

## 6.2 立方根



### 知识剖析

**立方根的概念：**如果一个数的立方等于  $a$ ，即  $x^3 = a$ ，那么  $x$  叫做  $a$  的立方根或三次方根。

**表示方法：**数  $a$  的立方根记作  $\sqrt[3]{a}$ ，读作三次根号  $a$

**立方根的性质：**

- 1) 任何实数都有唯一确定的立方根。
- 2) 正数的立方根是一个正数，负数的立方根是一个负数。
- 3) 0 的立方根是 0。
- 4) 互为相反数的两个数的立方根互为相反数。

**开立方概念：**求一个数的立方根的运算。

**开立方的表示：** $(\sqrt[3]{a})^3 = a$      $\sqrt[3]{a^3} = a$      $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$  ( $a$  取任何数)

这说明三次根号内的负号可以移到根号外面。



### 经典例题

#### 【题型一】求一个数的立方根

**【典题】**(2022 春·广东江门·七年级新会陈经纶中学校考期中) 计算  $\sqrt[3]{27}$  的结果是 ( )

- A.  $\pm 3\sqrt{3}$       B.  $3\sqrt{3}$       C.  $\pm 3$       D. 3

**【答案】**D

**【详解】**解： $\because 3^3 = 27$ ， $\therefore \sqrt[3]{27} = 3$ 。

故选：D。

#### 巩固练习

1. (★) (2022 春·四川自贡·七年级校考期中) 下面有四种说法，其中正确的是 ( )

- A. -64 的立方根是 4      B.  $\frac{1}{27}$  的立方根是  $\frac{1}{3}$   
C. 49 的算术平方根是  $\pm 7$       D.  $\sqrt{9}$  的平方根是  $\pm 3$

**【答案】**B

**【分析】**利用平方根、算术平方根、立方根的定义判定即可；

**【详解】**A. -64 的立方根是 -4，错误；

B.  $\frac{1}{27}$  的立方根是  $\frac{1}{3}$ ，正确；

C. 49 的算术平方根是 7，错误；

D.  $\sqrt{9}$  的平方根是， $\pm\sqrt{3}$ ，错误；

故答案为 B

【点睛】 本题考查了平方根、算术平方根、立方根的定义，熟练掌握定义是解题关键.

2. (★) (2022 春·河北保定·七年级统考期中) 下列计算正确的是 ( )

A.  $\sqrt{25} = \pm 5$

B.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$

C.  $\sqrt[3]{125} = \pm 5$

D.  $\sqrt[3]{-27} = -3$

【答案】 D

【分析】 根据算术平方根和立方根的性质，逐项判断即可求解.

【详解】 解：A、 $\sqrt{25} = 5$ ，故本选项错误，不符合题意；

B、 $\sqrt{(-3)^2} = 3$ ，故本选项错误，不符合题意；

C、 $\sqrt[3]{125} = 5$ ，故本选项错误，不符合题意；

D、 $\sqrt[3]{-27} = -3$ ，故本选项正确，符合题意；

故选： D

【点睛】 本题主要考查了算术平方根和立方根的性质，熟练掌握算术平方根和立方根的性质是解题的关键.

3. (★) (2022 秋·浙江丽水·七年级校联考期中) 已知  $a^2 = 16$ ， $b^3 = -27$ ，且  $|a-b| = a-b$ ，则  $a+b$  的值为 ( )

A. -1

B. -7

C. 1

D. 1 或 -7

【答案】 C

【分析】 根据平方根的定义及立方根的定义求出  $a = \pm 4, b = -3$ ，利用  $|a-b| = a-b$  法确定  $a=4, b=-3$ ，代入  $a+b$  计算即可.

【详解】  $\because a^2 = 16, b^3 = -27,$

$\therefore a = \pm 4, b = -3,$

$\because |a-b| = a-b,$

$\therefore a \geq b,$

$\therefore a=4, b=-3,$

$\therefore a+b=4-3=1,$

故选： C.

**【点睛】**此题考查平方根的定义及立方根的定义，绝对值的性质，有理数的加减法，正确理解平方根的定义及立方根的定义求出  $a$  及  $b$  的值是解题的关键。

4. (★) (2022 春·广东汕头·七年级期中) 下列各组数互为相反数的是 ( )

- A.  $\sqrt{2^2}$  和  $\sqrt{(-2)^2}$       B.  $-\sqrt[3]{8}$  和  $\sqrt[3]{-8}$       C.  $(\sqrt{2})^2$  和  $\sqrt{(-2)^2}$       D.  $\sqrt[3]{8}$  与  $\sqrt[3]{-8}$

**【答案】**D

**【分析】**利用二次根式的和立方根的定义计算出  $\sqrt{2^2}=2$ ， $\sqrt{(-2)^2}=2$ ， $-\sqrt[3]{8}=-2$ ， $\sqrt[3]{-8}=-2$ ，然后对各选项进行判断。

**【详解】**解：A、 $\sqrt{2^2}=2$ ， $\sqrt{(-2)^2}=2$ ，则  $\sqrt{2^2}=\sqrt{(-2)^2}$ ，所以该选项不符合题意；

B、 $-\sqrt[3]{8}=-2$ ， $\sqrt[3]{-8}=-2$ ，则  $-\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{-8}$ ，所以该选项不符合题意；

C、 $(\sqrt{2})^2=2$ ， $\sqrt{(-2)^2}=2$ ，则  $(\sqrt{2})^2=\sqrt{(-2)^2}$ ，所以该选项不符合题意；

D、 $\sqrt[3]{8}=2$ ， $\sqrt[3]{-8}=-2$ ，则  $\sqrt[3]{8}$  与  $\sqrt[3]{-8}$  互为相反数，所以该选项符合题意。

故选：D。

**【点睛】**本题考查了二次根式的性质与化简：熟练掌握二次根式的性质是解决此类问题的关键。也考查了立方根和相反数。

5. (★) (2022 春·湖南长沙·七年级校考期末) 如果  $\sqrt[3]{2.37}=1.333$ ， $\sqrt[3]{23.7}\approx 2.872$ ，那么  $\sqrt[3]{2370}$  约等于 ( )

- A. 28.72      B. 0.2872      C. 13.33      D. 0.1333

**【答案】**C

**【分析】**由  $2370=2.37\times 10^3$  及立方根的性质即可求得结果。

**【详解】** $\sqrt[3]{2370}=\sqrt[3]{2.37\times 10^3}=10\sqrt[3]{2.37}=10\times 1.333=13.33$

故选：C

**【点睛】**本题考查了立方根的性质，即  $\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ ，掌握此性质是本题的关键。

6. (★) (2022 春·湖北黄冈·七年级校联考期中) 若一个数的立方根等于这个数的算术平方根，则这个数是 \_\_\_\_\_。

**【答案】**0 或 1

**【分析】**设这个数为  $a$ ，由立方根等于这个数的算术平方根可以列出方程，解方程即可求出  $a$ 。

**【详解】**解：设这个数为  $a$ ，由题意知，

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0),$$

解得： $a=1$  或  $0$ ，

故答案为： $1$  或  $0$

**【点睛】** 本题主要考查算术平方根和立方根等知识点，基础题需要重点掌握，同学们很容易忽略  $a \geq 0$ 。

7. (★) (2022 春·吉林四平·七年级统考期末) 已知一个数的两个平方根分别是  $3a+2$  和  $a+14$ ，求这个数的立方根。

**【答案】**  $\sqrt[3]{100}$

**【分析】** 根据平方根的性质可得关于  $a$  的方程，解方程求出  $a$  的值，继而确定出这个正数，再根据立方根的概念进行求解即可得。

**【详解】** 解：根据题意得： $3a+2+a+14=0$ ，

解得： $a=-4$ ，

$$\therefore (3a+2)^2 = (-4 \times 3 + 2)^2 = 100,$$

$\therefore$  这个正数是  $100$ ，

$\therefore$  这个数的立方根是  $\sqrt[3]{100}$ 。

**【点睛】** 本题考查了平方根、立方根的概念，熟练掌握平方根、立方根的概念是解题的关键。

8. (★) (2022 春·河南驻马店·七年级统考期中) 计算：

$$(1) 2\sqrt{2} + \sqrt{9} + \sqrt[3]{-8} + |\sqrt{2} - 2|;$$

$$(2) \sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt{(-2)^4} + \sqrt[3]{1 - \frac{19}{27}} - (-1)^{2022}.$$

**【答案】** (1)  $\sqrt{2} + 3$ ；

$$(2) -\frac{17}{6}.$$

**【分析】** (1) 根据绝对值、平方根和立方根的性质化简每个式子，然后求解即可；

(2) 根据平方根、立方根以及乘方的性质，求解每个式子，然后求解即可。

(1)

$$\text{解：} 2\sqrt{2} + \sqrt{9} + \sqrt[3]{-8} + |\sqrt{2} - 2|$$

$$= 2\sqrt{2} + 3 - 2 + 2 - \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} + 3;$$

(2)

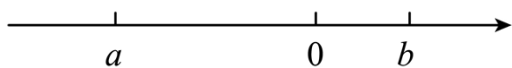
$$\begin{aligned}
 \text{解: } & \sqrt{2\frac{1}{4}} - \sqrt{(-2)^4} + \sqrt[3]{1 - \frac{19}{27}} - (-1)^{2022} \\
 &= \sqrt{\frac{9}{4}} - 2^2 + \sqrt[3]{\frac{8}{27}} - 1 \\
 &= \frac{3}{2} - 4 + \frac{2}{3} - 1 \\
 &= -\frac{17}{6}.
 \end{aligned}$$

**【点睛】**此题考查了平方根，立方根、绝对值以及乘方运算，解题的关键是熟练掌握平方根，立方根、绝对值以及乘方的性质，正确求解每个式子的值.

9. (★★) (2022 春·四川德阳·七年级四川省德阳市第二中学校校考期中) 计算

$$(1) \sqrt{(-2)^2} - |3 - \pi| + \sqrt[3]{\pi^3}.$$

$$(2) \text{已知实数 } a, b \text{ 在数轴上的对应点如图所示, 化简: } -\sqrt{(-3)^2} + \sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{a^2} - \sqrt[3]{-27}.$$



**【答案】**(1)5

(2) $b$

**【分析】**(1) 先求算术平方根、绝对值、立方根，然后进行加减运算即可；

(2) 由数轴可得  $a < 0 < b$ ，即  $a - b < 0$ ，求算术平方根、立方根，然后进行加减运算即可.

(1)

$$\text{解: 原式} = 2 - \pi + 3 + \pi = 5.$$

(2)

$$\text{解: 由数轴可得, } a < 0 < b,$$

$$\therefore a - b < 0,$$

$$\therefore \text{原式} = -3 + [-(a-b)] - (-a) - (-3) = -3 - a + b + a + 3 = b.$$

**【点睛】**本题考查了算术平方根、绝对值、立方根，根据点在数轴的位置判断式子的正负等知识. 解题的关键在于确定  $a, b$  的大小关系并正确的计算.

**【题型二】**已知一个数的立方根求这个数

**【典题】**(2022 春·全国·七年级期末) 若一个数的立方根是  $-3$ ，则该数为( )

A.  $-\sqrt[3]{3}$

B.  $-27$

C.  $\pm\sqrt[3]{3}$

D.  $\pm 27$

【答案】B

【详解】因为 $(-3)^3 = -27$ ，故选B.

### 巩固练习

1. (★) (2022春·广东汕头·七年级期中) 若 $x$ 的立方根是 $-\frac{1}{4}$ ，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $-\frac{1}{64}$

【分析】根据 $(-\frac{1}{4})^3 = -\frac{1}{64}$ 求解.

【详解】因为 $(-\frac{1}{4})^3 = -\frac{1}{64}$ ，所以 $-\frac{1}{64}$ 的立方根是 $-\frac{1}{4}$ ，则 $x = -\frac{1}{64}$

故答案为 $-\frac{1}{64}$

【点睛】如果一个数的立方等于 $a$ ，那么这个数叫做 $a$ 的立方根；正数有一个正的立方根，负数有一个负的立方根，0的立方根是0.

2. (★) (2022春·山东济宁·七年级统考期中) 若 $a^2=9$ ， $\sqrt[3]{b} = -2$ ，则 $a+b$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】-5 或 -11

【分析】先根据平方根和立方根的定义得出 $a$ 、 $b$ 的值，再分情况计算可得.

【详解】 $\because a^2=9$ ， $\sqrt[3]{b} = -2$ ，

$\therefore a=3$  或  $a=-3$ ， $b=-8$ ，

当 $a=3$ 时， $a+b=3-8=-5$ ；

当 $a=-3$ 时， $a+b=-3-8=-11$ ；

故答案为-5 或-11.

【点睛】本题主要考查立方根、平方根，解题的关键是熟练掌握平方根、立方根的定义.

3. (★) (2022秋·黑龙江绥化·七年级期末) 一个数的立方根是4，这个数的平方根是 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $\pm 8$

【详解】 $\because$ 一个数的立方根是4，

$\therefore$ 这个数是 $4^3=64$ ，

$\therefore 64$ 的平方根是 $\pm 8$ ，

$\therefore$ 这个数的平方根是 $\pm 8$ ，

故答案为： $\pm 8$ .

### 【题型三】利用立方根解方程

**【典题】**（2022春·河南周口·七年级统考期中）求下列各式中的  $x$

$$(1)(x-1)^2 - 9 = 0$$

$$(2)27 + (1-2x)^3 = 0$$

**【答案】** (1)  $x=4$  或  $x=-2$

(2)  $x=2$

**【分析】** (1) 方程变形后，利用平方根定义开方即可求出  $x$  的值；

(2) 方程变形后，利用立方根定义开立方即可求出  $x$  的值.

**【详解】** (1) 解：方程变形得： $(x-1)^2=9$ ,

开方得： $x-1=3$  或  $x-1=-3$ ,

解得： $x=4$  或  $x=-2$ ;

(2) 解：方程变形得： $(1-2x)^3=-27$ ,

开立方得： $1-2x=-3$ ,

解得： $x=2$ .

**【点睛】** 此题考查了平方根和立方根的定义，熟练掌握各自的定义是解本题的关键.

### 巩固练习

1. (★)（2022春·浙江台州·七年级校联考期中）求下列各式中  $x$  的值：

$$(1)(2x+7)^3 = -27$$

$$(2)(x-2)^2 - 36 = 0$$

**【答案】** (1)  $x = -5$

(2)  $x_1 = 8, x_2 = -4$

**【分析】** (1) 根据立方根定义求解即可；

(2) 移项后，根据平方根定义求解即可.

**【详解】** (1) 解：开立方得： $2x+7 = -3$ ,

解得： $x = -5$ .

(2) 方程整理得： $(x-2)^2 = 36$ ,

开方得： $x-2 = \pm 6$ ,

解得： $x_1 = 8, x_2 = -4$ .

**【点睛】**此题考查了立方根，以及平方根，熟练掌握各自的定义是解本题的关键。

2. (★) (2022 春·全国·七年级统考期中) 解方程：

(1)  $3(x-1)^2=27$ .

(2)  $(x+1)^3+\frac{27}{125}=0$ .

**【答案】**(1) $x_1=-2, x_2=4$

(2) $x=-1.6$

**【分析】**(1) 利用直接开平方法解方程；

(2) 利用立方根的性质解方程即可。

(1)

$3(x-1)^2=27,$

系数化为 1 得  $(x-1)^2=9,$

开平方得  $x-1=\pm 3,$

解得  $x_1=-2, x_2=4.$

(2)

$(x+1)^3+\frac{27}{125}=0,$

$(x+1)^3=-\frac{27}{125},$

开立方得  $x+1=-0.6,$

解得  $x=-1.6.$

**【点睛】**本题考查利用直接开平方解方程、利用立方根的性质解方程等知识，是基础考点，掌握相关知识是解题关键。

#### **【题型四】立方根的实际应用**

**【典题】**(2022 春·山东日照·七年级统考期中) 一个正方体的体积扩大为原来的 27 倍，则它的棱长变为原来的 ( ) 倍。

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

**【答案】**B

**【分析】**根据正方体的体积公式解答。

**【详解】**解：设原来正方体的棱长为  $a$ ，则原来正方体的体积为  $a^3$ ，

由题意可得现在正方体的体积为  $27a^3$ ，



$$\because \sqrt[3]{27a^3} = 3a,$$

$\therefore$ 现在正方体的棱长为  $3a$ ,

故选: B.

**【点睛】** 本题考查立方根的应用, 熟练掌握立方根的意义及正方体的体积计算方法是解题关键.

### 巩固练习

1. (★) (2022 春·湖南·七年级校联考期中) 随着张吉怀高铁在 2021 年建成通车, 昔日饱受交通制约的湘西州, 也迎来了便捷的现代化快速交通. 在湘西州花垣县, 还有一个现代化的交通大工程——湘西机场正在建设. 建设机场多余的土方呈圆锥形, 土方的底面直径为 100 米, 高度为 50 米. 现在用卡车将土方运送到 15 公里外的垃圾池进行填平, 已知垃圾池是规则的立方体, 并且土方刚好填满垃圾池. 请问垃圾池的底面边长大约是多少米 ( $\pi$  取 3) ( )

- A. 50                      B. 60                      C. 70                      D. 40

**【答案】** A

**【分析】** 根据题意得: 垃圾池的体积等于圆锥形土方的体积, 求出圆锥形土方的体积, 即可求解.

**【详解】** 解: 根据题意得: 垃圾池的体积等于圆锥形土方的体积,

$$\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{100}{2}\right)^2 \times 50 \approx 50^3,$$

$\therefore$ 垃圾池的底面边长大约是  $\sqrt[3]{50^3} = 50$  米.

故选: A

**【点睛】** 本题主要考查了立方根的应用, 明确题意, 理解垃圾池的体积等于圆锥形土方的体积是解题的关键.

2. (★) (2022 秋·浙江宁波·七年级浙江省鄞州区宋诏桥中学校考期中) 一个长、宽, 高分别为 50 cm、8 cm、20 cm 的长方体铁块锻造成一个立方体铁块, 则锻造成的立方体铁块的棱长是 ( )

- A. 20 cm                      B. 200 cm                      C. 40 cm                      D.  $\sqrt{80}$  cm

**【答案】** A

**【分析】** 先求出体积, 再求立方根即可.

**【详解】** 解:  $\because$ 铁块体积是  $50 \times 8 \times 20 = 8000(\text{cm}^3)$

$\therefore$ 锻造成的立方体铁块的棱长为:  $\sqrt[3]{8000} = 20(\text{cm})$ ,

故选: A.

【点睛】本题考查立方根的应用，会求立方根是解题的关键.

3. (★) (2022 春·山东临沂·七年级统考期末) 一个球形容器的容积为  $36\pi$  立方米，则它的半径  $R=$  \_\_\_\_\_ 米. (球的体积:  $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ , 其中  $R$  为球的半径)

【答案】3

【分析】根据  $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$  公式列等式，再开立方即可求解.

【详解】解:  $\because V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ ,

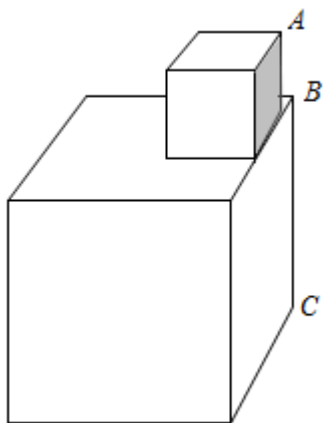
$$\therefore \frac{4}{3}\pi R^3=36\pi,$$

解得  $R=3$ ;

故答案为: 3.

【点睛】本题主要考查了开立方运算，根据  $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$  公式列等式是解题的关键.

4. (★) (2022 春·山东德州·七年级统考期中) 现有两个大小不等的正方体茶叶罐，大正方体茶叶罐的体积为  $1000\text{cm}^3$ ，小正方体茶叶罐的体积为  $125\text{cm}^3$ ，将其叠放在一起放在地面上(如图)，则这两个茶叶罐的最高点 A 到地面的距离是 \_\_\_\_\_ cm.



【答案】15

【分析】直接利用立方根得出大正方体和小正方体的棱长进而得出答案.

【详解】解:  $\because$  大正方体的体积为  $1000\text{cm}^3$ ，小正方体的体积为  $125\text{cm}^3$ ,

$\therefore$  大立方体的棱长为  $10\text{cm}$ ，小立方体的棱长为  $5\text{cm}$ ,

$\therefore$  这个物体的最高点 A 到地面的距离是:  $10+5=15$  (cm).

故答案为: 15.

【点睛】此题主要考查了立方根，正确得出各条棱长是解题的关键.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/876105135204010140>