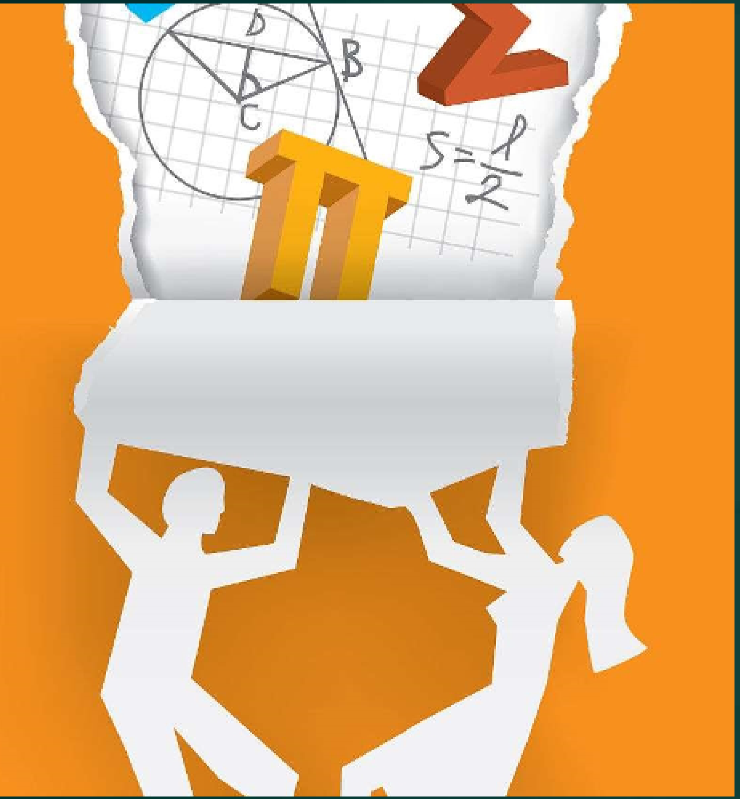
概率论与数理统计必考点

CATALOGUE

目录

01 概率论基本概念

样本空间与事件



样本空间

所有可能结果的集合，通常用Ω表示。

事件

样本空间的子集，即某些可能结果的集合。事件通常用大写字母A, B, C等表示。

基本事件

只包含一个样本点的事件，是最简单的事件。

必然事件和不可能事件

样本空间Ω和空集∅分别表示必然发生和不可能发生的事件。

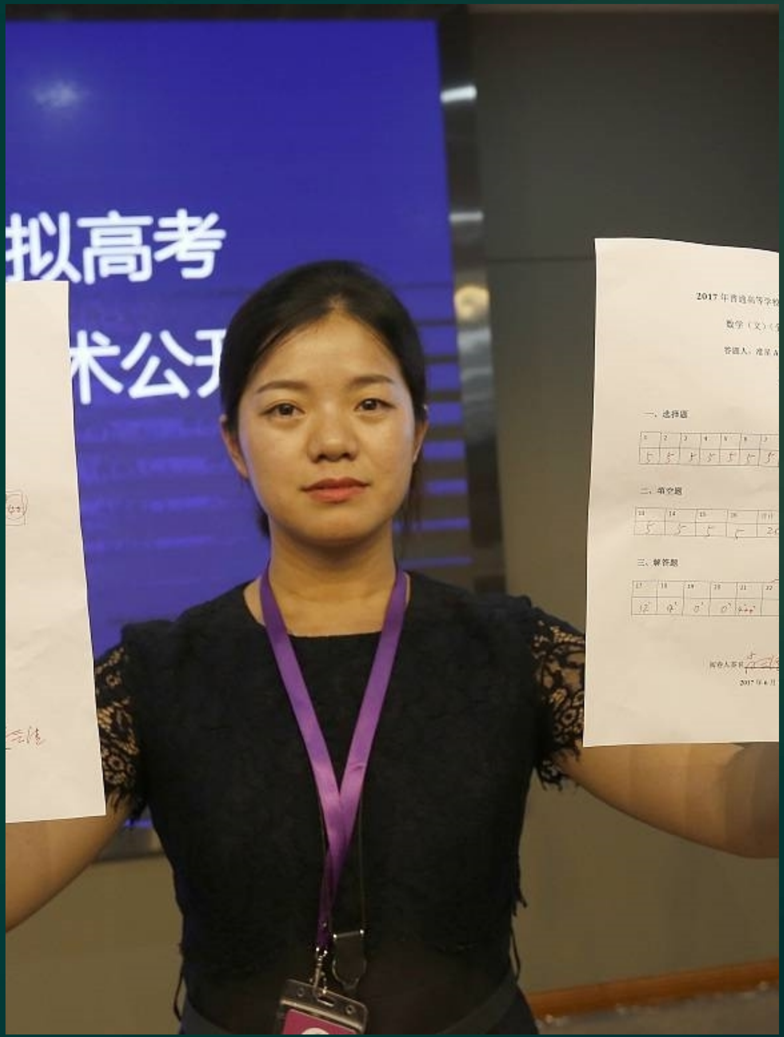
概率定义及性质

概率定义

事件A发生的可能性大小，记为P(A)。概率是一个介于0和1之间的实数。

概率性质

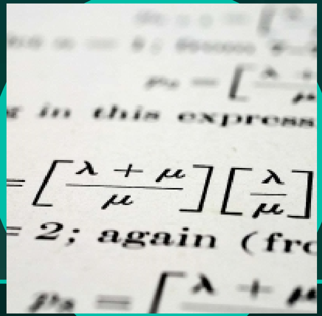
非负性、规范性、可列可加性等。其中，规范性指必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0；可列可加性指互不相容事件的概率之和等于这些事件和的概率。



条件概率与独立性

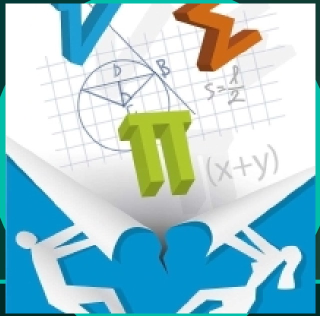
条件概率

在事件B发生的条件下，事件A发生的概率，记为P(A|B)。条件概率可以通过公式P(AB)/P(B)计算，其中P(AB)表示事件A和B同时发生的概率。



独立性

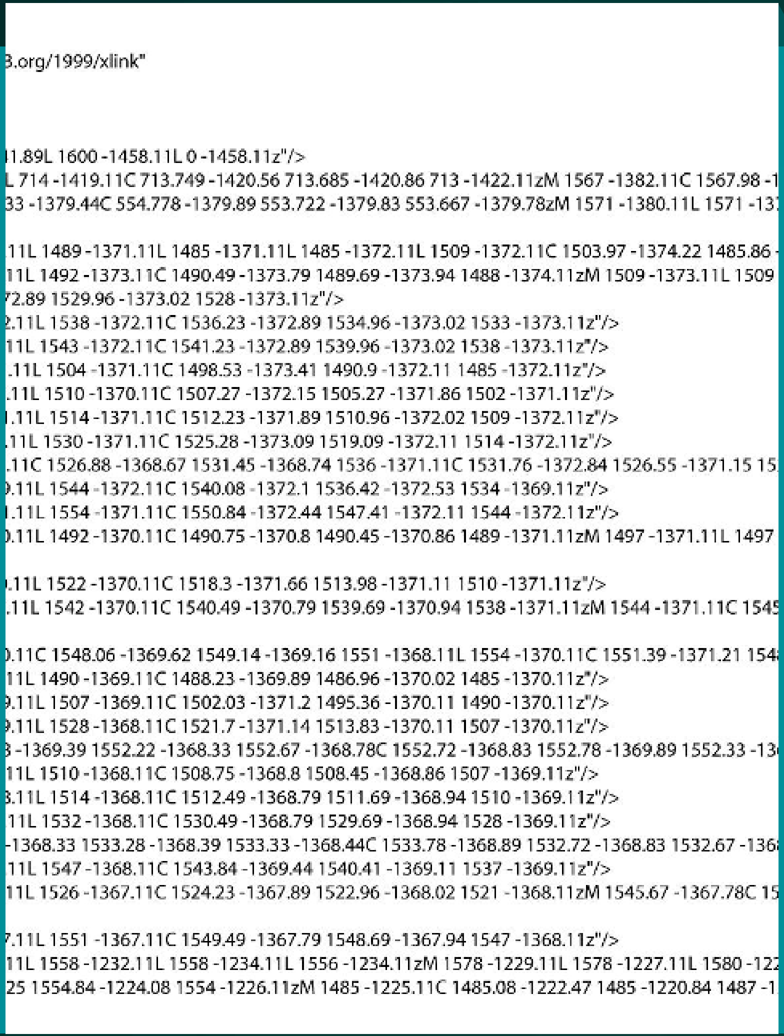
如果事件A和B的发生互不影响，则称事件A和B是相互独立的。独立事件的概率满足乘法公式P(AB)=P(A)P(B)。



条件独立

在某些条件下，事件A和B可能表现出独立性，即在给定条件C下，事件A和B的发生互不影响。条件独立可以通过公式P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)来判断。

全概率公式和贝叶斯公式



全概率公式

如果事件$B_1, B_2, \dots, B_n$构成一个完备事件组，即它们两两互不相容且它们的和为必然事件，则对任一事件A，有全概率公式$P(A)=P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$。

贝叶斯公式

在全概率公式的基础上，如果已知事件A已经发生，则可以利用贝叶斯公式求出在事件A发生的条件下，任一事件B_i发生的概率，即后验概率$P(B_i|A)$。贝叶斯公式具有重要的应用价值，在统计推断、机器学习等领域有着广泛的应用。

02 随机变量及其分布

随机变量概念及分类

随机变量的定义

设随机试验的样本空间为$S=\{e\}$,

$X=X(e)$是定义在样本空间S上的实值

单值函数。称$X=X(e)$为随机变量。

随机变量的分类

根据随机变量可能取的值的个数分为

离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量分布律

分布律的定义

对于一个离散型随机变量X，其所有可能取的值xi(i=1,2,...)与取这些值的概率P(X=xi)构成的表格或公式称为离散型随机变量X的分布律。

常见离散型随机变量的分布

0-1分布、二项分布、泊松分布等。

连续型随机变量概率密度函数

概率密度函数的定义

如果对于随机变量X的分布函数F(x)，存在非负可积函数f(x)，使对于任意实数x有F(x)=∫f(t)dt(积分下限是-∞，上限是x)，则称X为连续型随机变量，f(x)称为X的概率密度函数。

常见连续型随机变量的分布

均匀分布、指数分布、正态分布等。

随机变量函数分布

随机变量函数的定义

设X是随机变量，y=g(x)是实数域上的函数，则Y=g(X)也是随机变量，称Y是X的函数。

随机变量函数的分布

当已知随机变量X的分布时，可以通过一定的方法求出随机变量函数Y=g(X)的分布。常见的方法有公式法、变换法等。

03 多维随机变量及其分布

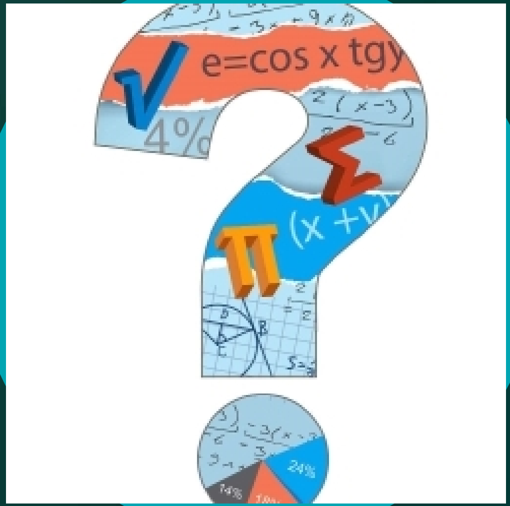
二维随机变量联合分布

联合分布函数定义

对于所有实数x,y，二维随机变量(X,Y)的联合分布函数F(x,y)等于事件{X≤x, Y≤y}的概率。

联合概率密度函数

若二维随机变量(X,Y)的分布函数F(x,y)可微，则存在非负函数f(x,y)，使得F(x,y)等于f(x,y)在对应区域的二重积分。



联合分布律

对于离散型二维随机变量(X,Y)，联合分布律为P{X=xi, Y=yj}=pij，其中i,j为变量所有可能取值的组合。

边缘分布与条件分布

01

边缘分布函数

二维随机变量(X,Y)中，X或Y自身的分布函数称为边缘分布函数。

02

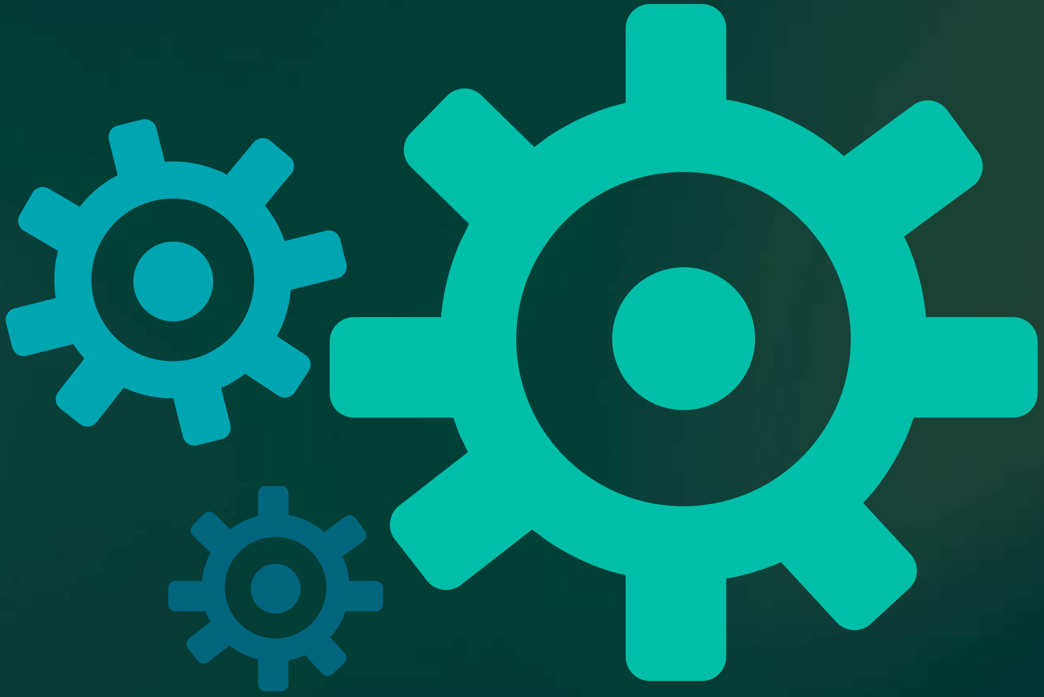
边缘概率密度函数

二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数对其中一个变量积分，得到另一个变量的边缘概率密度函数。

03

条件分布律

对于离散型二维随机变量(X,Y)，在给定$Y=y_j$条件下，X的条件分布律为$P\{X=x_i|Y=y_j\}$。



相互独立随机变量组

相互独立的定义

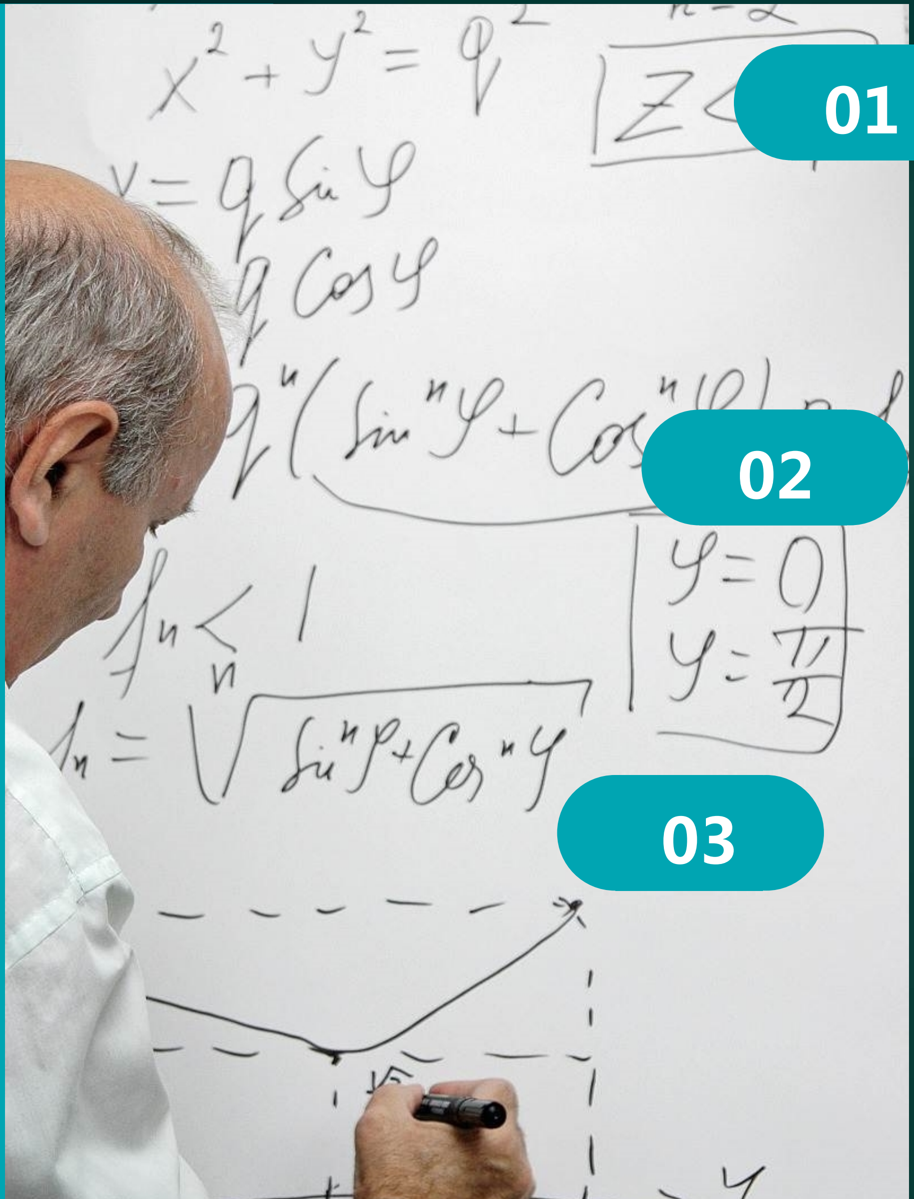
若二维随机变量(X,Y)的联合分布函数等于它们各自边缘分布函数的乘积，则称X与Y相互独立。

VS

相互独立的性质

若X与Y相互独立，则它们的任意函数也相互独立；反之，若X与Y不相互独立，则存在它们的函数使得这两个函数也不相互独立。

多维随机变量函数分布



01

多维随机变量函数的分布

对于多维随机变量(X1,X2,...,Xn)的函数Z=g(X1,X2,...,Xn)，其分布可以通过求解多维随机变量的联合分布函数和函数g的复合函数得到。

02

卷积公式

对于相互独立的随机变量X和Y，它们的和Z=X+Y的分布可以通过X和Y的概率密度函数的卷积得到。

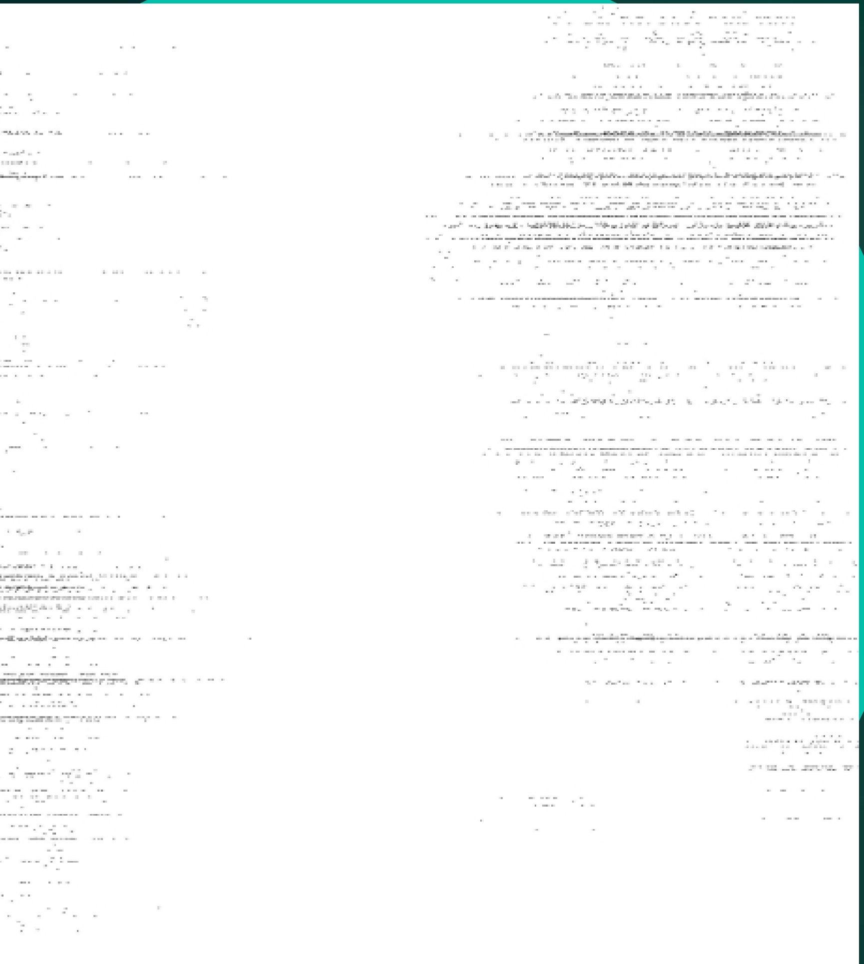
03

顺序统计量分布

对于来自同一总体的n个相互独立的随机变量X1,X2,...,Xn，它们的顺序统计量（如最大值、最小值等）的分布可以通过求解多维随机变量的联合分布函数和相应的顺序统计量的函数关系得到。

04 随机变量数字特征

数学期望与方差概念



01

数学期望（均值）

描述随机变量取值的“平均”位置，是概率加权下的平均值。

02

方差

描述随机变量取值与其数学期望的偏离程度，衡量数据的波动大小。

03

标准差

方差的平方根，与方差一样反映数据的离散程度，但单位与原随机变量相同。