复数、平面向量(基础点)

考点一

[题组通关]

1．(2023·**全国甲卷**)若 i 为虚数单位，复数$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则 $a=$(　　)

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

C　[因为$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=2a+(1-a^2)\mathrm{i}=2$，所以$\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$解得 $a=1$.故选 C.]

2．(2023·新课标Ⅰ卷)已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$(　　)

A．$-\mathrm{I}$　　B．I　　C．0　　D．1

A　[由题意，得 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $z-\overline{z}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=-\mathrm{i}$.故选 A.]

3．(2023·**惠州市第二次调研**)设 $a\in\mathbf{R}$，若复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$(其中 i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于实轴上，则 a=(　　)

A．0　　B．-1　　C．1　　D.$\sqrt{2}$

B　[∵复数$\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{a-1}{2}+\frac{(a+1)\mathrm{i}}{2}$在复平面内对应的点位于实轴上，∴$a+1=0$，即 $a=-1$.故选 B.]

4．(多选)已知复数$z=\dfrac{-10i}{2+i}$，则下列说法正确的是(　　)

A．复数z在复平面内对应的点在第四象限

B．复数z的虚部为-4

C．复数z的共轭复数$\overline{z}=2-4i$

D．复数z的模$|z|=2\sqrt{5}$

BD　[$z=\dfrac{-10i}{2+i}=\dfrac{-10i\cdot(2-i)}{(2+i)(2-i)}=-2-4i$，

故复数z在复平面内对应的点在第三象限，故A错误；

所以复数z的虚部为-4，故B正确；

故复数z的共轭复数$\overline{z}=-2+4i$，故C错误；

所以复数z的模$|z|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$，故D正确．故选BD.]

练后悟道

1．复数的概念及运算问题的解题技巧

(1)与复数有关的代数式为纯虚数的问题，可设为 $z=m\mathrm{i}(m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq 0)$，利用复数相等求解．

(2)与复数的模、共轭复数、复数相等有关的问题，可设 $z=a+b\mathrm{i}(a，b\in\mathbf{R})$，利用待定系数法求解．

2．复数运算中常见的结论

(1)$(1\pm i)^2=\pm 2i$，$\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$；

(2)$-b+ai=i(a+bi)(a，b\in \mathbf{R})$；

(3)$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i(n\in \mathbf{N})$；

(4)$i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}=0(n\in \mathbf{N})$.

[注意] 复平面内，复数 $z=a+bi(a，b\in \mathbf{R})$对应的点为 $Z(a，b)$，不是 $Z(a，bi)$，当且仅当 O 为坐标原点时，向量$\overrightarrow{OZ}$与点 Z 对应的复数相同.

考点二

[题组通关]

1．(2022·新高考Ⅰ卷)在△ABC中，点D在边AB上，$BD=2DA$.记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$(　　)

A．$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B．$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

C．$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D．$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

B　[因为$BD=2DA$，所以$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD}$，所以$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选B.]

2．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，$\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，则(　　)

A．A，B，D 三点共线　B．A，B，C 三点共线

C．B，C，D 三点共线　D．A，C，D 三点共线

D　[$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=6\boldsymbol{b}$，得不出$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，∴$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$不共线，∴$A$，$B$，$D$ 三点不共线，A 错误；得不出$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，∴$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$不共线，∴$A$，$B$，$C$ 三点不共线，B 错误；得不出$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{CD}$，∴$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CD}$不共线，∴$B$，$C$，$D$ 三点不共线，C 错误；$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}=3\overrightarrow{CD}$，∴$A$，$C$，$D$ 三点共线，D 正确．故选 D.]