数列的递推关系

目录索引

基础回扣·考教衔接

1.(人A选必二4.2.2节习题改编)如果数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+2n$,那么a_{12}的值为(C)

A.23　B.24　C.25　D.26

解析　由数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2+2n$,可得

$a_{12}=S_{12}-S_{11}=12^2+2\times 12-(11^2+2\times 11)=25$.

故选C.

2.(人A选必二4.1节习题改编)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=9,a_{n+1}-a_n=n$,则$a_4=$(　C　)

A.20　B.18　C.15　D.10

解析　因为$a_{n+1}-a_n=n$,则$a_4-a_3=3,a_3-a_2=2,a_2-a_1=1$,相加可得$a_4-a_1=6$,即$a_4=a_1+6$,且$a_1=9$,所以$a_4=a_1+6=15$.故选C.

3.(人 A 选必二 4.1 节习题改编)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+3}a_n$,$a_1=1$,则

$a_{11}=$(　B　)

A. $\frac{1}{22}$　　B. $\frac{1}{26}$　　C. $\frac{3}{91}$　　D. $\frac{1}{35}$

解析　$a_{11}=\frac{11}{13}a_{10}=\frac{11}{13}\times\frac{10}{12}a_9=\frac{11}{13}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{11}a_8=\cdots=\frac{11}{13}\times\frac{10}{12}\times\frac{9}{11}\times\frac{8}{10}\times\cdots\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}a_1$

$=\frac{3\times2}{13\times12}a_1=\frac{1}{26}$.

故选 B.

4.(人A选必二4.1节习题改编)设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,且$a_n=2S_n+5$,则$S_{2\,024}=$(D)

A.-2 024　　B.2 024　　C.-5　　D.0

解析　由 $a_n=2S_n+5\Rightarrow S_n-S_{n-1}=2S_n+5\Rightarrow S_n+\frac{5}{2}=-\left(S_{n-1}+\frac{5}{2}\right)(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,且

$a_1=2S_1+5=2a_1+5\Rightarrow a_1=-5$,显然 $S_n\neq-\frac{5}{2}$,所以 $\left\{S_n+\frac{5}{2}\right\}$ 是以$-\frac{5}{2}$为首项,-1 为公比

的等比数列,即 $S_n+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}(-1)^{n-1}$,故 $S_{2\,024}=-\frac{5}{2}(-1)^{2\,024-1}-\frac{5}{2}=0$.故选 D.

真题体验

1.(2023·天津,5)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1=2,a_{n+1}=2S_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$,则$a_4=$(C)

A.16　B.32　C.54　D.162

解析　当$n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*$时,$a_n=2S_{n-1}+2$,所以$a_{n+1}-a_n=2a_n$,即$a_{n+1}=3a_n$.当$n=1$时,$a_2=2S_n+2=2a_1+2=6=3a_1$,所以数列$\{a_n\}$是首项为2,公比为3的等比数列,则$a_4=a_1q^3=54$.故选C.

2.(2024·新高考Ⅰ,8)已知函数$f(x)$的定义域为**R**,$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$,且当$x<3$时,$f(x)=x$,则下列结论中一定正确的是(　B　)

A.$f(10)>100$　　B.$f(20)>1\ 000$

C.$f(10)<1\ 000$　　D.$f(20)<10\ 000$

解析　∵当$x<3$时,$f(x)=x$,∴$f(1)=1,f(2)=2$.

∵$f(x)$的定义域为**R**,且$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$,

∴$f(3)>f(2)+f(1)=3,f(4)>f(3)+f(2)>5,f(5)>f(4)+f(3)>8,f(6)>f(5)+f(4)>13,f(7)>f(6)+f(5)>21,f(8)>f(7)+f(6)>34,f(9)>f(8)+f(7)>55,f(10)>f(9)+f(8)>89,f(11)>f(10)+f(9)>144,f(12)>f(11)+f(10)>233,f(13)>f(12)+f(11)>377,f(14)>f(13)+f(12)>610,f(15)>f(14)+f(13)>987,f(16)>f(15)+f(14)>1\ 000$.∴$f(20)>1\ 000$.

结合各选项知,选项B一定正确.

3.(2000·广东,15)设数列$\{a_n\}$是首项为 1 的正项数列,且$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$,则它的通项公式 $a_n=$ $\frac{1}{n}$ ________.

解析 由$(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$,则$[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$.

又数列$\{a_n\}$为正项数列,即 $a_n>0,a_1=1$,所以$(n+1)a_{n+1}-na_n=0$,即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,所以

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{n}.$$

以题梳点•核心突破

考点一　通项公式a_n与S_n的关系

例1(2024·浙江杭州期末)已知S_n为公差为2的等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若数列$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$为等差数列.

(1)求a_n;

(2)求数列$\{S_{2^n}\}$的前n项和.

解 (1)因为数列 $\frac{S_n}{a_n}$ 为等差数列,所以 $2\times\frac{S_2}{a_2}=\frac{S_1}{a_1}+\frac{S_3}{a_3}$.

因为 S_n 为公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,

则 $2\times\frac{2a_1+2}{a_1+2}=1+\frac{3a_1+6}{a_1+4}$,

解得$a_1=2$.

故$a_n=2+2(n-1)=2n$.

(2)由(1)得 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2+n$,

故$S_{2^n}=4^n+2^n$,

故数列$\{S_{2^n}\}$的前 n 项和为$\frac{4(1-4^n)}{1-4}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{4^{n+1}}{3}+2^{n+1}-\frac{10}{3}$.

知识提炼

在处理 S_n，a_n 的式子时，依据为 $a_n=\begin{cases}S_1, n=1, \\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2,\end{cases}$ 如果要证明 $f(a_n)$ 为等差(等比)数列，就消去 S_n，如果要证明 $f(S_n)$ 为等差(等比)数列，就消去 a_n，但有些题目求 $\{a_n\}$ 的通项公式时，要先消去 a_n，求出 S_n，然后利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$ 求出 $a_n(n\geq 2)$.

[对点训练1](2024·四川南充二模)在数列$\{a_n\}$中,S_n是其前n项和,且$3S_n-a_n=64$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$\lambda-1<S_n\leqslant 4\lambda+4$恒成立,求实数$\lambda$的取值范围.

解 (1)因为$3S_n-a_n=64$,当$n=1$时,$3S_1-a_1=64$,解得$a_1=32$.当$n\geqslant 2$时,$3S_{n-1}-a_{n-1}=64$,所以$3S_n-a_n-3S_{n-1}+a_{n-1}=0$,所以$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}$,所以$\{a_n\}$是以32为首项,$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列,所以$a_n=32\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)可得$S_n=\frac{a_n+64}{3}=\frac{64}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\begin{cases}\frac{64}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right], n\text{为偶数},\\ \frac{64}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right], n\text{为奇数},\end{cases}$所以当$n$为偶数时,$\frac{64}{3}>\frac{64}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\geq\frac{64}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=16$,当$n$为奇数时,$\frac{64}{3}<\frac{64}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\leq\frac{64}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=32$,所以当$n=1$时$S_n$取得最大值为32,当$n=2$时$S_n$取得最小值为16.

因为$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$\lambda-1<S_n\leqslant 4\lambda+4$恒成立,所以$\begin{cases}\lambda-1<16,\\ 32\leq 4\lambda+4,\end{cases}$解得$7\leqslant\lambda<17$,

所以实数λ的取值范围为[7,17).

考点二　累加、累乘法

例2(2024·江西南昌一模)对于各项均不为零的数列$\{c_n\}$,我们定义:数列$\dfrac{c_{n+k}}{c_n}$为数列$\{c_n\}$的“k-比分数列”.已知数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$,且$\{a_n\}$的“1-比分数列”与$\{b_n\}$的“2-比分数列”是同一个数列.

(1)若$\{b_n\}$是公比为2的等比数列,求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n;

(2)若$\{b_n\}$是公差为2的等差数列,求a_n.

解 (1)由题意知$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}$.因为 $b_1=1$,且$\{b_n\}$是公比为 2 的等比数列,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=4$.因为 $a_1=1$,所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 4 的等比数列,所以$S_n=\frac{1\times(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{3}\times(4^n-1)$.

(2)因为 $b_1=1$,且$\{b_n\}$是公差为 2 的等差数列,所以 $b_n=2n-1$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+2}}{b_n}=\frac{2n+3}{2n-1}$,所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2n+1}{2n-3}$,$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{2n-1}{2n-5}$,…,$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{1}(n\geqslant 2)$,所以$\frac{a_n}{a_1}=\frac{(2n+1)(2n-1)}{3\times 1}$.因为$a_1=1$,所以 $a_n=\frac{1}{3}\times(4n^2-1)$.