得答案.

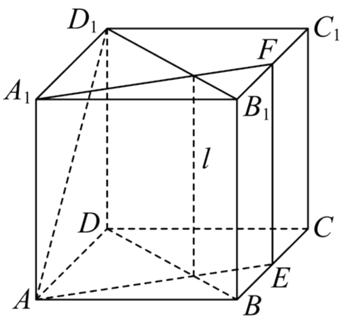
【详解】因为 E，F 分别为棱 BC，B_1C_1 的中点，所以 $BB_1//EF$，

因为 $EF\subset$ 平面 AEF，$BB_1\not\subset$ 平面 AEF，所以 $BB_1//$ 平面 AEF，

又平面 $DBB_1\cap$ 平面 $AEF=l$，$BB_1\subset DBB_1$，所以 $BB_1//l$，

又 $AA_1//BB_1$，所以 $AA_1//l$，所以 l 与直线 AD_1 所成角的大小等于 $\angle A_1AD_1=\frac{\pi}{4}$.

故选：C



7．C

【分析】对$\left|\vec{b}+\lambda\vec{a}\right|\geq\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$两边平方，根据二次函数性质即可求解.

【详解】因为$\left|\vec{b}+\lambda\vec{a}\right|\geq\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$，所以$|\vec{b}+\lambda\vec{a}|^2\geq|\vec{b}-\vec{a}|^2$，

所以$|\vec{a}|^2\lambda^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}\lambda+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2\geq 0$，

因为对$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，$\left|\vec{b}+\lambda\vec{a}\right|\geq\left|\vec{b}-\vec{a}\right|$，

所以$\Delta=(2\vec{a}\cdot\vec{b})^2-4|\vec{a}|^2(2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2)\leq 0$，

所以$|2\vec{a}\cdot\vec{b}|^2-4(2\vec{a}\cdot\vec{b}-1)\leq 0$，

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

故选：C.

8．B

【分析】令$g(x)=x-\sin x$，求导可证明$x>\sin x$，进而可得$10\sin\frac{1}{100}<10\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$，可判断$a>c$，令$f(x)=x-\ln(1+x)^2=x-2\ln(1+x)$，求导可证$x<2\ln(1+x)=\ln(1+x)^2$，令$x=\frac{1}{10}$，可判得$a<b$.

【详解】令$g(x)=x-\sin x$，可得$g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，所以$g(x)=x-\sin x$在R上单调递增，

当$x>0$时，$g(x)>g(0)$，所以$x>\sin x$，

所以$10\sin\frac{1}{100}<10\times\frac{1}{100}=\frac{1}{10}$，所以$a>c$，

令$f(x)=x-\ln(1+x)^2=x-2\ln(1+x)$，求导可得$f'(x)=1-\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}$，

当$0<x<1$，$f'(x)<0$，所以$f(x)$单调递减，所以$f(x)<f(0)$，

即$x-2\ln(1+x)<0-2\ln 1=0$，所以$x<2\ln(1+x)=\ln(1+x)^2$，

令$x=\frac{1}{10}$，可得$\frac{1}{10}<\ln(1+0.1)^2=\ln 1.21$，即$a<b$，

所以$c<a<b$.

故选：B.

9．AC

【分析】对于A，根据复数运算化简后，结合纯虚数概念可判断; 对于B，设$z=a+b\mathrm{i}$，根据复数乘法运算和复数模公式计算即可判断；对于C，设出复数z，根据共轭复数概念和复数乘法运算即可判断；对于D，根据复数除法运算与和差公式化简即可判断.

【详解】对于 A，$(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$ 是纯虚数，A 正确；

对于 B，对任意复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，

$z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2+2ab\mathrm{i}+(b\mathrm{i})^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$|z|^2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=a^2+b^2$，

所以 z^2 和 $|z|^2$ 不一定相等，B 错误；

对于 C，设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\overline{z}=a-b\mathrm{i}$，

则 $(z-1)(\overline{z}-1)=(a-1+b\mathrm{i})(a-1-b\mathrm{i})=(a-1)^2+b^2$，C 正确；

对于 D，$\dfrac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta}=\dfrac{(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta)}{(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)(\cos\beta-\mathrm{i}\sin\beta)}$

$=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\cos(\alpha-\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha-\beta)$，D 错误.

故选：AC

10．BCD

【分析】由 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=1$ 可知 $f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{2}{3}$ 对称，可判断 AB；整体代入法求出函数零点即可判断 C；求出 $f(0),f(1),f(2),f(3)$，结合周期可判断 D.

【详解】对于 A，因为 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{2}{3}$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不单调，A 错误；

对于 B，由上知，$f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{2}{3}$ 对称，

所以 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{2}{3}$ 个单位长度后得到的曲线关于 y 轴对称，B 正确；

对于 C，由 $\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi$ 得函数 $f(x)$ 的零点为 $x=2k-\dfrac{1}{3},k\in\mathbf{Z}$，

令 $-1<2k-\dfrac{1}{3}<2$，解得 $-\dfrac{1}{3}<k<\dfrac{7}{6}$，

所以 $k=0,1$，即 $f(x)$ 在 $(-1,2)$ 上有两个零点，C 正确；

对于 D，因为 $f(0)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2},f(1)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$f(2)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，$f(3)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0$

因为$f(x)$的最小值周期$T=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，

所以$\sum_{i=0}^{2024}f(i)=506\left[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)\right]+f(2024)=f(0)=\dfrac{1}{2}$，D 正确.

故选：BCD

11．ACD

【分析】A 选项，边长为$2\sqrt{6}$的正方形为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的蒙日圆的内接正方形，从而得到方程，求出$b=\sqrt{3}$；B 选项，设矩形的长为$x$，宽为$y$，根据蒙日圆方程得到$x^2+y^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$，由基本不等式求出面积的最大值；C 选项，设$M\left(2\sqrt{3}\cos\theta,2\sqrt{3}\sin\theta\right)$，根据$|MA|=\sqrt{3}|MB|$得到方程，得到$\cos\theta=\dfrac{77\sqrt{3}}{156}$，故 C 正确；D 选项，设切点为$R(x_0,y_0)$，故$\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，椭圆$C$的切线方程为$\dfrac{x_0x}{9}+\dfrac{y_0y}{3}=1$，联立$\dfrac{x_0x}{9}+\dfrac{y_0y}{3}=1$与$x^2+y^2=12$，得到两根之和，两根之积，表达出$x_1x_2=\dfrac{27-36y_0^2}{2y_0^2+3}$，$y_1y_2=\dfrac{12y_0^2-9}{2y_0^2+3}$，故$k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{1}{3}$.

【详解】A 选项，由题意得边长为$2\sqrt{6}$的正方形为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的蒙日圆的内接正方形，

故$\sqrt{9+b^2}=\dfrac{2\sqrt{6}\times\sqrt{2}}{2}$，解得$b^2=3$，$b=\sqrt{3}$，A 正确；

B 选项，若矩形的四条边均与椭圆C相切，则该矩形为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$的蒙日圆的内接矩形，

其中蒙日圆的半径为$\dfrac{2\sqrt{6}\times\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{3}$，

设矩形的长为x，宽为y，故$x^2+y^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2=48$，

故矩形面积为$xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}=24$，当且仅当$x=y=2\sqrt{6}$时，等号成立，

故该矩形面积的最大值为 24，B 错误；

C 选项，由题意得$A(-3,0),B(3,0)$，蒙日圆方程为$x^2+y^2=12$，

设$M\left(2\sqrt{3}\cos\theta,2\sqrt{3}\sin\theta\right)$，