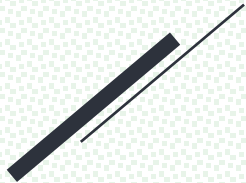


# 数列的递推关系

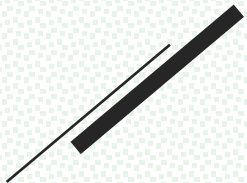
# 目录索引

基础回扣·考教衔接

以题梳点·核心突破



# 基础回扣·考教衔接



1.(人A选必二4.2.2节习题改编)如果数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=n^2+2n$ ,那么 $a_{12}$ 的值为( C )

A.23 B.24 C.25 D.26

**解析** 由数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n=n^2+2n$ ,可得

$$a_{12}=S_{12}-S_{11}=12^2+2\times 12-(11^2+2\times 11)=25.$$

故选C.

2.(人A选必二4.1节习题改编)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=9, a_{n+1}-a_n=n$ ,则 $a_4=($  C )

A.20 B.18 C.15 D.10

**解析** 因为 $a_{n+1}-a_n=n$ ,则 $a_4-a_3=3, a_3-a_2=2, a_2-a_1=1$ ,相加可得 $a_4-a_1=6$ ,即 $a_4=a_1+6$ ,且 $a_1=9$ ,所以 $a_4=a_1+6=15$ .故选C.

3.(人 A 选必二 4.1 节习题改编)已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}a_n, a_1 = 1$ , 则

$a_{11} = ( \text{ B } )$

A.  $\frac{1}{22}$

B.  $\frac{1}{26}$

C.  $\frac{3}{91}$

D.  $\frac{1}{35}$

**解析**  $a_{11} = \frac{11}{13}a_{10} = \frac{11}{13} \times \frac{10}{12}a_9 = \frac{11}{13} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{11}a_8 = \cdots = \frac{11}{13} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{11} \times \frac{8}{10} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}a_1$

$$= \frac{3 \times 2}{13 \times 12}a_1 = \frac{1}{26}.$$

故选 B.

4.(人A选必二4.1节习题改编)设 $S_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,且 $a_n=2S_n+5$ ,则

$S_{2024}=(\text{D})$

A.-2 024

B.2 024

C.-5

D.0

**解析** 由  $a_n=2S_n+5 \Rightarrow S_n-S_{n-1}=2S_n+5 \Rightarrow S_n+\frac{5}{2}=-S_{n-1}+\frac{5}{2}$  ( $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ ), 且

$a_1=2S_1+5=2a_1+5 \Rightarrow a_1=-5$ , 显然  $S_n \neq -\frac{5}{2}$ , 所以  $S_n+\frac{5}{2}$  是以  $-\frac{5}{2}$  为首项,  $-1$  为公比

的等比数列, 即  $S_n+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}(-1)^{n-1}$ , 故  $S_{2024}=-\frac{5}{2}(-1)^{2024-1}-\frac{5}{2}=0$ . 故选 D.

## 真题体验

1. (2023·天津,5) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_1=2, a_{n+1}=2S_n+2 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则

$a_4=(\text{C})$

A.16    B.32    C.54    D.162

**解析** 当  $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$  时,  $a_n = 2S_{n-1} + 2$ , 所以  $a_{n+1} - a_n = 2a_n$ , 即  $a_{n+1} = 3a_n$ . 当  $n=1$  时,  $a_2 = 2S_1 + 2 = 2a_1 + 2 = 6 = 3a_1$ , 所以数列  $\{a_n\}$  是首项为 2, 公比为 3 的等比数列, 则  $a_4 = a_1 q^3 = 54$ . 故选 C.



2.(2024·新高考 I,8)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ , $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$ ,且当 $x<3$ 时, $f(x)=x$ ,则下列结论中一定正确的是( **B** )

A. $f(10)>100$

B. $f(20)>1\ 000$

C. $f(10)<1\ 000$

D. $f(20)<10\ 000$

**解析**  $\because$ 当 $x<3$ 时, $f(x)=x$ , $\therefore f(1)=1,f(2)=2$ .

$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ,且 $f(x)>f(x-1)+f(x-2)$ ,

$\therefore f(3)>f(2)+f(1)=3,f(4)>f(3)+f(2)>5,f(5)>f(4)+f(3)>8,f(6)>f(5)+$

$f(4)>13,f(7)>f(6)+f(5)>21,f(8)>f(7)+f(6)>34,f(9)>f(8)+f(7)>55,f(10)>f(9)+f($

$8)>89,f(11)>f(10)+f(9)>144,f(12)>f(11)+f(10)>233,f(13)>f(12)+f(11)>377,f(1$

$4)>f(13)+f(12)>610,f(15)>f(14)+f(13)>987,f(16)>f(15)+f(14)>1$

$000.\therefore f(20)>1\ 000$ .

结合各选项知,选项B一定正确.

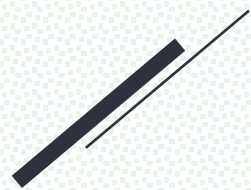
3.(2000·广东,15)设数列 $\{a_n\}$ 是首项为1的正项数列,且

$$(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0, \text{ 则它的通项公式 } a_n = \underline{\frac{1}{n}}.$$

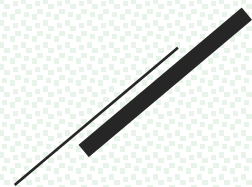
**解析** 由 $(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1}a_n = 0$ , 则 $[(n+1)a_{n+1} - na_n](a_{n+1} + a_n) = 0$ .

又数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 即 $a_n > 0, a_1 = 1$ , 所以 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 0$ , 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$ , 所以

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{n}.$$



以题梳点·核心突破



## 考点一 通项公式 $a_n$ 与 $S_n$ 的关系

例1(2024·浙江杭州期末)已知 $S_n$ 为公差为2的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和,若数列 $\frac{S_n}{a_n}$ 为等差数列.

(1)求 $a_n$ ;

(2)求数列 $\{S_{2^n}\}$ 的前 $n$ 项和.

解 (1) 因为数列  $\frac{S_n}{a_n}$  为等差数列, 所以  $2 \times \frac{S_2}{a_2} = \frac{S_1}{a_1} + \frac{S_3}{a_3}$ .

因为  $S_n$  为公差为 2 的等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,

$$\text{则 } 2 \times \frac{2a_1+2}{a_1+2} = 1 + \frac{3a_1+6}{a_1+4},$$

解得  $a_1=2$ .

$$\text{故 } a_n = 2 + 2(n-1) = 2n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = n^2 + n,$$

$$\text{故 } S_{2^n} = 4^n + 2^n,$$

$$\text{故数列 } \{S_{2^n}\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } \frac{4(1-4^n)}{1-4} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = \frac{4^{n+1}}{3} + 2^{n+1} - \frac{10}{3}.$$



## 知识提炼

在处理  $S_n, a_n$  的式子时, 依据为  $a_n =$

$$\begin{cases} S_1, n=1, \\ S_n - S_{n-1}, n \geq 2, \end{cases}$$

如果要证明  $f(a_n)$  为等差(等

比)数列, 就消去  $S_n$ , 如果要证明  $f(S_n)$  为等差(等

比)数列, 就消去  $a_n$ , 但有些题目求  $\{a_n\}$  的通项公

式时, 要先消去  $a_n$ , 求出  $S_n$ , 然后利用  $a_n =$

$S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$  求出  $a_n (n \geq 2)$ .

[对点训练1](2024·四川南充二模)在数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n$ 是其前 $n$ 项和,且 $3S_n - a_n = 64$ .

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $\forall n \in \mathbf{N}^*, \lambda - 1 < S_n \leq 4\lambda + 4$ 恒成立,求实数 $\lambda$ 的取值范围.

**解** (1)因为 $3S_n - a_n = 64$ ,当 $n=1$ 时, $3S_1 - a_1 = 64$ ,解得 $a_1 = 32$ .当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} - a_{n-1} = 64$ ,所以 $3S_n - a_n - 3S_{n-1} + a_{n-1} = 0$ ,所以 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1}$ ,所以 $\{a_n\}$ 是以32为首项, $-\frac{1}{2}$ 为公

比的等比数列,所以 $a_n = 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

(2)由(1)可得  $S_n = \frac{a_n + 64}{3} = \frac{64}{3} \left[ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = \begin{cases} \frac{64}{3} \left[ 1 - \frac{1}{2}^n \right], n \text{ 为偶数,} \\ \frac{64}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2}^n \right], n \text{ 为奇数,} \end{cases}$  所以当  $n$  为偶

数时,  $\frac{64}{3} > \frac{64}{3} \left[ 1 - \frac{1}{2}^n \right] \geq \frac{64}{3} \left[ 1 - \frac{1}{2}^2 \right] = 16$ , 当  $n$  为奇数时,  $\frac{64}{3} < \frac{64}{3} \left[ 1 + \frac{1}{2}^n \right] \leq$

$\frac{64}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = 32$ , 所以当  $n=1$  时  $S_n$  取得最大值为 32, 当  $n=2$  时  $S_n$  取得最小值为 16.

因为  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\lambda - 1 < S_n \leq 4\lambda + 4$  恒成立, 所以  $\begin{cases} \lambda - 1 < 16, \\ 32 \leq 4\lambda + 4, \end{cases}$  解得  $7 \leq \lambda < 17$ ,

所以实数  $\lambda$  的取值范围为  $[7, 17)$ .



## 考点二 累加、累乘法

例2(2024·江西南昌一模)对于各项均不为零的数列 $\{c_n\}$ ,我们定义:数列 $\frac{c_{n+k}}{c_n}$ 为数列 $\{c_n\}$ 的“ $k$ -比分数列”.已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_1=b_1=1$ ,且 $\{a_n\}$ 的“1-比分数列”与 $\{b_n\}$ 的“2-比分数列”是同一个数列.

(1)若 $\{b_n\}$ 是公比为2的等比数列,求数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ ;

(2)若 $\{b_n\}$ 是公差为2的等差数列,求 $a_n$ .

解 (1)由题意知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+2}}{b_n}$ .因为 $b_1=1$ ,且 $\{b_n\}$ 是公比为2的等比数列,所以

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$ .因为 $a_1=1$ ,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1,公比为4的等比数列,所以

$$S_n = \frac{1 \times (1-4^n)}{1-4} = \frac{1}{3} \times (4^n - 1).$$

(2)因为 $b_1=1$ ,且 $\{b_n\}$ 是公差为2的等差数列,所以 $b_n=2n-1$ ,所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b_{n+2}}{b_n} =$

$\frac{2n+3}{2n-1}$ ,所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{2n-3}$ ,  $\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{2n-1}{2n-5}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1}$  ( $n \geq 2$ ),所以 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{3 \times 1}$ .因为

$a_1=1$ ,所以 $a_n = \frac{1}{3} \times (4n^2 - 1)$ .

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/876220051105011011>