2021届河南省名校联盟高三第二学期4月联考（二）数学（理）试题

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x\left|\log_2\left(x^2-1\right)<1\right.\right\}$，$B=\left\{y\left|y=2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}\right.\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\left(-\sqrt{3},+\infty\right)$　　　　B．$\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$

C．$\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　　　　D．$\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left[\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$

【答案】C

【分析】解不等式 $\log_2\left(x^2-1\right)<1$，求出 x 的范围，即可得到集合A，求出函数 $y=2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}$ 的值域，即可得到集合 B，进而求出集合 A,B 的并集即可.

【详解】由 $\log_2\left(x^2-1\right)<1$，可得 $\log_2\left(x^2-1\right)<\log_2 2$，

根据对数函数的单调性，可得 $0<x^2-1<2$，解得 $-\sqrt{3}<x<-1$ 或 $1<x<\sqrt{3}$，

所以集合 $A=\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{3}\right)$.

对于集合 B，令 $2^x=t\ (t>0)$，则 $2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}=t+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

所以 $2^x+2^{-x}-\frac{1}{2}\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，即集合 $B=\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

所以 $A\cup B=\left(-\sqrt{3},-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

故选：C.

2．已知i是虚数单位，若 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为（　　）

A．$-\frac{6}{5}$　　B．$\frac{1-7\mathrm{i}}{5}$　　C．$-\frac{7}{5}$　　D．$-\frac{7}{5}\mathrm{i}$

【答案】C

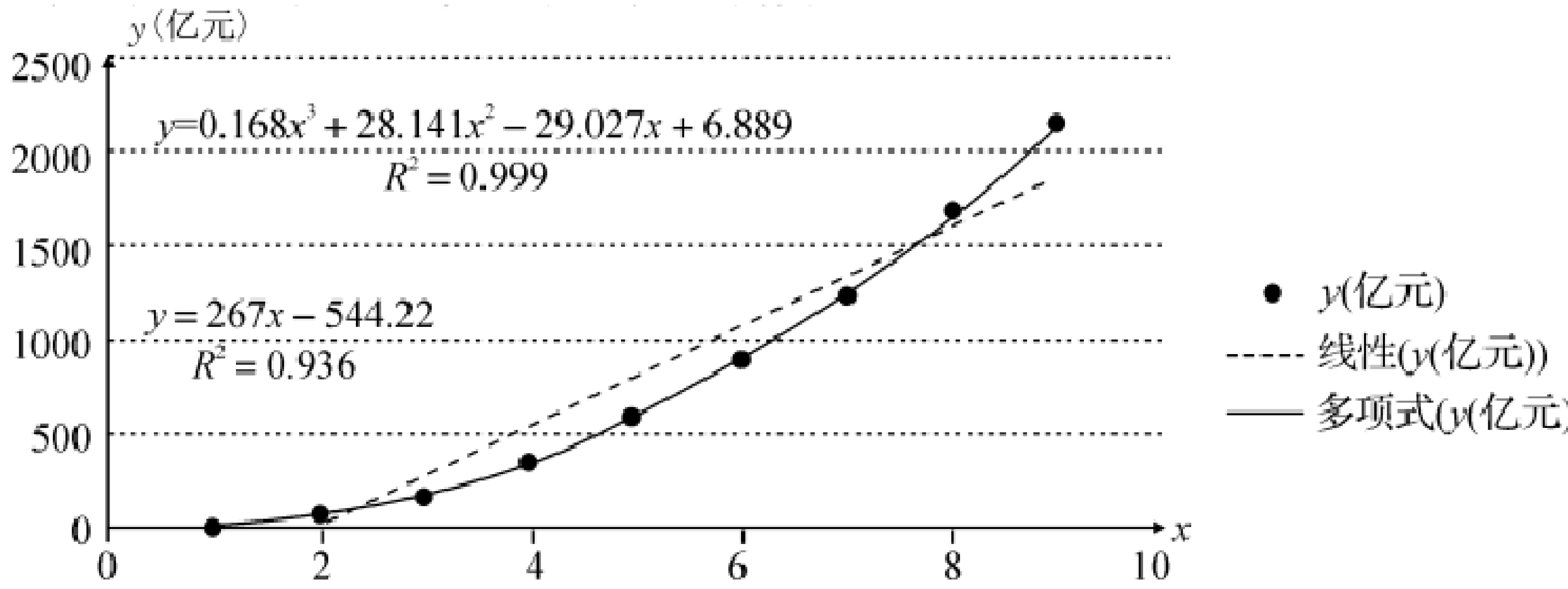
【分析】利用复数的除法运算化简 z，求出其共轭复数，得到结果.

【详解】$\because z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}$，

$\therefore \bar{z}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}\mathrm{i}$，即 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为 $-\frac{7}{5}$

故选：C.

3．某电子商务平台每年都会举行“年货节”商业促销狂欢活动，现统计了该平台从 **2012** 年到 **2020** 年共 **9** 年“年货节”期间的销售额（单位：亿元）并作出散点图，将销售额 y 看成年份序号 x（**2012** 年作为第 **1** 年）的函数．运用 **Excel** 软件，分别选择回归直线和三次函数回归曲线进行拟合，效果如下图，则下列说法中正确的个数为（　　）



①销售额 y 与年份序号 x 呈正相关关系；

②销售额 y 与年份序号 x 线性相关不显著；

③三次函数回归曲线的效果好于回归直线的拟合效果；

④根据三次函数回归曲线可以预测 **2021** 年“年货节”期间的销售额约为 **8454** 亿元．

A．1　　　　**B．2**　　　　**C．3**　　　　**D．4**

【答案】B

【分析】由散点图分布趋势知①正确；由相关系数 $0.936>0.75$ 知②错误；根据两模型相关系数大小关系可知③正确；将 $x=10$ 代入三次函数方程即可求得 y 的预估值，知④错误．

【详解】根据图象可知，散点从左下到右上分布，销售额 y 与年份序号 x 呈正相关关系，①正确；

$\because$ 相关系数 $0.936>0.75$，靠近 1，销售额 y 与年份序号 x 线性相关显著，②错误；

根据三次函数回归曲线的相关指数 $0.999>0.936$，相关指数越大，拟合效果越好，所以三次函数回归曲线的拟合效果好于回归直线的拟合效果，③正确；

由三次函数 $y=0.168x^3+28.141x^2-29.027x+6.889$，当 $x=10$ 时，$y=2698.719$ 亿元，④错误．

故选：B.

4．若实数x，y满足条件$\begin{cases}2x-y+1\ge 0\\2x+y-2\ge 0\\x-3\le 0\end{cases}$，则$z=\dfrac{4}{3x+2y}$的最小值为（　　）

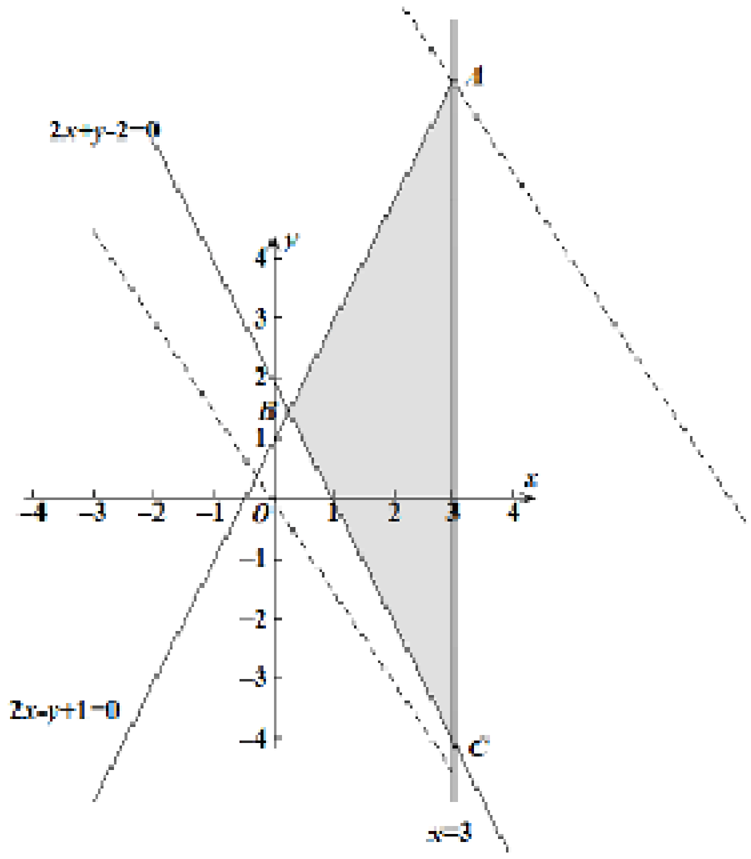
A．$\dfrac{1}{4}$　　　　**B**．$\dfrac{4}{23}$　　　　**C**．$\dfrac{4}{19}$　　　　**D**．1

【答案】B

【分析】画出可行域，令$t=3x+2y$，结合图形求解t的取值范围，从而得t最大时，z最小，代入计算z的最小值.

【详解】画出不等式组$\begin{cases}2x-y+1\ge 0\\2x+y-2\ge 0\\x-3\le 0\end{cases}$表示的区域如图，令$t=3x+2y$，结合图形可知直线$t=3x+2y$经过点$A(3,7)$时，$t$最大，经过点$C(3,-4)$时，$t$最小，所以$1\le t\le 23$，则$t$最大时，$z$最小，$z_{\min}=\dfrac{4}{3\times 3+2\times 7}=\dfrac{4}{23}$.

故选：B．



5．$\triangle ABC$中，角**A,B,C**的对边分别是a，b，c，$A=30°$，$a=\sqrt{3}$，若这个三角形有两解，则b的范围是（　　）

A．$\sqrt{3}<b\le 2\sqrt{3}$　　**B**．$\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$　　**C**．$b<2\sqrt{3}$　　**D**．$b\le 2\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】根据$b\sin A<a<b$计算即可得答案.

【详解】由题意得：$\triangle ABC$有两解时需要：$b\sin A<a<b$，

则$b\sin 30°<\sqrt{3}<b$，解得:$\sqrt{3}<b<2\sqrt{3}$.

故选：B．

【点睛】结论点睛：$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 A，a，若这个三角形有两解，则满足 $b\sin A<a<b$.

6．已知 $P(x,y)$ 是圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$（$r>0$）上任意一点，若 $|x-2y|+|x-2y+7|$ 是定值，则实数 r 的取值范围是（　　）

A. $0<r\le\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　**B.** $0<r\le\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　**C.** $r\ge\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　**D.** $r\ge\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】A

【分析】由题意可知此圆夹在两直线 $x-2y=0$ 和 $x-2y+7=0$ 之间时，

$|x-2y|+|x-2y+7|$ 是定值，得 $\begin{cases}\frac{|1-2\times 2|}{\sqrt{5}}\ge r\\ \frac{|1-2\times 2+7|}{\sqrt{5}}\ge r\end{cases}$，解不等式组即可得解.

【详解】由题意得 $|x-2y|+|x-2y+7|=\frac{|x-2y|+|x-2y+7|}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}(d_1+d_2)$，

（d_1，d_2 分别表示点 $P(x,y)$ 到直线 $x-2y=0$ 和 $x-2y+7=0$ 的距离）．由题意可知此圆夹在两直线 $x-2y=0$ 和 $x-2y+7=0$ 之间时，$|x-2y|+|x-2y+7|$ 是定值，

所以 $\begin{cases}\frac{|1-2\times 2|}{\sqrt{5}}\ge r\\ \frac{|1-2\times 2+7|}{\sqrt{5}}\ge r\end{cases}$ 可得 $r\le\frac{3\sqrt{5}}{5}$，又因为 $r>0$，得 $0<r\le\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

故选：A.

【点睛】一般处理直线与圆的位置关系时，若两方程已知或圆心到直线的距离易表达，则用几何法，通过比较圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小判断；若方程中含有参数，或圆心到直线的距离的表达较繁琐，则用代数法.

7．已知 A、B、P 是直线 l 上三个相异的点，平面内的点 $O\notin l$，若正实数 x、y 满足 $4\overrightarrow{OP}=2x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $\frac{2x+y}{xy}$ 的最小值为（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

【答案】B

【分析】由题知 $\overrightarrow{OP}=\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{4}\overrightarrow{OB}$，再结合向量三点共线得 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，再结合基本不等式求解即可得答案.

【详解】$\because 4\overrightarrow{OP}=2x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{x}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{y}{4}\overrightarrow{OB}$，

由于A、B、P是直线l上三个相异的点，

所以$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，又$x>0$，$y>0$，

由基本不等式得$\frac{2x+y}{xy}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\right)=\frac{x}{y}+\frac{y}{4x}+1\geq 2$，

当且仅当$y=2x$时取等号.

故选：B.

【点睛】结论点睛：设$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$是平面内不共线的斜率，若存在实数$\lambda_1,\lambda_2$使得$\overrightarrow{OC}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}$，则当$\lambda_1+\lambda_2=1$时，$A,B,C$三点共线，反之，当$A,B,C$三点共线时，$\lambda_1+\lambda_2=1$.

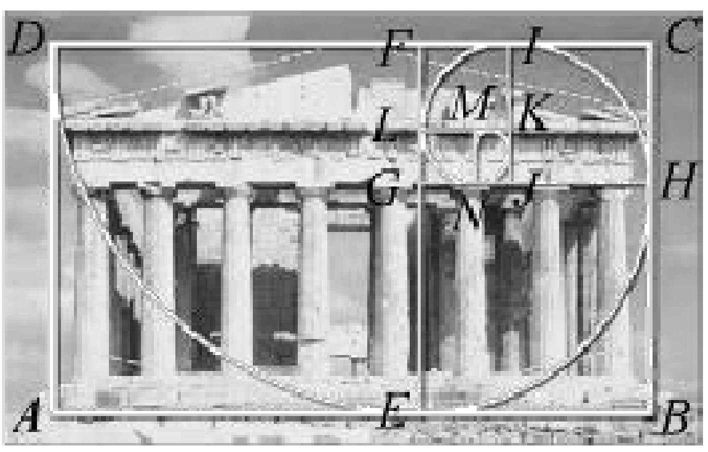
易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）“一正二定三相等”“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

8. 古希腊时期，人们把宽与长之比为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$）的矩形称为黄金矩形，把这个比值$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$称为黄金分割比例. 下图为希腊的一古建筑，其中图中的矩形$ABCD$，$EBCF$，$FGHC$，$FGJI$，$LGJK$，$MNJK$均为黄金矩形，若M与K间的距离超过1.5m，C与F间的距离小于11m，则该古建筑中 A与B间的距离可能是（　　）



（参考数据：$0.618^2 \approx 0.382$，$0.618^3 \approx 0.236$，$0.618^4 \approx 0.146$，$0.618^5 \approx 0.090$，$0.618^6 \approx 0.056$，$0.618^7 \approx 0.034$）

A．30.3m　　B．30.1m　　C．27m　　D．29.2m

【答案】C

【分析】设$|AB| = x$，$a \approx 0.618$，进而根据题意得$|CF| = a^2x$，$|KM| = a^6x$，故$\begin{cases} a^6x > 1.5 \\ a^2x < 11 \end{cases}$，解不等式即可得答案.

【详解】设$|AB| = x$，$a \approx 0.618$，

因为矩形$ABCD$，$EBCF$，$FGHC$，$FGJK$，$LGJK$，$MNJK$均为黄金矩形，

所以有$|BC| = ax$，$|CF| = a^2x$，$|FG| = a^3x$，$|GJ| = a^4x$，$|JK| = a^5x$，$|KM| = a^6x$，

由题设得$\begin{cases} a^6x > 1.5 \\ a^2x < 11 \end{cases}$，解得$26.786 < x < 28.796$.

故选:C.

【点睛】本题与数学问题相结合考查等比数列的应用，考查数学建模能力，是中档题.本题解题的关键在于设$|AB| = x$，$a \approx 0.618$，进而建立边长之间的等比数列模型，进而根据题意求解.

9．设F_2为双曲线C：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$（$a > 0$，$b > 0$）的右焦点，直线$l$：$x - 3y + c = 0$（其中$c$为双曲线$C$的半焦距）与双曲线$C$的左、右两支分别交于$M$，$N$两点，若$\overrightarrow{MN} \cdot \left(\overrightarrow{F_2M} + \overrightarrow{F_2N}\right) = 0$，则双曲线$C$的离心率是（　　）

A．$\frac{\sqrt{15}}{3}$　　B．$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

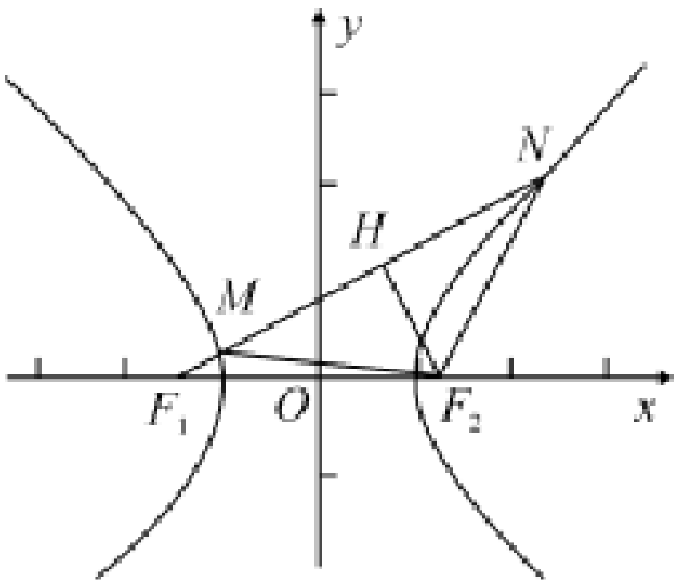
【答案】D

【分析】取M的中点，利用向量的中点公式和向量数量积为零的几何意义，得到F_2H为线段MN的中垂线，$|MF_2| = |NF_2| = m$，然后结合双曲线的定义得到$|MH| = |NH| = 2a$，进而利用勾股定理求得$m^2 = 2a^2 + 2c^2$，于是根据直线l的斜率，得到a,c的关系，从而求得离心率

【详解】设双曲线C的左焦点为F_1，如图，取线段MN的中点H，连接HF_2，则

$\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=2\overrightarrow{F_2H}$．因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\left(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}\right)=0$，所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{F_2H}=0$，即 $MN\perp F_2H$，则 $|MF_2|=|NF_2|$．设 $|MF_2|=|NF_2|=m$．因为 $|MF_2|-|MF_1|=|NF_1|-|NF_2|=2a$，所以 $|NF_1|-|NF_2|+|MF_2|-|MF_1|=|NF_1|-|MF_1|=|MN|=4a$，则 $|MH|=|NH|=2a$，从而 $|HF_1|=m$，故 $|HF_2|=\sqrt{4c^2-m^2}=\sqrt{m^2-4a^2}$，解得 $m^2=2a^2+2c^2$．因为直线 l 的斜率为 $\dfrac{1}{3}$，所以 $\tan\angle HF_1F_2=\dfrac{|HF_2|}{|HF_1|}=\dfrac{\sqrt{2c^2-2a^2}}{\sqrt{2a^2+2c^2}}=\dfrac{1}{3}$，整理得 $\dfrac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\dfrac{1}{9}$，即 $5a^2=4c^2\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

故选：D．



【点睛】本题考查双曲线的几何性质——离心率的求法，涉及向量的运算和数量积，关键是取 M 的中点，利用向量的中点公式和向量数量积为零的几何意义，得到 F_2H 为线段 MN 的中垂线，结合双曲线的定义得到 $|MH|=|NH|=2a$ 是关键，根据直线 l 的斜率，得到 a,c 的关系是求得离心率的方向．

10．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\lambda\sin^2C$，其中 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$（其中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$），若 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan C}$ 为定值，则实数 λ 的值是（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{10}}{20}$　　**B**．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　**C**．$\sqrt{10}$　　**D**．$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

【答案】A

【分析】$\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\lambda\sin^2C$，化简得 $\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)=\dfrac{\sin^2C}{\sin A\sin B}$，再由 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan C}$ 为定值，化简

得到$3\sin C-\cos C=2\sqrt{10}\lambda\left(\frac{k}{2}\sin C-\cos C\right)$恒成立，列出方程组，即可求解.

【详解】由$\tan\theta=\frac{1}{3},(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，可得$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

因为$\sin A\sin B\sin\left(C-\theta\right)=\lambda\sin^2 C$，得

$$\sin A\sin B\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)=\lambda\sin^2 C,$$

即$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}$，

又由$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{2}{\tan C}=\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{2\cos C}{\sin C}$

$$=\frac{\sin C}{\sin A\sin B}+\frac{2\cos C}{\sin C}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{2\cos C}{\sin C}$$

$$=\frac{1}{\sin C}\times\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sin C-\frac{1}{\sqrt{10}}\cos C\right)+\frac{2\cos C}{\sin C}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cos C}{\sin C}+\frac{2\cos C}{\sin C}=k$$

（定值），

即$3\sin C-\cos C+2\sqrt{10}\lambda\cos C=\sqrt{10}k\lambda\sin C$，

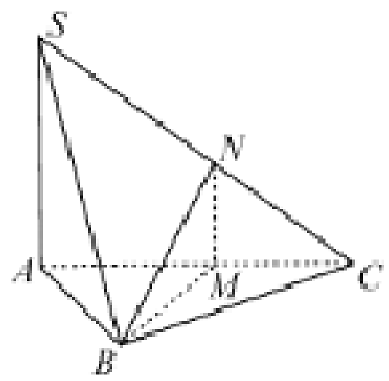
即$3\sin C-\cos C=2\sqrt{10}\lambda\left(\frac{k}{2}\sin C-\cos C\right)$恒成立，

可得$\begin{cases}3=2\sqrt{10}\cdot\lambda\times\frac{k}{2}\\1=2\sqrt{10}\cdot\lambda\end{cases}$，解得$k=6$，$\lambda=\frac{\sqrt{10}}{20}$.

故选：A.

【点睛】方法点拨：解答中把$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{2}{\tan C}$为定值，利用三角函数的基本关系式和题设条件，转化为$3\sin C-\cos C=2\sqrt{10}\lambda\left(\frac{k}{2}\sin C-\cos C\right)$恒成立，结合多项式相等的条件，列出方程组是解答的关键.

11. 如图，在三棱锥$S-ABC$中，侧棱$SA\perp$平面ABC，$AB=BC=2$，$\angle ABC=90°$，侧棱SB与平面ABC所成的角为**45°**，M为AC的中点，N是侧棱SC上一动点，当$\triangle BMN$的面积最小时，异面直线SB与MN所成角的正弦值为（　　）



A．$\frac{1}{6}$　　　　B．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　　　C．$\frac{\sqrt{33}}{6}$　　　　D．$\frac{\sqrt{3}}{6}$

【答案】C

【分析】易证 $BM\perp$ 平面 SAC，则 $BM\perp MN$，得到$\triangle BMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}BM\cdot MN$，化简为 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$，即 MN 最小时，$\triangle BMN$ 的面积最小，此时 $MN\perp SC$，过S作 $SE\perp SC$，交 CA 的延长线于点 E，则 $SE//MN$，连接 BE，$\angle BSE$ 即为异面直线 SB 与 MN 所成的角或其补角．然后求得三边的长度，利用余弦定理求解.

【详解】由题意知　ABC 为等腰直角三角形，

因为 M 为 AC 的中点，

所以 $BM\perp AC$．$\vartriangle$

又 $SA\perp$ 平面 ABC，

所以 $SA\perp BM$，又 $SA\cap AC=A$，

所以 $BM\perp$ 平面 SAC，

所以 $BM\perp MN$，

故$\triangle BMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}BM\cdot MN$，

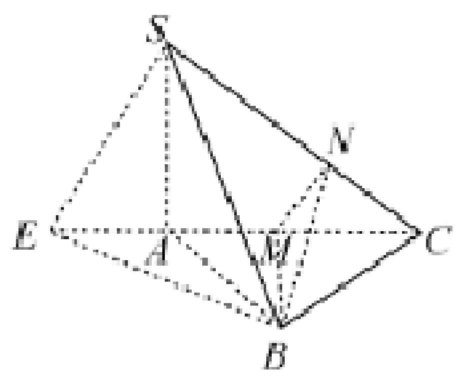
易知 $AC=2\sqrt{2}$，所以 $BM=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

所以 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$，

当 MN 最小时，$\triangle BMN$ 的面积最小，此时 $MN\perp SC$．

当 $MN\perp SC$ 时，过S作 $SE\perp SC$，交 CA 的延长线于点 E，则 $SE//MN$，

连接 BE，如图．



所以$\angle BSE$即为异面直线SB与MN所成的角或其补角.

因为$SA\perp$平面ABC,

所以$\angle SBA$为直线SB与平面ABC所成的角，所以$\angle SBA=45^\circ$,

所以$SA=AB=2$,

所以$SB=2\sqrt{2}$，$SC=2\sqrt{3}$,

又$\tan\angle SCA=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{SE}{SC}$,

所以$SE=\sqrt{6}$,

所以$AE=\sqrt{2}$，$ME=2\sqrt{2}$,

在Rt$\triangle EMB$中，易知$BE=\sqrt{10}$,

所以$\cos\angle BSE=\dfrac{SB^2+SE^2-BE^2}{2SB\cdot SE}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$,

故当$\triangle BMN$的面积最小时，异面直线SB与MN所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{33}}{6}$,

故选：C.

【点睛】方法点睛：求异面直线所成的角一是几何法：常用方法是平移法，平移方法一般有三种类型：利用图中已有的平行线平移；利用特殊点(线段的端点或中点)作平行线平移；补形平移．二是向量法：设异面直线AC，BD的夹角为β，则$\cos\beta=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}$.

12. 已知函数$f\left(x\right)=\min\left\{x\left|x-2a\right|,x^2-6ax+8a^2+4\right\}$（$a>1$），其中$\min\left(p,q\right)=\begin{cases}p,p\le q\\q,p>q\end{cases}$，若方程$f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}$恰好有**3**个不同解$x_1$，$x_2$，$x_3$（$x_1<x_2<x_3$），则$x_1+x_2$与$x_3$的大小关系为（　　）

A. 不能确定　　**B.** $x_1+x_2=x_3$　　**C.** $x_1+x_2<x_3$　　**D.** $x_1+x_2>x_3$

【答案】A

【分析】先求出$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2ax,x\le 2a\\x^2-2ax,2a<x\le 2a+\dfrac{1}{a}\\x^2-6ax+8a^2+4,x>2a+\dfrac{1}{a}\end{cases}$，得到$f\left(a\right)=a^2$（极大值），

$f(2a)=0$（极小值），$f\left(2a+\frac{1}{a}\right)=2+\frac{1}{a^2}$（极大值），$f(3a)=4-a^2$（极小值）. 再分三种情况讨论结合数形结合分析得解.

【详解】$x|x-2a|=\begin{cases}x^2-2ax, x>2a\\-x^2+2ax, x\le 2a\end{cases}$，$a>1$.

当 $x\leqslant 2a$ 时，$-x^2+2ax-\left(x^2-6ax+8a^2+4\right)=-2(x-2a)^2-4<0$，

即 $-x^2+2ax<x^2-6ax+8a^2+4$，

当 $x>2a$ 时，$x^2-2ax-\left(x^2-6ax+8a^2+4\right)=4ax-8a^2-4$，

若 $4ax-8a^2-4>0$，则 $x>2a+\frac{1}{a}$，$x^2-2ax>x^2-6ax+8a^2+4$；

若 $4ax-8a^2-4\le 0$，则 $x\le 2a+\frac{1}{a}$，$x^2-2ax\le x^2-6ax+8a^2+4$，

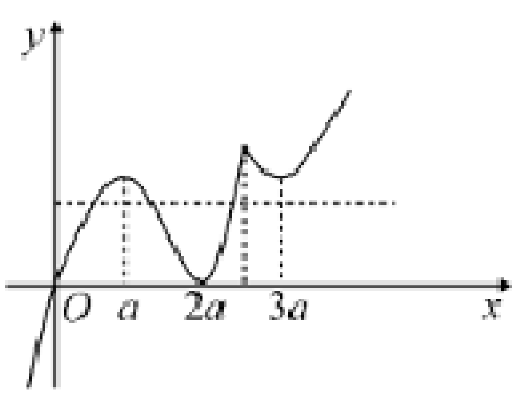
又 $2a+\frac{1}{a}>2a$，$\therefore f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, x\le 2a\\x^2-2ax, 2a<x\le 2a+\frac{1}{a}\\x^2-6ax+8a^2+4, x>2a+\frac{1}{a}\end{cases}$，

又 $f(a)=a^2$（极大值），$f(2a)=0$（极小值），$f\left(2a+\frac{1}{a}\right)=2+\frac{1}{a^2}$（极大值），

$f(3a)=4-a^2$（极小值）.

要使 $f(x)=\frac{5}{2}$ 恰好有 3 个不同解，结合图象得：

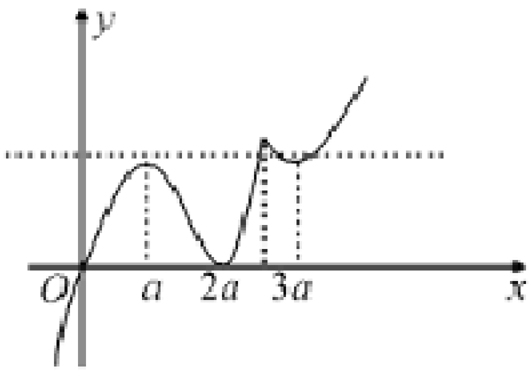
①当 $\begin{cases}f(a)>\frac{5}{2}\\f(3a)>\frac{5}{2}\end{cases}$，即 $\begin{cases}a^2>\frac{5}{2}\\4-a^2>\frac{5}{2}\end{cases}$ 时，得 $\begin{cases}a^2>\frac{5}{2}\\a^2<\frac{3}{2}\end{cases}$，不存在这样的示数 a.



②当$\begin{cases} f(a)<\dfrac{5}{2} \\ f(3a)<\dfrac{5}{2} \\ f\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)>\dfrac{5}{2} \end{cases}$，即$\begin{cases} a^2<\dfrac{5}{2} \\ 4-a^2<\dfrac{5}{2} \\ 2+\dfrac{1}{a^2}>\dfrac{5}{2} \end{cases}$时，解得$\dfrac{\sqrt{6}}{2}<a<\sqrt{2}$，

此时$2a<x_1<2a+\dfrac{1}{a}<x_2<3a<x_3$，又因为$x_2$与$x_3$关于$x=3a$对称，

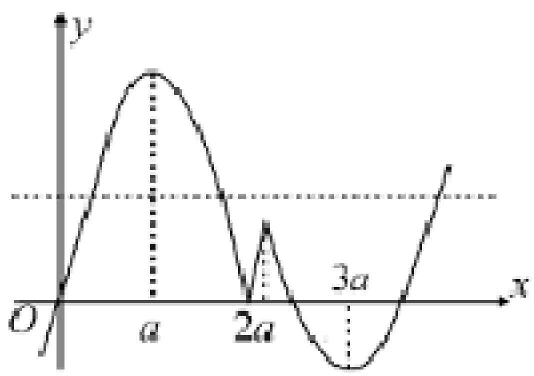
$\therefore x_3-3a=3a-x_2<a<2a<x_1$，$\therefore x_3<4a<x_1+x_2$.



③当$\begin{cases} f(a)>\dfrac{5}{2} \\ f\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)<\dfrac{5}{2} \end{cases}$，即$\begin{cases} a^2>\dfrac{5}{2} \\ 2+\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{5}{2} \end{cases}$时，解得$a>\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

此时，x_1，x_2是方程$-x^2+2ax=\dfrac{5}{2}$的两实根，

所以$x_1+x_2=2a$，而$x_3>3a$，所以$x_1+x_2<x_3$.



故选：A.

【点睛】方法点睛：研究函数的零点问题常用的方法有：(1) 方程法（直接解方程得解）；(2) 图象法（直接画出函数$f(x)$的图象分析得解）；(3) 方程+图象法（令函数$f(x)=0$得到$g(x)=h(x)$分析函数$g(x),h(x)$的图象即得解）. 数形结合是高中数学的一种重要数学思想，要注意灵活运用，提高解题效率.

二、填空题

13．已知某运动员每次射击命中的概率都为**60%**．现采用随机模拟的方法估计该运动员三次射击恰有两次不中的概率：先由计算器算出 **0** 到 **9** 之间取整数值的随机数，指定

1，2，3，4，5，6 表示命中；7，8，9，0 表示不命中；再以每三个随机数为一组，代表三次射击的结果．经随机模拟产生了 20 组随机数：

907	**966**	**191**	**925**	**271**	**932**	**812**	**458**	**569**	**683**
431	**257**	**393**	**027**	**556**	**488**	**730**	**113**	**537**	**989**

据此估计，该运动员三次射击恰有两次不中的概率为________．

【答案】0.15

【分析】已知三次投篮共有 20 种，再得到恰有两次命中的事件的种数，然后利用古典概型的概率公式求解.

【详解】三次射击共有 20 个事件，恰有两次不中的事件有：027、488、730，共 3 种，

故该运动员三次射击恰有一次不中的概率为 $P=\dfrac{3}{20}=0.15$．

故答案为：0.15.

14．甲、乙、丙三人从 A 、 B 、 C 三种型号的手环中各选一个戴在手上，各人手环的型号互不相同，乙比戴 C 手环的人年龄大，丙和戴 A 手环的人年龄不同，戴 A 手环的人比甲年龄小，则甲、乙、丙所戴手环的型号分别为________．

【答案】B 、 A 、 C

【分析】先容易确定出戴 A 手环的人为乙，然后再根据年龄大小可判断出戴 C 手环的是丙，进而可得戴 B 手环的是甲.

【详解】丙和戴 A 手环的人年龄不同，戴 A 手环的人比甲年龄小，故戴 A 手环的人为乙，即乙比甲的年龄小；乙比戴 C 手环的人年龄大，故戴 C 手环的人可能是甲也可能是丙，即乙比甲的年龄大或乙比丙的年龄大，但由上述分析可知，只能是乙比丙的年龄大，即戴 C 手环的是丙．综上，甲、乙、丙所戴手环的型号分别为 B、A、C.

故答案为：B、A、C.

15．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x\ln x-2x\left(x>0\right)\\ x^2+1\left(x\leq 0\right)\end{cases}$ ，若 $f\left(x\right)$的图象上有且仅有 **2** 个不同的点关于直线 $y=-\dfrac{3}{2}$ 的对称点在直线 $kx-y-3=0$ ，则实数 k 的取值是________．

【答案】2

【分析】由题知，先求出直线$kx-y-3=0$关于直线 $y=-\dfrac{3}{2}$ 对称的直线l的方程为 $kx+y=0$，进而将问题转化为 $y=-kx$ 图象与函数 $y=f\left(x\right)$的图象有 2 个交点，进一步讨论将问题转化为$-k=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，故令 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，进而转化为直线 $y=-k$ 与

函数 $y=g\left(x\right)$有 2 个交点，再结合 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$的性质求解即可.

【详解】直线 $kx-y-3=0$ 关于直线 $y=-\dfrac{3}{2}$ 对称的直线 l 的方程为 $kx+y=0$，对应的函数为 $y=-kx$，其图象与函数 $y=f\left(x\right)$的图象有 2 个交点.

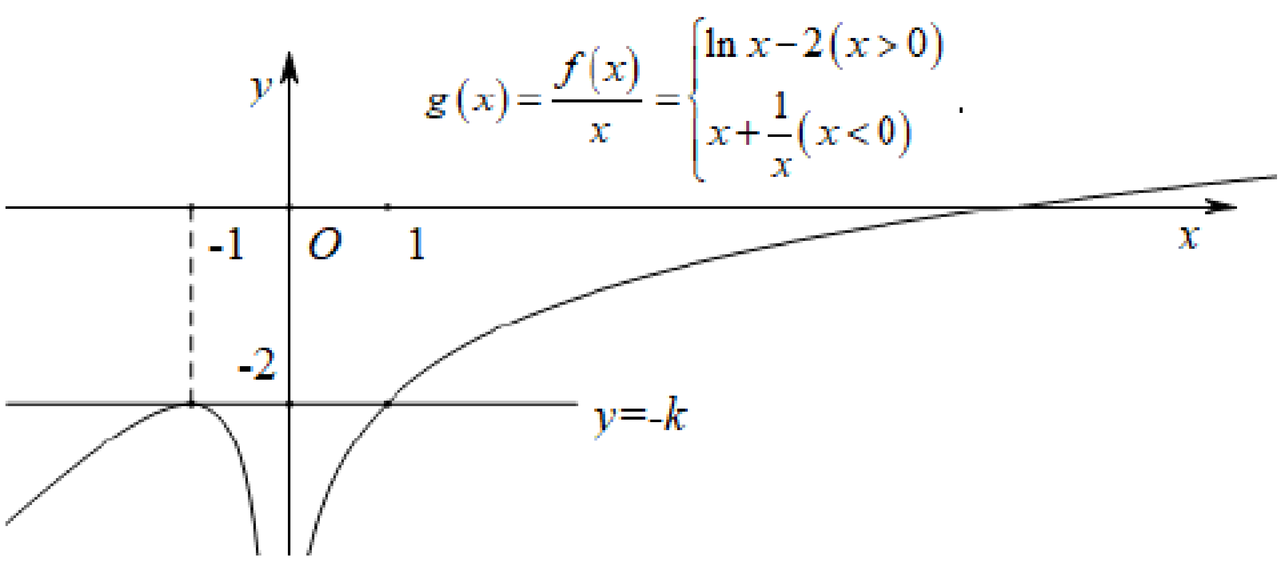
对于一次函数 $y=-kx$，当 $x=0$ 时，$y=0$，由 $f\left(x\right)\neq 0$ 知不符合题意.

当 $x\neq 0$ 时，令 $-kx=f\left(x\right)$，可得 $-k=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，此时，令

$$g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}=\begin{cases}\ln x-2\left(x>0\right)\\ x+\dfrac{1}{x}\left(x<0\right)\end{cases}.$$

当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)$为增函数，$g\left(x\right)\in\mathbf{R}$，当 $x<0$ 时，$g\left(x\right)$为先增再减函数，$g\left(x\right)\in\left(-\infty,-2\right]$.

结合图象，



直线 $y=-k$ 与函数 $y=g\left(x\right)$有 2 个交点，

因此，实数 $-k=-2$，即 $k=2$.

故答案为：2

【点睛】本题考查直线的对称性问题，函数图象的交点个数求参数问题，考查运算求解能力，数形结合思想，化归转化思想，是中档题.本题解题的关键在于根据已知条件，将问题转换为 $y=-kx$ 图象与函数 $y=f\left(x\right)$的图象有 2 个交点问题，进而进一步转化为直线 $y=-k$ 与函数 $y=g\left(x\right)$有 2 个交点求解.

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$2AB=BC=2$，$2AB=BC=2$. 将 A，C 分别沿 BE，DF 向上翻折至 A'，C'，则 $A'C'$ 取最小值时，二面角 $A'-EF-C'$ 的正切值是 ________.