

概率论与数理统计必考点



| CATALOGUE |

目录

- 概率论基本概念
- 随机变量及其分布
- 多维随机变量及其分布
- 随机变量数字特征
- 数理统计基本概念
- 参数估计
- 假设检验

01

概率论基本概念



样本空间与事件



样本空间

所有可能结果的集合，通常用 Ω 表示。

事件

样本空间的子集，即某些可能结果的集合。事件通常用大写字母A, B, C等表示。

基本事件

只包含一个样本点的事件，是最简单的事件。

必然事件和不可能事件

样本空间 Ω 和空集 \emptyset 分别表示必然发生和不可能发生的事件。

概率定义及性质

概率定义

事件A发生的可能性大小，记为 $P(A)$ 。概率是一个介于0和1之间的实数。

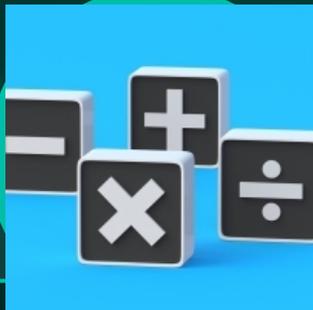
概率性质

非负性、规范性、可列可加性等。其中，规范性指必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0；可列可加性指互不相容事件的概率之和等于这些事件和的概率。



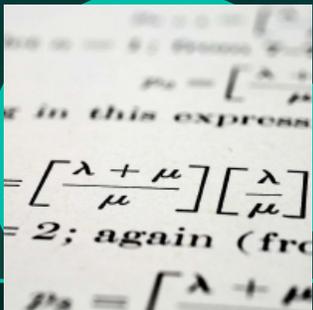


条件概率与独立性



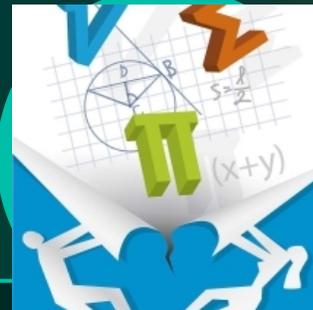
条件概率

在事件B发生的条件下，事件A发生的概率，记为 $P(A|B)$ 。条件概率可以通过公式 $P(AB)/P(B)$ 计算，其中 $P(AB)$ 表示事件A和B同时发生的概率。



独立性

如果事件A和B的发生互不影响，则称事件A和B是相互独立的。独立事件的概率满足乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 。



条件独立

在某些条件下，事件A和B可能表现出独立性，即在给定条件C下，事件A和B的发生互不影响。条件独立可以通过公式 $P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$ 来判断。



全概率公式和贝叶斯公式

3.org/1999/xlink"

11.89L 1600-1458.11L 0-1458.11z"/>
L 714-1419.11C 713.749-1420.56 713.685-1420.86 713-1422.11zM 1567-1382.11C 1567.98-1
33-1379.44C 554.778-1379.89 553.722-1379.83 553.667-1379.78zM 1571-1380.11L 1571-13

11L 1489-1371.11L 1485-1371.11L 1485-1372.11L 1509-1372.11C 1503.97-1374.22 1485.86-
11L 1492-1373.11C 1490.49-1373.79 1489.69-1373.94 1488-1374.11zM 1509-1373.11L 1509
72.89 1529.96-1373.02 1528-1373.11z"/>

2.11L 1538-1372.11C 1536.23-1372.89 1534.96-1373.02 1533-1373.11z"/>
11L 1543-1372.11C 1541.23-1372.89 1539.96-1373.02 1538-1373.11z"/>

.11L 1504-1371.11C 1498.53-1373.41 1490.9-1372.11 1485-1372.11z"/>
.11L 1510-1370.11C 1507.27-1372.15 1505.27-1371.86 1502-1371.11z"/>

1.11L 1514-1371.11C 1512.23-1371.89 1510.96-1372.02 1509-1372.11z"/>
.11L 1530-1371.11C 1525.28-1373.09 1519.09-1372.11 1514-1372.11z"/>

.11C 1526.88-1368.67 1531.45-1368.74 1536-1371.11C 1531.76-1372.84 1526.55-1371.15 15
0.11L 1544-1372.11C 1540.08-1372.1 1536.42-1372.53 1534-1369.11z"/>

1.11L 1554-1371.11C 1550.84-1372.44 1547.41-1372.11 1544-1372.11z"/>
0.11L 1492-1370.11C 1490.75-1370.8 1490.45-1370.86 1489-1371.11zM 1497-1371.11L 1497

1.11L 1522-1370.11C 1518.3-1371.66 1513.98-1371.11 1510-1371.11z"/>
.11L 1542-1370.11C 1540.49-1370.79 1539.69-1370.94 1538-1371.11zM 1544-1371.11C 1545

0.11C 1548.06-1369.62 1549.14-1369.16 1551-1368.11L 1554-1370.11C 1551.39-1371.21 154
11L 1490-1369.11C 1488.23-1369.89 1486.96-1370.02 1485-1370.11z"/>

9.11L 1507-1369.11C 1502.03-1371.2 1495.36-1370.11 1490-1370.11z"/>
9.11L 1528-1368.11C 1521.7-1371.14 1513.83-1370.11 1507-1370.11z"/>

8-1369.39 1552.22-1368.33 1552.67-1368.78C 1552.72-1368.83 1552.78-1369.89 1552.33-13
11L 1510-1368.11C 1508.75-1368.8 1508.45-1368.86 1507-1369.11z"/>

3.11L 1514-1368.11C 1512.49-1368.79 1511.69-1368.94 1510-1369.11z"/>
11L 1532-1368.11C 1530.49-1368.79 1529.69-1368.94 1528-1369.11z"/>

-1368.33 1533.28-1368.39 1533.33-1368.44C 1533.78-1368.89 1532.72-1368.83 1532.67-136
11L 1547-1368.11C 1543.84-1369.44 1540.41-1369.11 1537-1369.11z"/>

11L 1526-1367.11C 1524.23-1367.89 1522.96-1368.02 1521-1368.11zM 1545.67-1367.78C 15
7.11L 1551-1367.11C 1549.49-1367.79 1548.69-1367.94 1547-1368.11z"/>
11L 1558-1232.11L 1558-1234.11L 1556-1234.11zM 1578-1229.11L 1578-1227.11L 1580-122
25 1554.84-1224.08 1554-1226.11zM 1485-1225.11C 1485.08-1222.47 1485-1220.84 1487-1

全概率公式

如果事件 B_1, B_2, \dots, B_n 构成一个完备事件组，即它们两两互不相容且它们的和为必然事件，则对任一事件 A ，有全概率公式 $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$ 。

贝叶斯公式

在全概率公式的基础上，如果已知事件 A 已经发生，则可以利用贝叶斯公式求出在事件 A 发生的条件下，任一事件 B_i 发生的概率，即后验概率 $P(B_i|A)$ 。贝叶斯公式具有重要的应用价值，在统计推断、机器学习等领域有着广泛的应用。



02

随机变量及其分布





随机变量概念及分类



随机变量的定义

设随机试验的样本空间为 $S = \{e\}$,
 $X = X(e)$ 是定义在样本空间 S 上的实值
单值函数。称 $X = X(e)$ 为随机变量。

随机变量的分类

根据随机变量可能取的值的个数分为
离散型随机变量和连续型随机变量。



离散型随机变量分布律

分布律的定义

对于一个离散型随机变量 X ，其所有可能取的值 $x_i (i=1,2,\dots)$ 与取这些值的概率 $P(X=x_i)$ 构成的表格或公式称为离散型随机变量 X 的分布律。

常见离散型随机变量的分布

0-1分布、二项分布、泊松分布等。



连续型随机变量概率密度函数

概率密度函数的定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ ，存在非负可积函数 $f(x)$ ，使对于任意实数 x 有 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ (积分下限是 $-\infty$ ，上限是 x)，则称 X 为连续型随机变量， $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数。

常见连续型随机变量的分布

均匀分布、指数分布、正态分布等。



随机变量函数分布

随机变量函数的定义

设 X 是随机变量， $y=g(x)$ 是实数域上的函数，则 $Y=g(X)$ 也是随机变量，称 Y 是 X 的函数。

随机变量函数的分布

当已知随机变量 X 的分布时，可以通过一定的方法求出随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布。常见的方法有公式法、变换法等。



03

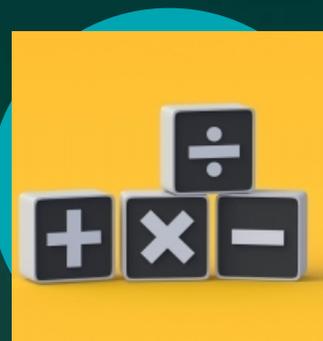
多维随机变量及其分布



二维随机变量联合分布

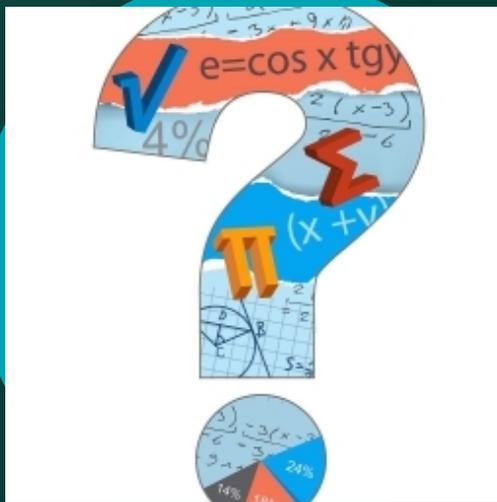
联合分布函数定义

对于所有实数 x, y ，二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$ 等于事件 $\{X \leq x, Y \leq y\}$ 的概率。



联合概率密度函数

若二维随机变量 (X, Y) 的分布函数 $F(x, y)$ 可微，则存在非负函数 $f(x, y)$ ，使得 $F(x, y)$ 等于 $f(x, y)$ 在对应区域的双重积分。



联合分布律

对于离散型二维随机变量 (X, Y) ，联合分布律为 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}$ ，其中 i, j 为变量所有可能取值的组合。



边缘分布与条件分布

01

边缘分布函数

二维随机变量 (X, Y) 中， X 或 Y 自身的分布函数称为边缘分布函数。

02

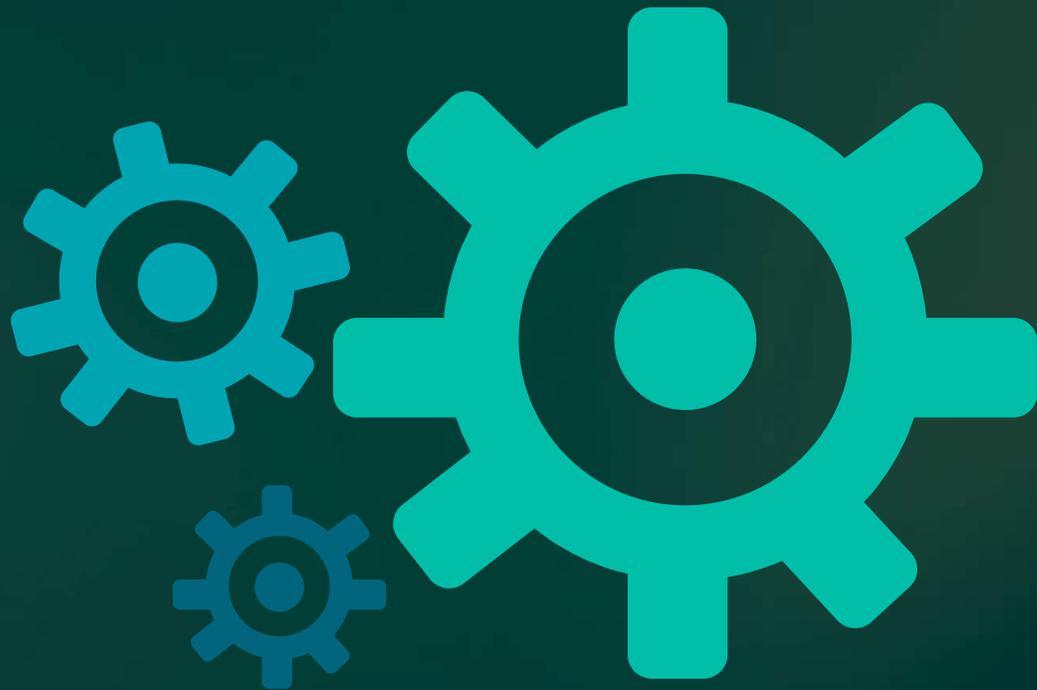
边缘概率密度函数

二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数对其中一个变量积分，得到另一个变量的边缘概率密度函数。

03

条件分布律

对于离散型二维随机变量 (X, Y) ，在给定 $Y=y_j$ 条件下， X 的条件分布律为 $P\{X=x_i|Y=y_j\}$ 。





相互独立随机变量组

相互独立的定义

若二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数等于它们各自边缘分布函数的乘积，则称 X 与 Y 相互独立。

VS

相互独立的性质

若 X 与 Y 相互独立，则它们的任意函数也相互独立；反之，若 X 与 Y 不相互独立，则存在它们的函数使得这两个函数也不相互独立。



多维随机变量函数分布

01

多维随机变量函数的分布

对于多维随机变量 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的函数 $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，其分布可以通过求解多维随机变量的联合分布函数和函数 g 的复合函数得到。

02

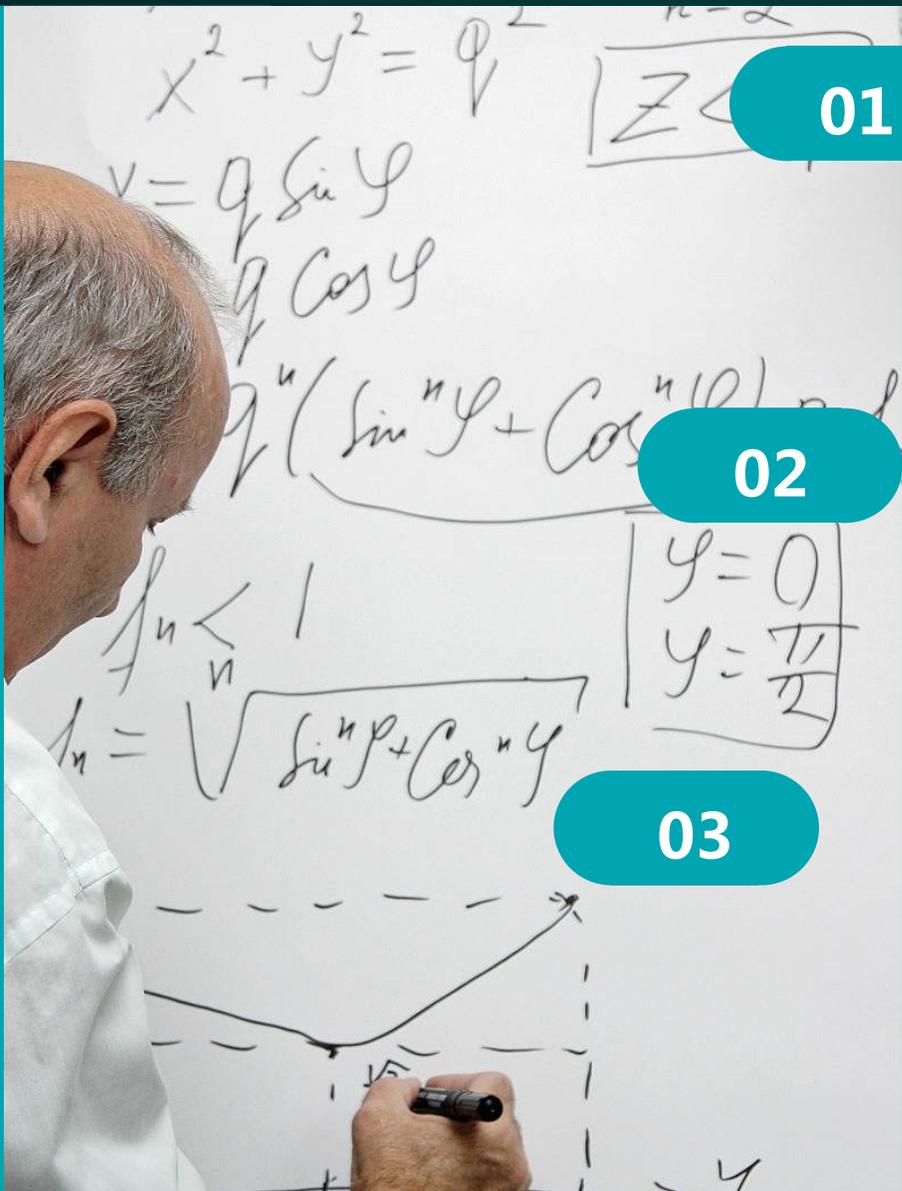
卷积公式

对于相互独立的随机变量 X 和 Y ，它们的和 $Z = X + Y$ 的分布可以通过 X 和 Y 的概率密度函数的卷积得到。

03

顺序统计量分布

对于来自同一总体的 n 个相互独立的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ，它们的顺序统计量（如最大值、最小值等）的分布可以通过求解多维随机变量的联合分布函数和相应的顺序统计量的函数关系得到。



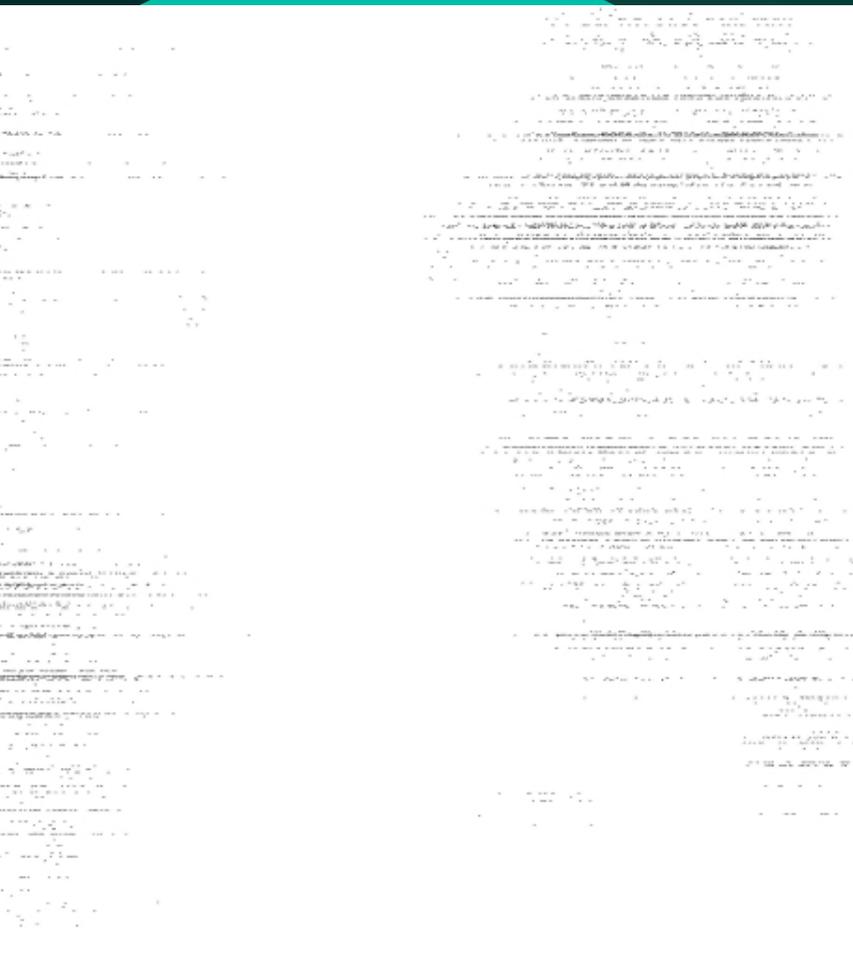
04

随机变量数字特征





数学期望与方差概念



01

数学期望（均值）

描述随机变量取值的“平均”位置，是概率加权下的平均值。

02

方差

描述随机变量取值与其数学期望的偏离程度，衡量数据的波动大小。

03

标准差

方差的平方根，与方差一样反映数据的离散程度，但单位与原随机变量相同。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/877102125003006056>