第九章微分方程

第一节微分方程的基本概念

引例1. 一曲线通过点$(1,2)$,且该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求该曲线的方程.

解：设所求曲线的方程为$y=y(x)$,于是有$\frac{dy}{dx}=2x, y(1)=2$.

那么所求曲线为$y=x^2+C$, 代入条件$y(1)=2$得$C=1$,于是所求曲线的方程为$y=x^2+1$.

引例2. 列车以$20m/s$的速度在平直线路上行驶,当制动时列车获得$-0.4m/s^2$的加速度，问开始制动后多少时间列车才能停住,在这段时间内列车行驶了多少路程？

解：设列车在开始制动后ts可以停住，列车在这段时间内驶过的路程为$x=x(t)m$,由题意得

$\frac{d^2x}{dt^2}=-0.4, x(0)=0, x'(0)=20$.

于是$v=x'(t)=-0.4t+C_1, x=x(t)=-0.2t^2+C_1t+C_2$,代入初始条件得$C_2=0, C_1=20$,于是列车的运动方程为$x=-0.2t^2+20t$,列车停住意味着速度$x'(t)=-0.4t+20=0$,那么$t=50(s)$ 将刹车所用的时间$50s$ 代入运动方程，则走过的路程为$x(50)=-0.2\times(50)^2+20\times 50=500(m)$.

从以上两个例子可以看到方程中含有未知函数的导数，于是我们称含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程，习惯上记作

$F(x,y',y'')=0$等.

注：微分方程中可以不出现未知函数或未知函数的自变量，但一定要出现未知函数的微分或导数.

微分方程中出现的未知函数的导数或微分的最高阶数，称为微分方程的阶数，微分方程中,未知函数及其导数或微分所在项的最高幂次叫作微分方程的次数.例如方程$y'-2xy+5=0$,是一个一阶线性方程. $y''+ky'-by-\sin y=0$是二阶非线性方程，$y'y=x^2$是非线性方程.

一般n阶微分方程我们写成$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$或$F(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$.

注意到上述微分方程中未知函数是一元函数，我们称这样的方程为常微分方程，若微分方程中的未知函数是多元函数，则称这样的微分方程为偏微分方程，例如$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

满足微分方程的未知函数叫作微分方程的解.例如$y = x^2 + C$就是引例1的解.若函数$y = \varphi(x)$在区间I上满足$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$,则称$y = \varphi(x)$是$n$阶微分方程的解.若微分方程的解中含有独立的任意常数的个数恰好与微分方程的阶数相同，则称该解为微分方程的通解. 例如$x = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$就是引例2 的通解.

一般来讲，微分方程解的存在性、唯一性和稳定性可能有待进一步确定，例如微分方程的通解就不唯一.为了确定研究对象的变化规律，我们总希望解是唯一确定的，这就需要附加一定的条件，对于微分方程，我们这里只介绍一种附加条件，就是初值条件或称为Cauchy初值条件，通常的记法为

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} & = f(x,y) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}, \begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} & = f(x,y,y') \\ y(x_0) & = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) & = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) & = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}.$$

通过初值条件确定了任意常数的解叫满足初值问题的解.例如$y = x^2 + 1, x = -0.2t^2 + 20t$ 分别是引例1和引例2满足初值问题的解.

习题9.1

1.匹配微分方程与它的解：

(a)	$x\frac{dy}{dx} = y$______	$(1)y = x^2 + C$
(b)	$y'' = 4y$______	$(2)y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$
(c)	$\frac{dy}{dx} = 2x$______	$(3)y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$
(d)	$\frac{d^2y}{dx^2} = -4y$______	$(4)y = Cx$

2.验证下列函数分别是相应方程的解：

$(1)y = 3e^{x^3}, y' = 3x^2 y, y(0) = 3;$

$(2)y = \frac{1}{4}x^4 + 2\cos x + 1, y' = x^3 - 2, y(0) = 3;$

$(3)y'' + y = 0, y = C_1 \sin t + C_2 \cos t;$

$(4)2\frac{dy}{dx} + y = x - 1, y = Ce^{-\frac{x}{2}} + x - 3.$

3.用隐函数求导验证微分方程的隐式解

$(1) \ln y = xy^2 + C, \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{1 - 2xy^2};$

$(2) x^2+xy^2=0, 2x+y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0.$

4.证明：若曲线上任意点的切线的斜率与该点的横坐标成比例，则曲线一定是抛物线$y=ax^2+C.$

第二节可分离变量的微分方程

形如$g(y)dy=f(x)dx$的微分方程叫变量可分离方程，顾名思义就是作为未知函数的因变量和与其伴随的自变量可以分离，假定$g(y), f(x)$ 连续，则在等式两端求不定积分得$\int g(y)dy=\int f(x)dx+C.$

若$\int g(y)dy=G(y)+C, \int f(x)dx=F(x)+C$,则$G(y)=F(x)+C$称为变量可分离方程的隐式通解,上述$C$为任意常数.

例9.2.1求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解：显然$y=0$ 是该方程的一个解，若$y\neq 0$,则$\int \frac{dy}{y}=\int 2xdx.$

于是等式两端积分得$\ln|y|=x^2+C, y=\pm e^{x^2+C}=\pm e^C e^{x^2}$,于是$y=C_1e^{x^2}$是该方程的通解,其中$C_1=\pm e^C.$

注: 在表达微分方程的通解时，我们对互相不独立的任意常数往往不加区别，例如例1中的任意常数我们也可以用C来代替C_1,于是微分方程的通解可以表示成$y=Ce^{x^2}.$

例9.2.2放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而蜕变成其它元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变，由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量M成正比，已知$t=0$时铀的含量为M_0,求在衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t 的变化规律.

解:$\frac{dM}{dt}=-\lambda M, M(0)=M_0$,其中$\lambda>0$,显然这是因为$\frac{dM}{dt}<0.$

$\frac{dM}{M}=-\lambda dt$,两端积分得$\ln M=-\lambda t+C, M=Ce^{-\lambda t}.$

代入初始条件，解得衰变规律为$M=M_0e^{-\lambda t}.$

例9.2.3设降落伞从伞塔下落后，所受空气阻力与速度成正比，并设降落伞离开跳伞塔时速度为零，求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解：如图9.2.1所示；设降落伞下落速度为$v(t)$,降落伞在下降过程中要受到重力$P=mg$和阻力$R=$

$kv,k>0$的作用

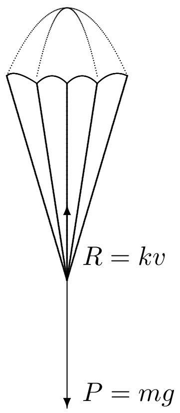

图9.2.1

由Newton第二定律$mg-kv=ma$,其中$a=\frac{dv}{dt}$,于是运动速度满足微分方程：$mg-kv=m\frac{dv}{dt},v(0)=0$那么$\frac{dv}{mg-kv}=\frac{dt}{m}$ ，等式两端积分得

$\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$注意到$mg-kv>0$,我们有$mg-kv=Ce^{-\frac{k}{m}t},v=\frac{mg}{k}-Ce^{-\frac{k}{m}t}$

将初始条件代入得$C=\frac{mg}{k}$,于是满足初始条件的解为$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

例9.2.4 设$f(x)$ 在$[0,+\infty)$上具有连续导数，且单调递增$f(0)=1,\forall t\in[0,+\infty),x=0,x=t,y=f(x)$以及$x$轴围成的曲边梯形绕$x$ 轴旋转一周生成的旋转体的侧表面积在数值上等于其体积的2倍，求函数$f(x)$的表达式.

解：由定积分的元素分析法，设上述旋转体的表面积为A,体积为V,则$dA_{表}=2\pi f(x)ds$,其中ds 为旋转体微元小圆台的母线长.于是$A=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

而$V=\int_0^t\pi f^2(x)dx$.

由题意知$2\pi\int_0^t f^2(x)dx=2\pi\int_0^t f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$,

两端关于t求导得$f^2(t)=f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}$

那么$f(t)[f(t)-\sqrt{1+(f'(t))^2}]=0$,令$y=f(t)$于是有$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^2-1}$

分离变量求积分得$\ln(y+\sqrt{y^2-1})=x+C$,注意到$y(0)=1$,于是$C=0$,

注意到$y+\sqrt{y^2-1}=e^x,y-\sqrt{y^2-1}=e^{-x}$，于是$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=chx$(双曲余弦).

习题9.2

1.求解以下方程

$(1)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, $(2)\frac{dy}{dx}=2(1+y^2)x$

$(3)\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+y}\frac{dy}{dx}=-x$, $(4)(1+x^4)\frac{dy}{dx}=\frac{x^3}{y}$

$(5)(2+2y^2)y'=e^x y$, $(6)y'-(1+x)(1+y^2)=0$

$(7)\frac{dy}{dx}-\frac{y^2-y}{\sin x}=0$, $(8)y-\frac{dy}{dx}\sec x=0$

2.求解以下方程：

$(1)\frac{dy}{dx}-2xy=2x, y(0)=3$, $(2)\frac{dy}{dt}+y=2, y(0)=1$

$(3)y'=\frac{3x^2}{2y+\cos y}, y(0)=\pi$, $(4)y'-xe^y=2e^y, y(0)=0.$

3.由牛顿冷却定律：物体在空气中的冷却速度与物体温度与空气温度的差成比例.如果空气的温度为$20°C$ 在20分钟内被冷却的物体从$100°C$下降到$60°C$,若温度下降到$30°C$需要多长时间？

第三节齐次方程

对于任意数值λ,若函数$f(x,y)$满足：$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$,则称函数$f(x,y)$为$n$次齐次函数，例如函数$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ 满足$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y)$是1次齐次函数，而$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$满足：

$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$，则$f(x,y)$是0次齐次函数.

一、齐次方程：形如$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$的微分方程称为齐次方程.

此类方程的求解是利用变量替换，设法将其转化成变量可分离方程. 我们令$y/x=u$,那么$y'=u+x\frac{du}{dx}$将其代入原方程得$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u)$,即$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u$,显然当$\varphi(u)=u$，则方程是变量可分离方程，即$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$,那么$\ln|y|=\ln|Cx|$即$y=Cx$是原方程的解.

若$\varphi(u)\neq u$分离变量后积分得$\displaystyle\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$得到隐式通解.

例9.3.1求微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2-y^2}$.

解：将原方程变形为$\frac{dy}{dx}=\frac{y/x}{1-(y/x)^2}$,令$y/x=u$,则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入得

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}$,即$x\frac{du}{dx}=\frac{u^3}{1-u^2}$ 分离变量得

$\frac{(1-u^2)du}{u^3}=\frac{dx}{x}$两端积分得

$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$,代回原变量$u=\frac{y}{x}$, 得到方程的隐式通解

$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$.

例9.3.2解方程$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

解:显然$y=0$ 是方程的一个解，若$y\neq 0$,原方程可以转化成

$1+\frac{x^2}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$,即$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$ 令$y=xu$ 代入得$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}$分离变量积分得通解为$\ln|y|=\frac{y}{x}+C$.

例9.3.3探照灯的聚光镜是一张旋转抛物面，它的形状由xOy坐标面上的一条曲线L绕x 轴旋转而成，按聚光性能的要求，在其旋转轴上一点O处发出的一切光线经它反射后都与旋转轴平行，求曲线L的方程.

解：以光源为坐标原点建立坐标系，曲线上任意点记为$M(x,y)$由光学原理入射角等于反射角得到

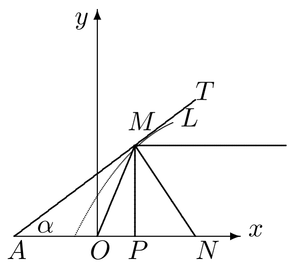

图9.3.1

令P为曲线L 上任意点$M(x,y)$在x 轴上的投影，α 为过M 点的切线与x轴的夹角，于是

$AP-OP=PM\cot\alpha-OP=\frac{y}{y'}-x$, 注意到$AO=OM=\sqrt{x^2+y^2}$得到微分方程$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2}$,为了便于讨论我们不妨将$y$看作自变量，当$y>0$时,上式为$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$，这是一个齐次方程.令$\frac{x}{y}=v$, 于是$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$, 代入上式，得$y\frac{dv}{dy}=\sqrt{v^2+1}$, 分离变量并积分得

$\ln(v+\sqrt{v^2+1})=\ln y-\ln C$,即$v+\sqrt{v^2+1}=\frac{y}{C}$代回变量$v=\frac{x}{y}$整理得$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right)$于是曲线$L$是对称轴为$x$轴，焦点在原点的抛物线.

*二、可化为齐次方程的方程

微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$若满足：$c=c_1=0$, 则方程为齐次方程，若$c\neq c_1$,我们通过变量变换$x=x_1+h, y=y_1+k$，选择适当的$h,k$将其化解成齐次方程.具体步骤如下：

将变量变换及$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}$,代入原方程得

$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$

令$ah+bk+c=0, a_1h+b_1k+c_1=0$, 若$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$,可以解得唯一的$h,k$,于是方程转化成齐次方程$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$.

若$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$，令$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$,于是原方程为

$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$,令$z=ax+by$，于是$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, 即$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}$,那么我们有

$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1}$, 这是一个变量可分离方程.

例9.3.4 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y-3}{x-y-1}$ 的通解.

解：作平移变换$x=x_1+h, y=y_1+k$, 于是方程转化成

$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1+h+k-3}{x_1-y_1+h-k-1}$

令$h+k-3=0, h-k-1=0$,得$h=2, k=1$.

于是解齐次方程$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{x_1+y_1}{x_1-y_1}$, 作代换$\frac{y_1}{x_1}=u$,于是方程转化成

$u+x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u}{1-u}$,即$x_1\frac{du}{dx_1}=\frac{1+u^2}{1-u}$,分离变量并积分得

$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|Cx_1|$,即

$C\sqrt{x_1^2+y_1^2}=e^{\arctan u}$，代回原变量得

$C\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=e^{\arctan\frac{y-1}{x-2}}$.

例9.3.5求微分方程$y'=\frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$ 的通解.

解：因为$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=0$,于是令$2x+y=z$,则$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2$代入原方程得

$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5}$,分离变量积分得

$\frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln|5z+9|=x+C$代回原变量整理得

$10y-5x+7\ln|10x+5y+9|=C_1$($C_1$ 是任意常数)为原方程的隐式通解.

习题9.3

1.求解下列方程的通解：

(1) $(y-x)dx+(y+x)dy=0$, (2)$(x+y)dx+xdy=0$;

(3) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$, (4)$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$;

(5) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$, (6)$(2\sqrt{st}-s)dt+tds=0$;

(7) $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$, (8)$x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$.

2.求下列方程满足初始条件的解：

$y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}, y(1)=2$;

3*. 求下列可化为齐次方程的方程的解：

(1)$(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0$.

(2)$(x+2y+1)dx-(2x+4y+3)dy=0$.

(3)$(x+2y+1)dx-(2x-3)dy=0$.

第四节一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的微分方程叫做一阶线性微分方程，其中$P(x),Q(x)$是给定的连续函数. 当$Q(x)=0$ 方程称为齐次方程，当$Q(x)\neq 0$方程称为非齐次方程，显然齐次线性方程是变量可分离方程，它的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

注意到非齐次方程的解一定是x的函数，且当$Q(x)=0$时，其解的表达式是$y=Ce^{-\int P(x)dx}$，于是将上述解中的C 设为待定函数$C(x)$，不妨设非齐次方程有形如$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$这样形式的解，我们来确定$C(x)$.这种求解微分方程的方法，习惯上称为常数变易法.将上述待定解代入方程得$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}\equiv Q(x)$ 于是$C'=Q(x)e^{\int P(x)dx}$，那么待定的函数$C(x)=\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

于是，一阶线性微分方程的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\displaystyle\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$.

若令$y^*=e^{-\int p(x)dx}\displaystyle\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx$,则$y=Ce^{-\int P(x)dx}+y^*$

注：一阶线性非齐次方程的通解为相应齐次方程的通解加上非齐次方程的一个解.

例9.4.1求方程$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

解：$P(x)=-\frac{2}{x+1},Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$代入公式解得

$$\begin{aligned} y &= Ce^{\int \frac{2}{x+1}dx}+e^{\int \frac{2}{x+1}dx}\int (x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int \frac{2}{x+1}dx}dx \\ &= (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right] \end{aligned}.$$

例9.4.2有一个电路其中电源电动势为$E=E_m\sin\omega t(E_m,\omega$都是常数),电阻为$R$,电感为$L$均为常数，求电流强度$i(t)$.

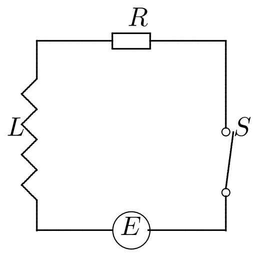

图9.4.1

解：由回路电压定律：回路电压的代数和为零，即$E-L\frac{di}{dt}-iR=0$,其中$-L\frac{di}{dt}$为感应电动势，即$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t,i(0)=0$，令$P(t)=\frac{R}{L},Q(t)=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$ 代入公式得

$$i(t)=e^{-\frac{R}{L}t}\left(\int \frac{E_m}{L}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega tdt+C\right).$$

利用分部积分法得$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega tdt=\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2+\omega^2L^2}(RL\sin\omega t-\omega L^2\cos\omega t)$, 代入化简得

$i(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$

代入初始条件$i(0)=0$,得

$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t).$

注：令$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\sin\varphi=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$,

于是$i(t)=\frac{\omega LE_m}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)$,其中$\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}$.

当t增大时，上式右端第一项（叫做暂态电流）逐渐衰减趋于零；第二项（叫做稳态电流）是正弦函数，它的周期和电动势的周期相同，而相角落后φ.

例9.4.3 $y=f(x)$由参数方程$\begin{cases} x &= 2t+t^2, \\ y &= \psi(t). \end{cases}$ $(t>-1)$确定，其中$\psi(t)$具有二阶导数，且$\psi(1)=\frac{5}{2},\psi'(1)=$

6 ,已知$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4(1+t)}$，求$\psi(t)$.

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2t+2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}$.

于是$\dfrac{3}{4(1+t)}=\dfrac{\psi''(t)(2t+2)-2\psi'(t)}{(2t+2)^3}$,

$\dfrac{\psi''(t)}{(t+1)^2}-\dfrac{\psi'(t)}{(t+1)^3}=\dfrac{3}{1+t}$,

令$\psi'(t)=u$, 于是有$u'(t)-\frac{1}{1+t}u=3(1+t)$,这是关于$u$ 的一阶线性非齐次方程,代入一阶线性非齐次方程的求解公式得

$u(t)=C_1e^{\int\frac{1}{t+1}dt}+e^{\int\frac{1}{t+1}dt}\displaystyle\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt$,

那么$u(t)=C_1(t+1)+3t(t+1)$,注意到$u=\psi'(t)$

所以$\psi(t)=\frac{C_1}{2}t^2+C_1t+t^3+\frac{3}{2}t^2+C_2$,

利用初始条件得$C_1=0, C_2=0$,于是$\psi(t)=t^3+\frac{3}{2}t^2$.

* 二、伯努利方程

形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n(n\neq 0,1)$的方程叫做伯努利（Bernoulli）方程，显然$n=0,1$分别是变量可分离方程和一阶线性方程. 当$n\neq 0,1$方程变形为$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,于是令$z=y^{1-n}$,那么$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, 这样我们得到关于$z$ 的一阶线性方程$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,解出$z$后将$z=y^{1-n}$代入即得伯努利方程的解.

例9.4.4求方程$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

解：$y=0$,显然是该方程的一个解，当$y\neq 0$,在方程两端除以y^3 得

$y^{-3}\frac{dy}{dx}+xy^{-2}=x^3$,令$z=y^{-2}$,则方程化解为$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3$.

代入一阶线性非齐次方程的求解公式得方程的通解为$z=Ce^{x^2}+x^2+1$ 将$y^{-2}=z$ 代入得原方程的通解为$y^{-2}=Ce^{x^2}+x^2+1$.

习题9.4

1.求下列线性方程的解

$(1)y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, (2)y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$

$(3)(x-x^3)y' + (2x^2-1)y - ax^3 = 0, (4)\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1,$

$(5)\frac{ds}{dt} + s\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t, (6)y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$

$(7)y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}, (8)y' + y = \frac{1}{e^x}$

2.* 求解下列伯努利方程

$(1)y' + xy = x^3y^3, (2)(1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$

$(3)3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0, (4)y'(x^2y^3 + xy) = 1$

第五节可降阶的高阶微分方程

前面我们已经讨论过一阶线性微分方程一定有解，而且我们还给出了求解公式，但对于高阶方程，相应的结论就未必成立，以下我们就三类方程进行讨论.

一、$y^{(n)} = f(x)$型方程

此类方程我们注意到$y^{(n-1)} = \displaystyle\int f(x)dx + C_1, y^{(n-2)} = \int\left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2$ 通过n次积分就可以解出未知函数y.

例9.5.1 求解微分方程$y'' = \sin(kx), y'(0) = 1, y(0) = 0.$

解：$y' = \displaystyle\int \sin kx dx + C_1 = -\frac{\cos kx}{k} + C_1,$

$y = -\frac{1}{k}\displaystyle\int \cos kx dx + C_1x = -\frac{1}{k^2}\sin kx + C_1x + C_2.$代入初始条件得$C_2 = 0, C_1 = 1 + \frac{1}{k}$

$y = -\frac{1}{k^2}\sin kx + (1 + \frac{1}{k})x.$

例9.5.2 求微分方程$y''' = e^{2x} - \cos x$的通解.

解：$y'' = \displaystyle\int (e^{2x} - \cos x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1;$

$y' = \displaystyle\int (\frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2;$

$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3$, 其中$C_j(j = 1, 2, 3)$ 是独立的任意常数.

例9.5.3质量为m 的质点受力F的作用沿Ox轴作直线运动，设力$F = F(t)$在开始时刻$t = 0$时，$F(0) =$

F_0, 随着时间t的增大，力F均匀地减小，直到$t = T$时，$F(T) = 0$. 如果开始时质点位于原点，且初速度为零，求这个质点的运动规律.

解：设质点的运动规律为$x = x(t)$,由Newton第二定律有$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$注意到$F$随时间$t$的增加而减小，即$F = F_0 - kt$，当$t = T$ 时$F = 0$ ，即$k = \frac{F_0}{T}$,所以$F(t) = F_0(1 - \frac{t}{T})$问题转化成如下初值问题：$x'' = \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T}), x(0) = 0, x'(0) = 0$，求积分得$x'(t) = \frac{F_0}{m}t - \frac{F_0}{2mT}t^2 + C_1$由初值条件得$C_1 = 0$.

$x(t) = \frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{F_0}{6mT}t^3 + C_2$,由初值条件得$C_2 = 0$,于是运动规律为$x(t) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{F_0}{6T}t^3\right), 0 \le t \le T$.

二、$y'' = f(x, y')$型微分方程

此类方程不含未知函数y，我们通过降阶来将其转化为一阶方程. 令$y' = p$, 则$y'' = \frac{dp}{dx}$代入原方程转化成关于p的一阶方程$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$依据一阶方程的求解方法得到$p = \varphi(x, C_1)$然后积分得到$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$.

例9.5.4 求微分方程$(1 + x^2)y'' = 2xy'$满足初始条件$y(0) = 1, y'(0) = 3$ 的解.

解：令$p = y'$于是有$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} = 2xp$ 那么$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}$两边积分得到$\ln|p| = \ln(1 + x^2) + \ln C_1$,那么$p = C_1(1 + x^2)$, 于是$y = C_1(x + \frac{1}{3}x^3) + C_2$代入初始条件得到$C_1 = 3, C_2 = 1$,故所求微分方程的解为$y = x^3 + 3x + 1$.

例9.5.5 求方程$y'' \cdot (x + (y')^2) = y'$, 满足初始条件$y(1) = y'(1) = 1$的解

解：令$y' = p$,则$\frac{dp}{dx}(x + p^2) = p$

于是有$\frac{dx}{dp} = \frac{x+p^2}{p}$ 这是一阶线性微分方程，即$\frac{dx}{dp} - \frac{x}{p} = p$, 那么

$x = Ce^{\int \frac{1}{p}dp} + e^{\int \frac{1}{p}dp}\int e^{-\int \frac{1}{p}dp}pdp = C_1p + p^2$,

由初始条件$1 = C_1 + 1, \Longrightarrow C_1 = 0$

由于$p^2 = x$,于是$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{x}$, 由$y'(1) = 1 > 0$,那么$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_2$, 由初始条件推得，$C_2 = \frac{1}{3}$,所以$y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$

例9.5.6设有一均匀、柔软的绳索，两端固定，绳索仅受重力的作用而下垂，试问该绳索在平衡状态时

是怎样的曲线.

解：记绳索的最低点为A,建立坐标系其中y轴过A点，不妨设A点距离x轴的距离为OA要想绳索处于平衡状态，在绳索上任意点处需有一个张力T,其中张力沿曲线的切向，设绳索从点A 到M处的曲线弧长为$\widehat{AM}$,欲使系统平衡，需要$T\cos\theta=H, T\sin\theta=\rho g s$

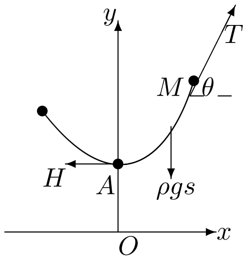

图9.5.1

其中H 为点A处沿切线方向的水平张力，s为弧长，θ为张力与x轴正向的夹角，ρ为绳索的线密度，g为重力加速度。两式相除得$\tan\theta=\frac{\rho g}{H}s$,记$\frac{\rho g}{H}=\frac{1}{a}$,注意到$\tan\theta=y', s=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$

代入得微分方程$y'=\frac{1}{a}\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+y'^2}dx$ 两端关于x求导，得到$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}$.

这个方程属于$y''=f(x,y')$类型，于是令$y'=p$,则$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$.

分离变量，并积分得

$\ln(p+\sqrt{1+p^2})=\frac{x}{a}+C_1$,将初始条件$y'(0)=0$，代入得$C_1=0$,于是

$p=\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$.将$p=y'$代入并积分得

$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})+C_2$,为了简化不妨设$OA=a$,将初始条件$y(0)=a$代入得$C_2=0$,于是所求曲线方程为$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$,该曲线称为悬链线.

三、$y''=f(y,y')$型方程

令$y'=p$那么$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p$于是方程转化成$\frac{dp}{dy}p=f(y,p)$这是一个一阶微分方程，然后利用一阶微分方程的求解方法得到关于p 的解为$p=\varphi(y,C_1)$，最后通过积分得到通解$x+C_2=\displaystyle\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}$.

例9.5.7求微分方程$yy''-y'^2=0$的通解.

解：令$y'=p, y''=\frac{dp}{dy}p$代入得$yp\frac{dp}{dy}=p^2$,那么$y\frac{dp}{dy}=p$或$p=0$.显然$p=0$,则$y=C$是原方程的解；

当$p\neq 0$ 时，$y=C_2e^{C_1x}$为其通解.

例9.5.8 一个距离地面很高的物体，受地球引力的作用由静止开始落向地面，求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力).

解：设地球的半径为R,

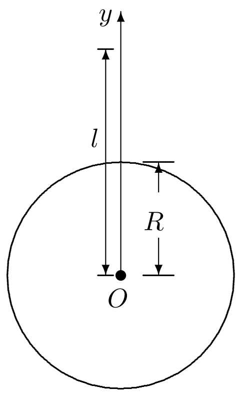

图9.5.2

物体的质量为m,物体开始下落时与地球中心相距为$l(l>R)$,在时刻t 物体所在的位置为$y=y(t)$,于是物体的速度为

$v(t)=\frac{dy}{dt}$ 由万有引力得到$m\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{kmM}{y^2}$, 即$y''=-\frac{kM}{y^2}$其中$k$为引力常数，$M$为地球的质量，当$y=R$时,$y''=-g$(这里的负号是由于物体运动的方向与$y$轴的正向相反的缘故),所以$g=\frac{kM}{R^2}$

这样所求微分方程转化成$y''=-\frac{gR^2}{y^2},y(0)=l,y'(0)=0$

令$y'=v,y''=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dy}v$,于是原方程转化成$vdv=-\frac{gR^2}{y^2}dy$,两端积分得到$v^2=\frac{2gR^2}{y}+C_1$代入初始条件得到$C_1=-\frac{2gR^2}{l}$,那么$v=-R\sqrt{2g(\frac{1}{y}-\frac{1}{l})}$

取$-$号是由于运动方向与y轴方向相反.

当$y=R$时，即物体到达地面时的速度$v=-\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}$

注意到$\frac{dy}{dt}=v=-R\sqrt{2g(\frac{l-y}{yl})}$ 于是

$dt=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\sqrt{\frac{y}{l-y}}dy$两端积分并注意到$y=l\cos^2u$ 得

$t=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(\sqrt{ly-y^2}+l\arccos\sqrt{\frac{y}{l}}\right)+C_2$ 代入初始条件$y(0)=l$ 得$C_2=0$