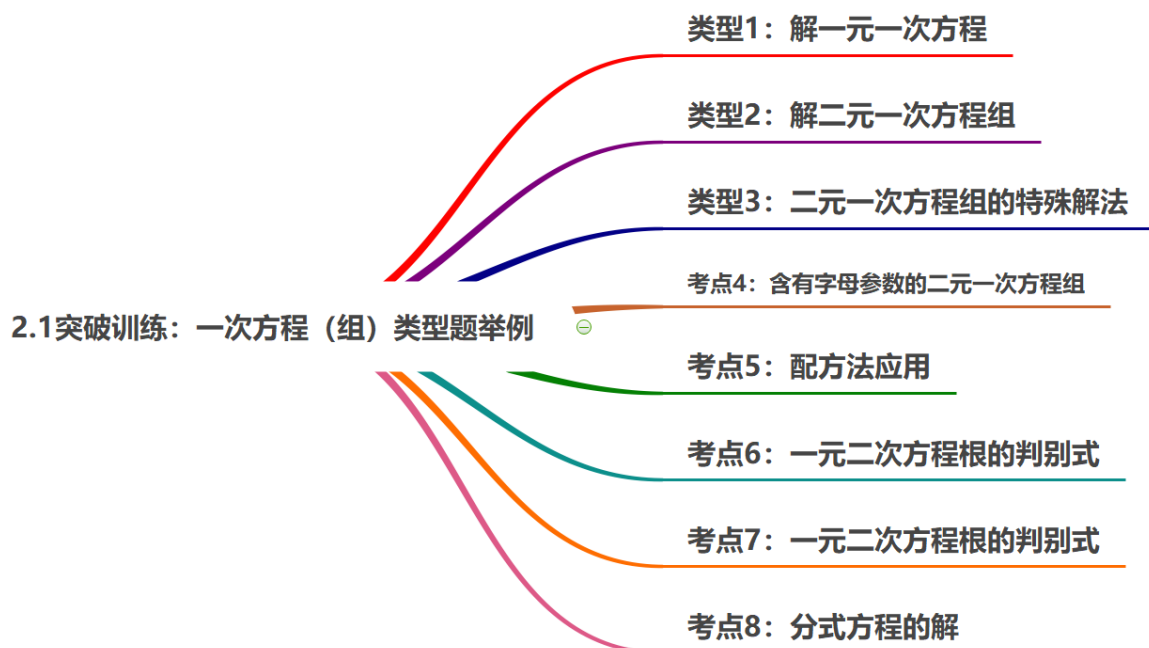


2.1 突破训练：一次方程（组）类型题举例

类型体系 （本专题共 96 题 67 页）



类型 1：解一元一次方程

典例 1：（2022 秋·天津河东·七年级校考期末）解下列方程：

(1) $3x - 7(x - 1) = 3 - 2(x + 3)$;

(2) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{6} = \frac{1-2x}{2} - 2$;

【答案】(1) $x = 5$

(2) $x = -1$

【分析】(1) 根据一元一次方程的解法，依次去括号、移项、合并同类项、化系数为 1，即可完成求解；

(2) 根据一元一次方程的解法，依次去分母、去括号、移项、合并同类项、化系数为 1，即可完成求解。

【详解】(1) 解： $3x - 7(x - 1) = 3 - 2(x + 3)$

去括号，得 $3x - 7x + 7 = 3 - 2x - 6$

移项，合并同类项，得 $-2x = -10$

系数化为 1，得 $x = 5$

(2) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{6} = \frac{1-2x}{2} - 2$

去分母，得 $2(2x - 1) - (5x + 2) = 3(1 - 2x) - 12$

去括号，得 $4x - 2 - 5x - 2 = 3 - 6x - 12$

移项，合并同类项，得 $5x = -5$

系数化为 1，得 $x = -1$ 。

方法或规律点拨

本题考查了一元一次方程的解法；解题的关键是熟练掌握一元一次方程的解法，从而完成求解。

巩固练习

1. (2023 秋·河北石家庄·七年级石家庄市第四十一中学校考期末) 如图表示 3×3 的数表，数表每个位置所对应的数都是 1, 2 或 3. 定义 $a * b$ 为数表中第 a 行第 b 列的数，例如，数表第 3 行第 1 列所对应的数是 2，

所以 $3 * 1 = 2$. 若 $3 * 1 = (2x - 1) * 3$ ，则 x 的值为 ()

	第1列	第2列	第3列
第1行	2	3	2
第2行	3	1	3
第3行	2	3	2

- A. 1, 2 B. 1, 3 C. 0, 2 D. 1, 0

【答案】A

【分析】根据 $3 * 1 = 2$ ，得到 $2 = (2x - 1) * 3$ ，再根据数表，可得 $2x - 1 = 1$ 或 $2x - 1 = 3$ ，求解即可得到答案.

【详解】解：∵ $3 * 1 = (2x - 1) * 3$ ，

$$\therefore 2 = (2x - 1) * 3,$$

根据数表，可得 $2x - 1 = 1$ 或 $2x - 1 = 3$ ，

解得： $x = 1$ 或 $x = 2$ ，

∴ x 的值为 1 或 2，

故选 A.

【点睛】 本题考查了解一元一次方程的方法，解题关键是掌握解一元一次方程的一般步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1.

2. (2023 秋·河北唐山·七年级唐山市第十二中学校考期末) 定义 $a * b = ab + a + b$ ，若 $5 * x = 35$ ，则 x 的值是 ()

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

【答案】B

【分析】先根据题意理解“*”所表示的运算法则，然后根据此运算法则将 $5 * x = 35$ 化为 $5x + 5 + x = 35$ ，解出即可.

【详解】由题意得： $5 * x = 35$ ，可化为： $5x + 5 + x = 35$ ，

移项合并得： $5x + x = 35 - 5$ ，

系数化为1得： $x = 5$ 。

故选：B。

【点睛】本题考查了解一元一次方程，其步骤为：去分母，去括号，移项合并，将未知数系数化为1，求出解。

3. (2023 秋·四川达州·七年级校考期末) 解方程：

$$(1) 2x - (x - 1) = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$(2) \frac{2x+1}{3} - \frac{5x-1}{6} = 1$$

【答案】(1) $x = -5$

(2) $x = -3$

【分析】(1) 根据去括号，移项合并同类项，系数化为1，求出方程的解；

(2) 根据去分母，去括号，移项合并同类项，系数化为1，求出方程的解。

【详解】(1) 解：去分母，可得： $6x - 3(x - 1) = 2(x - 1)$ ，

去括号，可得： $6x - 3x + 3 = 2x - 2$ ，

移项，合并同类项，可得： $x = -5$ 。

(2) 去分母，可得： $2(2x + 1) - (5x - 1) = 6$ ，

去括号，可得： $4x + 2 - 5x + 1 = 6$ ，

移项，合并同类项，可得： $-x = 3$ ，

系数化为1，可得： $x = -3$ 。

【点睛】此题考查了解一元一次方程，正确掌握一元一次方程的解法：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1是解题的关键。

4. (2022 秋·湖北武汉·七年级校考阶段练习) 解方程：

$$(1) 2(x + 8) = 3(x - 1)$$

$$(2) \frac{3x-1}{4} - \frac{5x-7}{6} = 1$$

【答案】(1) $x = 19$

(2) $x = -1$

【分析】(1) 直接去括号、移项、合并同类项，把系数化“1”，即可求解；

(2) 先等式两边同时乘以 12 去分母，然后去括号、移项、合并同类项，把系数化“1”，即可求解。

【详解】(1) 解： $2(x+8)=3(x-1)$ ，

去括号得： $2x+16=3x-3$ ，

移项得： $2x-3x=-3-16$ ，

合并得： $-x=-19$ ，

解得： $x=19$ ；

(2) $\frac{3x-1}{4}-\frac{5x-7}{6}=1$

去分母得： $3(3x-1)-2(5x-7)=12$ ，

去括号得： $9x-3-10x+14=12$ ，

移项得： $9x-10x=12-14+3$ ，

合并得： $-x=1$ ，

解得： $x=-1$ 。

【点睛】 本题考查的是一元一次方程的解法，掌握“一元一次方程的解法与步骤”是解本题的关键。

5. (2023 秋·河北石家庄·七年级石家庄市第四十一中学校考期末) 已知关于 x 的方程 $x-2m=3x+4$ 与

$\frac{x+1}{2}-\frac{2x-1}{3}=1$ 的解互为相反数，求 m 的值。

【答案】 $m=-3$

【分析】 分别求解两个方程，再根据相反数的定义，即可求出 m 的值。

【详解】 解：由 $x-2m=3x+4$ ，解得： $x=-2-m$ ，

$\frac{x+1}{2}-\frac{2x-1}{3}=1$ ，

去分母，得： $3(x+1)-2(2x-1)=6$ ，

去括号，得： $3x+3-4x+2=6$ ，

移项合并，得： $x=-1$ ，

∵ 两个方程的解互为相反数，

∴ $(-2-m)+(-1)=0$ ，

∴ $m=-3$ 。

【点睛】本题考查了解一元一次方程，相反数的定义，熟练掌握解一元一次方程的方法步骤是解题关键。

6. (2022 秋·北京西城·七年级统考期末) 解下列方程:

$$(1) 7x - 20 = 2(3 - 3x);$$

$$(2) \frac{2x-3}{5} = \frac{3x-1}{2} + 1.$$

【答案】(1) $x = 2$

(2) $x = -1$

【分析】(1) 先去括号，再移项，合并同类项，最后把系数化为“1”即可；

(2) 先去分母，再去括号，再移项，合并同类项，最后把系数化为“1”即可；

【详解】(1) 解: $7x - 20 = 2(3 - 3x)$

去括号，得 $7x - 20 = 6 - 6x$ ，

移项，得 $7x + 6x = 6 + 20$ ，

合并同类项，得 $13x = 26$ ，

系数化 1，得 $x = 2$ 。

$$(2) \frac{2x-3}{5} = \frac{3x-1}{2} + 1$$

去分母，得 $2(2x-3) = 5(3x-1) + 10$ ，

去括号，得 $4x - 6 = 15x - 5 + 10$ ，

移项，得 $4x - 15x = 6 - 5 + 10$ ，

合并同类项，得 $-11x = 11$ ，

系数化 1，得 $x = -1$ 。

【点睛】本题考查的是一元一次方程的解法，掌握“解一元一次方程的步骤与方法”是解本题的关键。

7. (2022 秋·北京东城·七年级统考期末) 解方程:

$$(1) 5(x+2) = 14 - 3x;$$

$$(2) \frac{3x-2}{6} = 1 - \frac{x-1}{3}.$$

【答案】(1) $x = \frac{1}{2}$;

(2) $x = 2$ 。

【详解】(1) 解：(1) 去括号得： $5x+10=14-3x$ ，

移项合并得： $8x=4$ ，

解得： $x=\frac{1}{2}$ ；

(2) 去分母得： $3x-2=6-2(x-1)$ ，

去括号得， $3x-2=6-2x+2$ ，

移项合并得： $5x=10$ ，

解得： $x=2$ 。

【点睛】 本题考查了一元一次方程的解法；掌握一元一次方程的解法和步骤是解题的关键。

8. (2022 秋·湖南岳阳·八年级校考期中) 解方程：

$$(1) \frac{1-x}{x-2} = 1 - \frac{3}{x-2}$$

$$(2) \frac{2}{x+1} + \frac{5}{1-x} = \frac{-10}{x^2-1}$$

【答案】(1) $x=3$

(2) 原方程无解

【分析】(1) 转化为一元一次方程的解题步骤—去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1；

(2) 分式方程的解题步骤—化为整式方程进行求解。

【详解】(1) 解： $\frac{1-x}{x-2} = 1 - \frac{3}{x-2}$ ，

去分母得： $1-x=x-2-3$ ，

移项得： $-x-x=-2-3-1$ ，

合并同类项得： $-2x=-6$ ，

系数化为 1 得： $x=3$ 。

(2) 解： $\frac{2}{x+1} + \frac{5}{1-x} = \frac{-10}{x^2-1}$ ，

方程两边同时乘 (x^2-1) 得： $2(x-1)-5(x+1)=-10$ ，

解得： $x=1$ ，

检验：把 $x=1$ 代入最简公分母 (x^2-1) ，

得： $x^2 - 1 = 0$ ，

$\therefore x = 1$ 是原方程的增根，应舍去，

\therefore 原方程无解。

【点睛】 本题考查了一元一次方程与分式方程的解法，解题的关键是掌握一元一次方程的解题步骤——去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1；掌握分式方程的解题步骤——化为整式方程进行求解。

9. (2022 秋·湖北武汉·七年级校考期末) 解下列方程：

(1) $3(x+8) = 2(x-1)$;

(2) $\frac{3x-1}{4} - 1 = \frac{5x-7}{6}$

【答案】 (1) $x = -26$

(2) $x = -1$

【分析】 (1) 方程去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 即可；

(2) 方程去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 即可。

【详解】 (1) 解：去括号得： $3x + 24 = 2x - 2$ ，

移项得： $3x - 2x = -2 - 24$ ，

合并同类项得： $x = -26$ ，

所以原方程的解为： $x = -26$ ；

(2) 解：去分母得： $3(3x-1) - 12 = 2(5x-7)$ ，

去括号得： $9x - 3 - 12 = 10x - 14$ ，

移项得： $9x - 10x = -14 + 3 + 12$ ，

合并同类项得： $-x = 1$ ，

化系数为 1 得： $x = -1$ ，

所以原方程的解为： $x = -1$ 。

【点睛】 本题考查了解一元一次方程，掌握解一元一次方程的基本步骤是解答本题的关键。

10. (2022 秋·辽宁大连·七年级统考期中) 解下列方程：

(1) $4x + 7 = 32 - 2x + x$

(2) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + 1 = 4 - x$

【答案】 (1) $x = 5$

$$(2) x = \frac{18}{5}$$

【分析】(1) 移项，合并同类项，系数化为1，即可求解；

(2) 去分母，移项，合并同类项，系数化为1，即可求解.

【详解】(1) 解： $4x + 7 = 32 - 2x + x$

移项， $4x + 2x - x = 32 - 7$

合并同类项， $5x = 25$

系数化为1， $x = 5$

∴原方程的解为： $x = 5$.

(2) 解： $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + 1 = 4 - x$

去分母， $3x - 4x + 6 = 24 - 6x$

移项， $3x - 4x + 6x = 24 - 6$

合并同类项， $5x = 18$

系数化为1， $x = \frac{18}{5}$

∴原方程的解为： $x = \frac{18}{5}$.

【点睛】本题主要考查解一元一次方程，掌握去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1的方法解方程是关键.

类型 2：解二元一次方程组

典例：（2022 秋·辽宁沈阳·八年级沈阳市第七中学校考期末）解二元一次方程组：

$$(1) \begin{cases} 2x + 4y = 5 \\ x = 1 - y \end{cases} ;$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} .$$

$$\text{【答案】(1)} \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

【分析】(1) 用代入消元法解二元一次方程组即可；

(2) 用加减消元法解二元一次方程组即可。

【详解】(1) 解：
$$\begin{cases} 2x+4y=5 \text{①} \\ x=1-y \text{②} \end{cases}$$

把②代入①得： $2(1-y)+4y=5$ ，

解得： $y=\frac{3}{2}$ ，

把 $y=\frac{3}{2}$ 代入②得： $x=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$ ，

∴二元一次方程组的解为
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$
；

(2) 解：
$$\begin{cases} 3x+4y=-5 \text{①} \\ 5x-2y=9 \text{②} \end{cases}$$
，

①+②×2 得： $13x=13$ ，

解得： $x=1$ ，

把 $x=1$ 代入①得： $3+4y=-5$ ，

解得： $y=-2$ ，

∴方程组的解为
$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$
。

方法或规律点拨

本题主要考查了解二元一次方程组，解题的关键是熟练掌握代入消元法和加减消元法解二元一次方程组，准确计算。

巩固练习

1. (2022 秋·八年级单元测试) 对于方程 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$ ，用含 x 的代数式表示 y 的形式是 ()

A. $y=\frac{2x-2}{3}$ B. $y=\frac{2x}{3}-2$ C. $x=3+\frac{2y}{2}$ D. $x=3-\frac{3y}{2}$

【答案】B

【分析】将 x 当成已知数，方程的左右两边同时乘以 2，再移项求解即可。

【详解】解：方程 $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$ ，

解得： $y=\frac{2x}{3}-2$ ，

故选：B.

【点睛】此题考查了二元一次方程，解题的关键是将 x 当成已知数，求出 y 。

2. (2023 秋·重庆·七年级西南大学附中校考期末) 方程组 $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ 的解为 ()

A. $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-1 \end{cases}$

【答案】C

【分析】利用加减消元法解二元一次方程组。

【详解】解： $\begin{cases} 3x+y=8 \text{①} \\ 2x-y=7 \text{②} \end{cases}$ ，

①+②得， $5x=15$ ，

$\therefore x=3$ ，

把 $x=3$ 代入①得 $3 \times 3 + y = 8$ ，

$\therefore y = -1$ ，

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组，掌握加减消元法是解题的关键。

3. (2022 秋·安徽滁州·七年级校考阶段练习) 若 $x^{m-n} - 2y^{m+n-2} = 2023$ 是关于 x ， y 的二元一次方程，则 m ， n 的值分别是 ()

A. $m=1$ ， $n=0$

B. $m=2$ ， $n=1$

C. $m=0$ ， $n=1$

D. $m=2$ ， $n=3$

【答案】B

【分析】根据二元一次方程的定义，可得到关于 m ， n 的方程组，即可求解。

【详解】解： $\because x^{m-n} - 2y^{m+n-2} = 2023$ 是关于 x ， y 的二元一次方程，

$\therefore \begin{cases} m-n=1 \\ m+n-2=1 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$ ，

故选：B

【点睛】本题主要考查了二元一次方程的定义，解二元一次方程组，熟练掌握含有2个未知数，且未知数的次数均为1的整式方程是二元一次方程是解题的关键。

4. (2022春·广东江门·九年级江门市怡福中学校考阶段练习) 二元一次方程组： $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ 的解是

_____.

【答案】 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

【分析】方程组利用加减消元法求出解即可.

【详解】解： $\begin{cases} x+2y=1 \textcircled{1} \\ 2x-y=7 \textcircled{2} \end{cases}$,

$\textcircled{1}+\textcircled{2}\times 2$ 得： $5x=15$,

解得： $x=3$,

把 $x=3$ 代入 $\textcircled{1}$ 得： $3+2y=1$,

解得： $y=-1$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

故答案为： $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$.

【点睛】此题考查了解二元一次方程组，利用了消元的思想，消元的方法有：代入消元法与加减消元法.

5. (2022春·广东江门·七年级校联考期中) 解方程组： $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 6x+y=8 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

【分析】利用代入法解方程组.

【详解】解： $\begin{cases} 5x-2y=1 \textcircled{1} \\ 6x+y=8 \textcircled{2} \end{cases}$

由 $\textcircled{2}$ 得 $y=8-6x \textcircled{3}$,

将 $\textcircled{3}$ 代入 $\textcircled{1}$ ，得 $5x-2(8-6x)=1$,

解得 $x=1$,

将 $x=1$ 代入 $\textcircled{3}$ ，得 $y=2$,

\therefore 方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$.

【点睛】此题考查了解二元一次方程组，正确掌握二元一次方程组的解法：代入法和加减法是解题的关键。

6. (2022 秋·安徽滁州·七年级校考阶段练习) 解方程组:
$$\begin{cases} x+3y=2\text{①} \\ 3x-y=-4\text{②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

【分析】利用代入消元法求解即可。

【详解】解:
$$\begin{cases} x+3y=2\text{①} \\ 3x-y=-4\text{②} \end{cases},$$

由①得: $x=2-3y\text{③}$,

把③代入②, 得 $3(2-3y)-y=-4$,

解得: $y=1$,

把 $y=1$ 代入③, 得 $x=-1$.

所以原方程组的解为
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查的是二元一次方程组的解法，掌握代入消元法是解答本题的关键。

7. (2022 秋·广东广州·八年级广州市海珠中学校考期末) 解方程组:
$$\begin{cases} 2x-5y=-3 \\ 5x-2y=-18 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$$

【分析】利用加减消元法求解。

【详解】解:
$$\begin{cases} 2x-5y=-3\text{①} \\ 5x-2y=-18\text{②} \end{cases},$$

① $\times\frac{5}{2}$ -②, 得 $\frac{5}{2}\times(-5y)-(-2y)=-3\times\frac{5}{2}-(-18)$,

化简, 得 $-\frac{21}{2}y=\frac{21}{2}$,

解得 $y=-1$,

将 $y=-1$ 代入①, 得 $2x-5\times(-1)=-3$,

解得 $x=-4$,

故该方程组的解为 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$.

【点睛】本题考查解二元一次方程组，掌握加减消元法是解题的关键.

8. (2022 秋·安徽滁州·七年级校考阶段练习) 解方程组: $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 1 \end{cases}$

【分析】利用加减消元法解方程组.

【详解】解: $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \text{①} \\ 3x + 4y = 12 \text{②} \end{cases}$,

② - ①得: $10y = 10$,

$\therefore y = 1$,

把 $y = 1$ 代入①得: $3x - 6 = 2$,

解得: $x = \frac{8}{3}$,

\therefore 方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = 1 \end{cases}$.

【点睛】本题考查了解二元一次方程组，解题的关键是掌握加减消元法和代入消元法解方程组.

9. (2022 秋·山东济南·八年级校考期末) 解方程组: $\begin{cases} 3x - y = 12 \\ 7x + 2y = 15 \end{cases}$.

【答案】 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

【分析】根据加减消元可进行求解方程组.

【详解】解: $\begin{cases} 3x - y = 12 \text{①} \\ 7x + 2y = 15 \text{②} \end{cases}$

① \times 2+②得: $13x = 39$, 解得: $x = 3$;

把 $x = 3$ 代入①得: $y = -3$,

\therefore 原方程组的解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$.

【点睛】本题主要考查二元一次方程组的解法，熟练掌握二元一次方程组的解法是解题的关键.

10. (2022 秋·全国·八年级专题练习) 如图是按一定规律排列的方程组集合和它的解的集合的对应关系图，若方程组从左至右依次记作方程组 1，方程组 2，方程组 3...方程组 n

方程组集合

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y=1, \\ x-y=1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x+y=1, \\ x-2y=4, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x+y=1, \\ x-3y=9, \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}, \end{array} \right.$$

对应方程组解的集合

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \underline{\hspace{1cm}}, \\ y = \underline{\hspace{1cm}}, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = -1, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 3, \\ y = -2, \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{l} x = \underline{\hspace{1cm}}, \\ y = \underline{\hspace{1cm}}, \end{array} \right.$$

(1)将方程组 1 的解填入图中；

(2)请依据方程组和它的解的变化规律，将方程组 n 和它的解直接填入图中；

(3)若方程组 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-ay=81 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=b \\ y=-8 \end{cases}$ ，求 a, b 的值，并判断该方程组及方程组的解是否属于上述集合。

【答案】(1) $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=n \\ y=-n+1 \end{cases}$

(3) $a=9, b=9$ ，方程组属于上述集合。

【分析】(1) 利用加减消元法解方程组即可；

(2) 由前面方程组的解发现未知数 x 的值为一系列自然数，对应的未知数 y 的值为 x 的相反数与 1 的和，从而可总结出规律得答案；

(3) 将 $\begin{cases} x=b \\ y=-8 \end{cases}$ 代入原方程组求解 a, b 的值，再观察方程组的结构从而可得答案。

【详解】(1) 解：根据题意得： $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$ ，

把两个方程相加可得： $2x=2$ ，

解得： $x=1$ ，

把 $x=1$ 代入上面一个方程可得： $y=0$ ，

方程组 1 的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ；

(2) 根据方程组的解的变化规律可得：

方程组 n 为 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-ny=n^2 \end{cases}$ ，解为 $\begin{cases} x=n \\ y=-n+1 \end{cases}$ ；

$$(3) \therefore \begin{cases} x+y=1 \textcircled{1} \\ x-ay=81 \textcircled{2} \end{cases},$$

将 $\begin{cases} x=b \\ y=-8 \end{cases}$ 代入 $\textcircled{1}$ 得: $b-8=1$,

解得 $b=9$,

把 $x=9, y=-8$ 代入 $\textcircled{2}$, 得 $9+8a=81$, 解得 $a=9$,

\therefore 该方程组及方程组的解属于上述集合.

【点睛】 本题考查的是利用加减消元法解二元一次方程组, 方程组的解的含义, 方程组的解的规律探究与运用, 理解题意, 正确的归纳与总结规律是解本题的关键.

类型 3: 二元一次方程组的特殊解法

典例: (2022 秋·八年级课时练习) 阅读材料: 小强同学在解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=3 \textcircled{1} \\ 4x+11y=5 \textcircled{2} \end{cases}$ 时, 采用了一种“整体代换”解法:

代换”解法:

解: 将方程 $\textcircled{2}$ 变形: $4x+10y+y=5$, 即 $2(2x+5y)+y=5 \dots \textcircled{3}$, 把方程 $\textcircled{1}$ 代入 $\textcircled{3}$ 得: $2 \times 3 + y = 5$ 即

$y=-1$, 把 $y=-1$ 代入方程 $\textcircled{1}$, 得 $x=4$, 所以方程组的解为 $\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases}$.

请你解决以下问题

(1) 模仿小强同学的“整体代换”法解方程组 $\begin{cases} 3x+5y=16 \\ 6x+11y=35 \end{cases}$;

(2) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=24 \\ 6x^2+4xy+9y^2=51 \end{cases}$

(i) 求 xy 的值;

(ii) 求出这个方程组的所有整数解.

【答案】 (1) 方程组的解为 $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=3 \end{cases}$

(2) (i) $xy=-3$; (ii) 原方程组的所有整数解是 $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

【分析】 (1) 根据例题的解法代入计算即可;

(2) (i) 把方程变形后, 再把将 $\textcircled{1}$ 代入方程 $\textcircled{2}$, 即可;

(ii) 根据 x 与 y 是整数且 $xy = -3$ 计算即可.

【详解】(1)
$$\begin{cases} 3x+5y=16 \textcircled{1} \\ 6x+11y=35 \textcircled{2} \end{cases}$$

将方程②变形: $6x+10y+y=35$,

即 $2(3x+5y)+y=35$ ③,

把方程①代入③得: $2 \times 16 + y = 35$,

解得 $y=3$,

把 $y=3$ 代入方程①, 得 $x = \frac{1}{3}$,

所以方程组的解为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 3 \end{cases}$$

(2) (i) 原方程组化为
$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 24 \textcircled{1} \\ 3(2x^2 - xy + 3y^2) + 7xy = 51 \textcircled{2} \end{cases}$$

将①代入方程②得: $72 + 7xy = 51$,

$\therefore xy = -3$;

(ii) 由 (i) 得 $xy = -3$,

$\therefore x$ 与 y 是整数,

$\therefore \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$,

由 (i) 可求得 $2x^2 + 3y^2 = 21$,

$\therefore \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ 符合题意,

故原方程组的所有整数解是 $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$.

方法或规律点拨

此题主要考查了特殊方程的解法, 关键是掌握读懂题目给的材料.

巩固练习

1. (2022 秋·河南新乡·七年级校联考期末) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=5 \end{cases}$, 则 $2x+y$ 的值为 ()

A. -2

B. 0

C. 6

D. 8

【答案】D

【分析】将两个方程相加即可得到答案.

【详解】解:
$$\begin{cases} x+2y=3 \textcircled{1} \\ x-y=5 \textcircled{2} \end{cases},$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$, 得 $2x+y=8$,

故选: D.

【点睛】此题考查了特殊法解方程组, 正确掌握两个方程的特点及所求式子的特点是解题的关键.

2. (2022 秋·全国·八年级专题练习) 我们知道二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$. 现给出另一个二元

一次方程组 $\begin{cases} 2(2x+1)-3(3y-1)=3 \\ 3(2x+1)-4(3y-1)=5 \end{cases}$, 它的解是 ()

A. $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

【答案】C

【分析】利用换元法, 令 $\begin{cases} 2x+1=X \\ 3y-1=Y \end{cases}$, 得到: $\begin{cases} 2X-3Y=3 \\ 3X-4Y=5 \end{cases}$, 即: $\begin{cases} X=3 \\ Y=1 \end{cases}$, 再解二元一次方程组即可.

【详解】解: 在二元一次方程组 $\begin{cases} 2(2x+1)-3(3y-1)=3 \\ 3(2x+1)-4(3y-1)=5 \end{cases}$ 中, 令 $\begin{cases} 2x+1=X \\ 3y-1=Y \end{cases}$,

则 $\begin{cases} 2X-3Y=3 \\ 3X-4Y=5 \end{cases}$,

\therefore 二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} X=3 \\ Y=1 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} 2x+1=3 \\ 3y-1=1 \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$.

故选 C.

【点睛】本题考查解二元一次方程组. 熟练掌握换元法解方程组, 是解题的关键.

3. (2022 秋·黑龙江大庆·九年级校联考期中) 已知 x, y 满足方程组 $\begin{cases} x-3y=4 \\ x+3y=-5 \end{cases}$, 则 x^2-9y^2 的值为

_____.

【答案】 -20

【分析】将 $x^2 - 9y^2$ 利用平方差公式进行因式分解，在根据方程组 $\begin{cases} x-3y=4 \\ x+3y=-5 \end{cases}$ 求解即可。

【详解】解： $\because x^2 - 9y^2 = (x+3y)(x-3y)$ ，

$$\text{又} \because \begin{cases} x-3y=4 \\ x+3y=-5 \end{cases},$$

$$\therefore x^2 - 9y^2 = (x+3y)(x-3y) = 4 \cdot (-5) = -20.$$

故答案是： -20.

【点睛】本题考查了代数式的化简求值，能利用平方差公式进行因式分解然后在求值是解题的关键。

4. (2022·全国·七年级专题练习) 已知关于 x 和 y 的方程组 $\begin{cases} ax+by=78 \\ cx-6y=-21 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=2.7 \\ y=6.1 \end{cases}$ ，则另一关于 x 、 y

的方程组 $\begin{cases} a(x+2)+b(y-3)=78 \\ c(x+2)-6(y-3)=-21 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=0.7 \\ y=9.1 \end{cases}$

【分析】由题意可得 $\begin{cases} x+2=2.7 \\ y-3=6.1 \end{cases}$ ，即可求方程组的解。

【详解】解： \because 方程组 $\begin{cases} ax+by=78 \\ cx-6y=-21 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=2.7 \\ y=6.1 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} x+2=2.7 \\ y-3=6.1 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} x=0.7 \\ y=9.1 \end{cases}$ ，

故答案为： $\begin{cases} x=0.7 \\ y=9.1 \end{cases}$ 。

【点睛】本题考查解二元一次方程组，熟练掌握二元一次方程组的解法，用整体思想解题是关键。

5. (2022 秋·重庆北碚·七年级统考期末) 若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=1+a \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=2$ 。则

$a =$ _____.

【答案】 4

【分析】由①+②，可得 $4x+4y=4+a$ ，结合 $x+y=2$ ，得出 $4+a=8$ ，解关于 a 的方程即可求出 a 的

值.

【详解】解：
$$\begin{cases} 3x+y=1+a \textcircled{1} \\ x+3y=3 \textcircled{2} \end{cases}$$

由①+②，可得： $4x+4y=4+a$ ，

$\therefore x+y=2$ ，

$\therefore 4x+4y=8$ ，

$\therefore 4+a=8$ ，

解得： $a=4$ ，

故答案为：4.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的特殊解法，在求二元一次方程组中两个未知数的和或差的时候，有时可以采用把两个方程直接相加或相减的方法，而不必求出两个未知数的具体值.

6. (2022 秋·陕西西安·八年级西安市第二十六中学校考阶段练习) 若 m, n 满足方程组
$$\begin{cases} 3m+2n=8 \\ 2m+3n=12 \end{cases}$$
，则 $m-n$ 的值为_____.

【答案】 -4

【分析】用两个方程相减即可得出答案.

【详解】解：
$$\begin{cases} 3m+2n=8 \textcircled{1} \\ 2m+3n=12 \textcircled{2} \end{cases}$$

①-② 得： $3m+2n-(2m+3n)=8-12$ ，

即 $m-n=-4$.

故答案为： -4 .

【点睛】本题主要考查了求代数式的值，解题的关键是注意整体思想的应用.

7. (2022 秋·广东梅州·八年级校考阶段练习) 已知方程组
$$\begin{cases} 2x+y=6, \\ x+2y=9, \end{cases}$$
 求 $x+y$ 与 $x-y$ 的值.

【答案】 5, -3

【分析】由由①+②可求出 $x+y$ 的值，由由①-②可求出 $x-y$ 的值.

【详解】
$$\begin{cases} 2x+y=6 \textcircled{1} \\ x+2y=9 \textcircled{2} \end{cases}$$

由①+②，

得 $3x+3y=15$,

故 $x+y=5$

由①-②, 得 $x-y=-3$.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的特殊解法, 在求二元一次方程组中两个未知数的和或差的时候, 有时可以采用把两个方程直接相加或相减的方法, 而不必求出两个未知数的具体值.

8. (2022·河南洛阳·统考二模) 已知实数 x, y 满足 $3x-2y=7$ ①, $x+3y=9$ ②, 求 $2x-5y$ 和 $5x+4y$ 的值.

本题常规的解题思路是将①②两式联立组成方程组, 解得 x, y 的值. 再代入欲求值的代数式得到答案, 常规思路运算量较大. 其实, 仔细观察两个方程未知数 x, y 的系数与所求代数式中 x, y 的系数之间的关系, 本题还可以通过适当的变形整体求得代数式的值. 由①-②得: $2x-5y=-2$, 由①+② $\times 2$ 得 $5x+4y=25$, 这样的解题思想就是通常所说的“整体思想”.

问题解决:

(1) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=9 \end{cases}$, 则 $x+y$ 值为____, $x-y$ 的值为____.

(2) 某班组织活动购买奖品, 买 20 支铅笔、3 块橡皮、2 本日记本共需 32 元; 买 39 支铅笔、5 块橡皮、3 本日记本共需 58 元. 则购买 5 支铅笔、5 块橡皮、5 本日记本共需多少元?

(3) 对于实数 x, y , 定义新运算: $x*y=ax+by+c$, 其中 a, b, c 是常数, 等式右边是通常的加法和乘法运算. 已知 $3*5=15$, $4*7=28$, 则 $1*1$ 的值为____.

【答案】 (1) 5, -3

(2) 30 元

(3) -11

【分析】 (1) 根据方程组中两个方程的特点, 由①+②即可求出 $x+y$ 的值, ①-②即可求出 $x-y$ 的值;

(2) 设 1 支铅笔 x 元、1 块橡皮 y 元、1 本日记本 z 元, 列出方程组 $\begin{cases} 20x+3y+2z=32 \text{①} \\ 39x+5y+3z=58 \text{②} \end{cases}$, 先求出

$x+y+z=6$, 再求出 $5(x+y+z)=30$, 即可得出答案;

(3) 根据题意得出方程组 $\begin{cases} 3a+5b+c=15 \text{①} \\ 4a+7b+c=28 \text{②} \end{cases}$, 求出 $a+b+c=-11$, 即可求出 $1*1$ 的值.

【详解】 (1) 解: 由①+②, 可得 $3x+3y=15$,

$$\therefore x+y=5,$$

由①-②, 可得 $x-y=-3$.

故答案为: 5, -3;

(2) (2) 设 1 支铅笔 x 元、1 块橡皮 y 元、1 本日记本 z 元,

$$\text{由题意, 可得} \begin{cases} 20x+3y+2z=32 \text{①} \\ 39x+5y+3z=58 \text{②} \end{cases},$$

由① \times 2-②, 可得 $x+y+z=6$,

$$\therefore 5(x+y+z)=30 \text{ (元)},$$

答: 购买 5 支铅笔、5 块橡皮、5 本日记本共需 30 元;

$$(3) \because 3*5=15, 4*7=28,$$

$$\therefore \begin{cases} 3a+5b+c=15 \text{①} \\ 4a+7b+c=28 \text{②} \end{cases},$$

由① \times 3-② \times 2, 可得 $a+b+c=-11$,

$$\therefore 1*1=a+b+c=-11.$$

故答案为: -11.

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组及三元一次方程组的整体求法, 理解题意, 熟练掌握整体计算方法是解题关键.

9. (2022·全国·七年级专题练习) 感悟思想:

有些关于方程组的问题, 欲求的结果不是每一个未知数的值, 而是关于未知数的代数式的值, 如以下问题:

已知实数 x, y 满足 $3x-y=5$ ①, $2x+3y=7$ ②, 求 $x-4y$ 和 $7x+5y$ 的值.

思考: 本题常规思路是将①②联立成方程组, 解得 x, y 的值再代入欲求值的代数式得到答案, 有的问题用常规思路运算量比较大. 其实, 仔细观察两个方程未知数的系数之间的关系, 本题还可以通过适当变形整体求得代数式的值.

如①-②可得 $x-4y=-2$ ①+② \times 2 可得 $7x+5y=19$.

这样的解题思想就是通常所说的“整体思想”.

体会思想:

(1) 已知二元一次方程组 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x+2y=8 \end{cases}$, 则 $x-y=$ _____, $x+y=$ _____.

(2)解方程组:
$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=3 \\ y+z=4 \end{cases}$$

(3)某班级组织活动购买小奖品,买 20 支铅笔、3 块橡皮、2 本日记本共需 32 元,买 39 支铅笔 5 块橡皮、3 本日记本共需 58 元,则购买 5 支铅笔、5 块橡皮、5 本日记本共需多少元?

【答案】 (1)-1, 5

(2)
$$\begin{cases} x=2 \\ z=1 \\ y=3 \end{cases}$$

(3)30 元

【分析】 (1) 把两个方程相加可求 $x+y=5$, 相减可求 $x-y=-1$;

(2) 把 3 个方程相加得 $x+y+z=6$, 分别减三个方程可求解;

(3) 设未知数列出方程组, 用整体思想求解即可.

【详解】 (1) 解:
$$\begin{cases} 2x+y=7 \text{①} \\ x+2y=8 \text{②} \end{cases}$$

①+②得 $3x+3y=15$, 解得 $x+y=5$,

①-②得 $x-y=-1$,

故答案为: -1, 5.

(2) 解:
$$\begin{cases} x+y=5 \text{①} \\ x+z=3 \text{②} \\ y+z=4 \text{③} \end{cases}$$

①+②+③得, $2x+2y+2z=12$, 即 $x+y+z=6$ ④,

④-①得, $z=1$,

④-②得, $y=3$,

④-③得, $x=2$,

方程组的解为
$$\begin{cases} x=2 \\ z=1 \\ y=3 \end{cases}$$

(3) 解: 设购买 1 支铅笔 a 元, 1 块橡皮 b 元, 1 本日记本 c 元,

根据题意列方程组得，
$$\begin{cases} 20a+3b+2c=32 \text{①} \\ 39a+5b+3c=58 \text{②} \end{cases}$$

① \times 2-②得， $a+b+c=6$ ，则 $5a+5b+5c=30$ ；

答：购买5支铅笔、5块橡皮、5本日记本共需30元。

【点睛】本题考查了利用整体思想解方程组，解题关键是熟练利用整体思想，通过整体运算求解。

10. (2022秋·全国·八年级期末) 阅读下列材料：

小明同学在学习二元一次方程组时遇到了这样一个问题：解方程组
$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{4} + \frac{2x-3y}{3} = 7 \\ \frac{2x+3y}{3} + \frac{2x-3y}{2} = 8 \end{cases}$$
，小明发现如果用

代入消元法或加减消元法求解，运算量比较大，容易出错。如果把方程组中的 $(2x+3y)$ 看成一个整体，把 $(2x-3y)$ 看成一个整体，通过换元，可以解决问题。以下是他的解题过程：

令 $m=2x+3y$ ， $n=2x-3y$ 。

原方程组化为
$$\begin{cases} \frac{m}{4} + \frac{n}{3} = 7 \\ \frac{m}{3} + \frac{n}{2} = 8 \end{cases}$$
，

解得
$$\begin{cases} m=60 \\ n=-24 \end{cases}$$
，

把
$$\begin{cases} m=60 \\ n=-24 \end{cases}$$
代入 $m=2x+3y$ ， $n=2x-3y$ ，

得
$$\begin{cases} 2x+3y=60 \\ 2x-3y=-24 \end{cases}$$
，

解得
$$\begin{cases} x=9 \\ y=14 \end{cases}$$
。

\therefore 原方程组的解为
$$\begin{cases} x=9 \\ y=14 \end{cases}$$
。

请你参考小明同学的做法解方程组：

(1)
$$\begin{cases} 2(x+1)+3(y-2)=1 \\ (x+1)-2(y-2)=4 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{5} = -3 \\ 2(x+y) - 3x + 3y = 26 \end{cases}$$

【答案】(1)
$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}$$

【分析】(1) 令 $m = x + 1$, $n = y - 2$, 原方程组变形为 $\begin{cases} 2m + 3n = 1 \\ m - 2n = 4 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases}$, 还原方程组得

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = -1 \end{cases}, \text{ 求解即可.}$$

(2) 令 $p = x + y$, $q = x - y$. 仿照原题的解法求解即可.

【详解】(1) 令 $m = x + 1$, $n = y - 2$,

$$\text{方程组} \begin{cases} 2(x+1) + 3(y-2) = 1 \\ (x+1) - 2(y-2) = 4 \end{cases} \text{ 变形为 } \begin{cases} 2m + 3n = 1 \\ m - 2n = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} m = 2 \\ n = -1 \end{cases},$$

$$\text{所以} \begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 2 = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

(2) 令 $p = x + y$, $q = x - y$.

$$\text{原方程组化为} \begin{cases} \frac{p}{2} + \frac{q}{5} = -3 \\ 2p - 3q = 26 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} p = -2 \\ q = -10 \end{cases},$$

$$\text{把} \begin{cases} p = -2 \\ q = -10 \end{cases} \text{ 代入 } p = x + y, q = x - y.$$

$$\text{得} \begin{cases} x + y = -2 \\ x - y = -10 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -6 \\ y = 4 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了换元法解方程组, 熟练掌握换元法解方程组的意义是解题的关键.

考点 4: 含有字母参数的二元一次方程组

典例: (2022 春·北京西城·七年级校考期中) 如果关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = 2m \\ x - y = 3m + 5 \end{cases}$ 的解互为相反

数, 求 m 的值.

【答案】5

【分析】根据方程组的解互为相反数得出 $x+y=0$ ，利用代入消元法分别用 m 表示出 x 、 y 的值，再代入另一个方程求解 m 即可。

【详解】解：∵ $\begin{cases} 3x+2y=2m \text{ ①} \\ x-y=3m+5 \text{ ②} \end{cases}$ 的解互为相反数，

∴ $x+y=0$ ③，

将③代入①得 $x=2m$ ，

将 $x=2m$ 代入③得 $y=-2m$ ，

将 $x=2m$ ， $y=-2m$ 代入②中得 $2m+2m=3m+5$ ，

∴ $m=5$ 。

方法或规律点拨

本题考查解二元一次方程组，解题的关键是用参数分别表示出未知数。

巩固练习

1. (2023 秋·重庆大渡口·八年级重庆市第九十五初级中学校校考期末) 关于 x ， y 的二元一次方程组

$\begin{cases} 3x+5y=a+2 \\ 2x+3y=a \end{cases}$ 的解适合 $x+y=10$ ，则 a 的值为 ()

A. 14 B. 12 C. 6 D. -10

【答案】B

【分析】先将方程组中上式减去下式可得 $x+2y=2$ ，结合 $x+y=10$ ，可求出 x ， y 的值，再代入方程组中即可求出 a 的值。

【详解】解：关于 x ， y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+5y=a+2 \\ 2x+3y=a \end{cases}$ ，上式减去下式得 $x+2y=2$ ，

∴ $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=10 \end{cases}$ ，解方程组得， $\begin{cases} x=18 \\ y=-8 \end{cases}$ ，代入方程 $2x+3y=a$ 得， $2 \times 18 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12 = a$ ，

∴ $a=12$ ，

故选：B。

【点睛】本题主要考查解二元一次方程组的值求参数，掌握解二元一次方程组的方法（代入法，加减法）是解题的关键。

2. (2022 秋·全国·八年级专题练习) 甲乙两人同时解方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx-7y=8 \end{cases}$ 时，甲正确解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ，乙因抄错 c

而解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ ，则 a ， c 的值是 ()

A. $\begin{cases} a=4 \\ c=-2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a=4 \\ c=5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a=-4 \\ c=-2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a=4 \\ c=-11 \end{cases}$

【答案】A

【分析】根据方程组解的定义，无论 c 是对是错，甲和乙求出的解均为 $ax+by=2$ 的解. 将 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 分别代入 $ax+by=2$ ，组成方程组，从而得出 a 的值. 将甲的正确解 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 代入 $cx-7y=8$ ，从而得出 c 的值.

【详解】解：将 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 分别代入 $ax+by=2$ ，得

$$\begin{cases} 3a-2b=2 \\ -2a+2b=2 \end{cases},$$

解得 $a=4$ ，

把 $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 代入 $cx-7y=8$ ，得

$$3c+14=8,$$

所以 $c=-2$.

故选：A.

【点睛】本题需要对二元一次方程组的解和二元一次方程的解的定义有一个深刻的认识，知道不定方程有无数个解.

3. (2022 秋·广东茂名·八年级统考期末) 已知方程组 $\begin{cases} 2x+5y=k \\ 7x+4y=3k+11 \end{cases}$ 的解满足 $5x-y=3$ ，则 k 的值是 ()

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

【答案】D

【分析】利用方程组中的第二个方程减去第一个方程，再根据 $5x-y=3$ 可得一个关于 k 的一元一次方程，解方程即可得.

【详解】解： $\begin{cases} 2x+5y=k \text{ ①} \\ 7x+4y=3k+11 \text{ ②} \end{cases}$ ，

由 ② - ① 得： $5x-y=2k+11$ ，

\therefore 方程组 $\begin{cases} 2x+5y=k \\ 7x+4y=3k+11 \end{cases}$ 的解满足 $5x-y=3$ ，

$$\therefore 2k+11=3,$$

解得 $k = -4$,

故选: D.

【点睛】本题考查了二元一次方程组, 熟练掌握二元一次方程组的解法是解题关键.

4. (2022 秋·全国·八年级专题练习) 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+2y=k \\ 2x+3y=3k-1 \end{cases}$, 以下结论正确的有()个.

- ① 不论 k 取什么实数, $x+3y$ 的值始终不变;
- ② 存在实数 k , 使得 $x+y=0$;
- ③ 当 $y-x=-1$ 时, $k=1$;
- ④ 当 $k=0$ 时, 方程组的解也是方程 $x-2y=-3$ 的解.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【分析】由 $(1) \times 3 - (2)$ 得: $x+3y=1$, 故①正确; 由 $(2) - (1)$ 得: $x+y=2k-1$, 可得 $k = \frac{1}{2}$ 时, $x+y=0$, 故②正确; 解出方程组可得 $\begin{cases} x=3k-2 \\ y=1-k \end{cases}$, 从而得到 $y-x=-k+1-3k+2=-4k+3$, 此时 $k=1$, 故③正确; 求出此时方程组的解再代入 $x-2y=-3$, 可得④错误, 即可求解.

【详解】解: $\begin{cases} x+2y=k(1) \\ 2x+3y=3k-1(2) \end{cases}$,

由 $(1) \times 3 - (2)$ 得: $x+3y=1$,

即不论 k 取什么实数, $x+3y$ 的值始终不变, 故①正确;

由 $(2) - (1)$ 得: $x+y=2k-1$,

\therefore 当 $2k-1=0$, 即 $k = \frac{1}{2}$ 时, $x+y=0$, 故②正确;

$\begin{cases} x+2y=k \\ 2x+3y=3k-1 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x=3k-2 \\ y=1-k \end{cases}$,

$\therefore y-x=-k+1-3k+2=-4k+3$,

当 $y-x=-1$ 时, $-4k+3=-1$,

解得: $k=1$, 故③正确;

当 $k=0$ 时, $x=-2, y=1$,

而 $x-2y=-2-2=-4 \neq -3$,

即 $x=-2, y=1$ 不是 $x-2y=-3$ 的解, 故④错误,

\therefore 正确的有①②③, 共 3 个,

故选：C.

【点睛】本题考查了含有参数的二元一次方程组的解法，正确解出含有参数的二元一次方程组（解中含有参数）是解决本题的关键.

5. (2022 秋·八年级单元测试) 若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 3x+y=k+1 \\ x+3y=3 \end{cases}$ 的解 x 、 y 为为相反数，则 $k = \underline{\quad}$.

【答案】 -4

【分析】方程组两方程相加表示出 $x+y$ ，根据 $x+y=0$ 求出 k 的值即可.

【详解】解： $\begin{cases} 3x+y=k+1 \textcircled{1} \\ x+3y=3 \textcircled{2} \end{cases}$ ，

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 得： $4(x+y) = k+4$ ，

由题意得： $x+y=0$ ，

可得 $k+4=0$ ，

解得： $k=-4$ ，

故答案为： -4.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的解，方程组的解即为能使方程组中两方程都成立的未知数的值.

6. (2022 春·北京·七年级校考阶段练习) 若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=4k \\ x-y=k \end{cases}$ 的解也是 $2x+y=10$ 的解，则 k 的值为_____.

【答案】 2

【分析】首先用含 k 的代数式表示 $2x+y$ ，再代入 $2x+y=10$ 求出 k .

【详解】解： $\begin{cases} x+2y=4k \textcircled{1} \\ x-y=k \textcircled{2} \end{cases}$ ，

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 得 $2x+y=5k$ ，

$\therefore 2x+y=10$ ，

$\therefore 5k=10$ ，

解得 $k=2$ ，

故答案为： 2.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的解，掌握用加减消元法，代入法解二元一次方程（组）是解题关键.

7. (2022 春·北京·七年级校考期末) 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x-2y=a \\ 2x+y=3 \end{cases}$ 的解满足关系 $y=x$, 则 a 的值为 _____.

【答案】 1

【分析】 把 $y=x$ 分别代入 $3x-2y=a$ 和 $2x+y=3$, 计算出 x 的值, 通过比较即可得出 a 的值.

【详解】 解: 把 $y=x$ 代入 $3x-2y=a$, 得 $3x-2x=a$, 解得 $x=a$;

把 $y=x$ 代入 $2x+y=3$, 得 $2x+x=3$, 解得 $x=1$;

因此 $a=1$,

故答案为: 1.

【点睛】 本题考查根据二元一次方程组的解的情况求参数, 根据所给方程组的特点, 直接将 $y=x$ 代入计算是快速解题的关键.

8. (2021 春·山东济南·七年级济南十四中校考期中) 已知方程组 $\begin{cases} 2x-2y=m+3 \\ x+2y=2m+4 \end{cases}$ 的解 x 和 y 互为相反数, 求 m 的值.

【答案】 $m=-\frac{19}{9}$

【分析】 根据加减消元法解二元一次方程组, 得出方程组的解, 再根据 x, y 互为相反数, 可得 m 的方程, 解方程即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} 2x-2y=m+3 \text{①} \\ x+2y=2m+4 \text{②} \end{cases}$,

①+② 得: $3x=3m+7$, 解得: $x=m+\frac{7}{3}$,

把 $x=m+\frac{7}{3}$ 代入②得: $m+\frac{7}{3}+2y=2m+4$,

解得: $y=\frac{1}{2}m+\frac{5}{6}$,

又 $\because x, y$ 互为相反数,

$\therefore m+\frac{7}{3}+\frac{1}{2}m+\frac{5}{6}=0$,

解得: $m=-\frac{19}{9}$.

【点睛】 本题考查了加减消元法解二元一次方程组, 正确的计算是解题的关键.

9. (2022 秋·全国·八年级专题练习) 定义: 数对 (x, y) 经过一种运算可以得到数对 (x', y') , 将该运算记作:

$d(x, y) = (x', y')$, 其中 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = ax - by \end{cases}$ (a, b 为常数).

例如, 当 $a=1, b=1$ 时, $d(-2, 3) = (1, -5)$.

(1) 当 $a=2, b=1$ 时, $d(3, 1) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $d(-3, 5) = (-1, 9)$, 求 a 和 b 的值;

(3) 如果组成数对 (x, y) 的两个数 x, y 满足二元一次方程 $x-3y=0$ 时, 总有 $d(x, y) = (-x, -y)$, 求 a, b 的值

【答案】 (1) (7, 5)

(2) $a = -\frac{4}{3}, b = -1$

(3) $a = -\frac{2}{3}, b = -1$

【分析】 (1) 由题意可得: $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$, 再将 $x=3, y=1$ 代入即可求解;

(2) 由题意可得: $\begin{cases} -3a + 5b = -1 \\ -3a - 5b = 9 \end{cases}$, 求出方程组的解即可;

(3) 由题意可得: $\begin{cases} 3a + b = -3 \\ 3a - b = -1 \end{cases}$, 求解方程组即可.

【详解】 (1) 当 $a=2, b=1$ 时, $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$,

$$\therefore x' = 2 \times 3 + 1 = 7, y' = 2 \times 3 - 1 = 5,$$

$$\therefore d(3, 1) = (7, 5),$$

(2) $\therefore d(-3, 5) = (-1, 9)$,

$$\therefore \begin{cases} -3a + 5b = -1 \\ -3a - 5b = 9 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -1 \end{cases}$,

$\therefore a$ 和 b 的值分别为 $-\frac{4}{3}, -1$;

(3) $\therefore d(x, y) = (-x, -y), x-3y=0$,

$$\therefore d(3y, y) = (-3y, -y),$$

$$\therefore \begin{cases} 3ay + by = -3y \\ 3ay - by = -y \end{cases},$$

化简得：
$$\begin{cases} 3a+b=-3 \\ 3a-b=-1 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a=-\frac{2}{3} \\ b=-1 \end{cases}$$

∴ a 和 b 的值分别为 $-\frac{2}{3}$ ， -1 。

【点睛】 本题考查解二元一次方程组，熟练掌握解二元一次方程组的方法，弄清定义，能将所求的问题转化为二元一次方程组是解题的关键。

10. (2022 秋·八年级单元测试) 当 m ， n 分别取何值时，方程组 $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ mx+ny=7 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2mx-3ny=19 \\ 5y-x=3 \end{cases}$ 的解相同？

【答案】 $m=4$ ， $n=-1$

【分析】 联立不含 m 与 n 的方程组成方程组，求出解代入剩下方程求出 m 与 n 的值即可。

【详解】 解：联立得：
$$\begin{cases} 3x-2y=4 \text{ ①} \\ -x+5y=3 \text{ ②} \end{cases}$$

① + ② × 3 得： $13y=13$ ，

解得： $y=1$ ，

把 $y=1$ 代入②得： $x=2$ ，

代入得：
$$\begin{cases} 2m+n=7 \\ 4m-3n=19 \end{cases}$$

解得： $m=4$ ， $n=-1$ 。

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的解，方程组的解即为能使方程组中两方程都成立的未知数的值。

考点 5：配方法应用

典例 1： (2022 秋·北京东城·九年级北京二中校联考期末) 把关于 x 的一元二次方程 $2x^2-4x+m=0$ 配方，得

到 $(x+p)^2=\frac{1}{2}$ 。

(1) 写出完整的配方过程，并求常数 m 与 p 的值；

(2) 求此方程的解。

【答案】 (1) $m=1$ ， $p=-1$

(2) $x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ， $x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

【分析】 (1) 把 $2x^2-4x+m=0$ 配方即可得出 $m=1$ ， $p=-1$ ；

(2) 配方得出 $(x-1)^2=\frac{1}{2}$ ，开方得出 $x-1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求出即可。

【详解】(1) 解: $2x^2 - 4x = -m$

$$x^2 - 2x = -\frac{m}{2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = -\frac{m}{2} + 1$$

$$(x-1)^2 = -\frac{m}{2} + 1$$

$$\therefore m = 1, \quad p = -1$$

(2) 解: $\because (x-1)^2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

方法或规律点拨

本题考查了解一元二次方程的应用，题目是一道基础题，难度适中，主要考查学生的计算能力。

典例 2: (2022 秋·辽宁沈阳·九年级沈阳市第四十三中学校考期中) 我们已经学习了利用配方法解一元二次方程，其实配方法还有其他重要应用。

例如：求代数式 $x^2 + 4x + 5$ 的最小值。解答过程如下：

解： $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x+2)^2 + 1$

$$\because (x+2)^2 \geq 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + 1 \geq 1$$

\therefore 当 $x = -2$ 时， $x^2 + 4x + 5$ 有最小值，是 1

(1) 仿照上述方法，求代数式 $x^2 - 6x + 12$ 的最小值；

(2) $-x^2 + 8x - 1$ 有最_____ (直接填“大”或“小”) 值，是_____ (直接填空)。

【答案】(1)3

(2)大; 15

【分析】(1) 利用配方法把原式变形，根据偶次方的非负性解答即可；

(2) 利用配方法把原式变形，根据偶次方的非负性解答即可；

【详解】(1) $x^2 - 6x + 12$,

$$= (x^2 - 6x + 9) + 3,$$

$$= (x-3)^2 + 3,$$

$$\therefore (x-3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (x-3)^2 + 3 \geq 3,$$

∴当 $x=3$ 时, 代数式 $x^2 - 6x + 12$ 的最小值是 3.

$$(2) -x^2 + 8x - 1,$$

$$= (-x^2 - 8x + 16) + 15,$$

$$= -(x-4)^2 + 15,$$

$$\because (x-4)^2 \geq 0,$$

$$\therefore -(x-4)^2 \leq 0,$$

$$\therefore -(x-4)^2 + 15 \leq 15,$$

∴当 $x=4$ 时, 代数式 $-x^2 + 8x - 1$ 的最小值是 15.

故答案为: 大, 15.

方法或规律点拨

本题主要考查了配方法, 非负数的性质, 掌握配方法的一般步骤和偶次方的非负性是解题的关键.

巩固练习

1. (2020·江苏句容·初一期末) 已知方程组 $\begin{cases} x+2y=k \\ 2x+y=-1 \end{cases}$ 的解满足 $x+y+1 > 0$, 则整数 k 的最小值为 ()

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

2. 在关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=a-3 \\ 3x-y=2a \end{cases}$ 的下列说法中, 错误的是 ()

- A. 当 $a=2$ 时, 方程的两根互为相反数 B. 当且仅当 $a=-5$ 时解得 x 为 y 的 2 倍
C. x, y 满足关系式 $x-5y=6$ D. 不存在自然数 a 使得 x, y 均为正整数

3. (2020·南阳市实验学校初一月考) 七(1)班“奋斗组”关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+3y=4-a \\ x-5y=3a \end{cases}$, 进行小组下面

是两名成员得出的结论:

小明: $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ 是方程组的解;

小东: 不论 a 取什么实数, $x+y$ 的值始终不变.

请判断这两名组员的结论是否正确, 并说明理由.

4. 2020·绍兴市文澜中学初一期中) 若关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=5k \\ x-y=9k \end{cases}$ 的解也是二元一次方程 $2x+3y$

=6 的解, 求 k 的值.

5. (2020·河南宛城·初一月考) 八年级(1)班“奋斗组”对关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+3y=4-a \\ x-5y=3a \end{cases}$ 进行讨论, 下

列是两个小组成员分别得出的结论:

小金: $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ 是方程组的解;

小蝶: 不论 a 取什么实数, $x+y$ 的值始终不变.

请问“奋斗组”的两名成员谁的结论是正确的, 谁的结论是错误的? 并说明理由.

6. (2020·石家庄市第二十七中学初一期中) 已知关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-2y+mx+9=0 \end{cases}$

(1) 请直接写出方程 $x+2y=5$ 的所有正整数解;

(2) 若方程组的解满足 $x+y=0$, 求 m 的值;

(3) 无论实数 m 取何值, 方程 $x-2y+mx+9=0$ 总有一个公共解, 请直接写出这个公共解.

考点 5: 配方法应用

典例 1: (2022 秋·北京东城·九年级北京二中校联考期末) 把关于 x 的一元二次方程 $2x^2-4x+m=0$ 配方, 得

到 $(x+p)^2 = \frac{1}{2}$.

(1) 写出完整的配方过程, 并求常数 m 与 p 的值;

(2) 求此方程的解.

【答案】 (1) $m=1, p=-1$

(2) $x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

【分析】 (1) 把 $2x^2-4x+m=0$ 配方即可得出 $m=1, p=-1$;

(2) 配方得出 $(x-1)^2 = \frac{1}{2}$, 开方得出 $x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 求出即可.

【详解】 (1) 解: $2x^2-4x = -m$

$$x^2-2x = -\frac{m}{2}$$

$$x^2-2x+1 = -\frac{m}{2}+1$$

$$(x-1)^2 = -\frac{m}{2}+1$$

$$\therefore m=1, p=-1$$

(2) 解: $\because (x-1)^2 = \frac{1}{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/876020043134010134>