

## 2012 年度弹性力学与有限元分析复习题及其答案

## (绝密试题)

## 一、填空题

- 1、弹性力学研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。
- 2、在弹性力学中规定，线应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。
- 3、在弹性力学中规定，切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。
- 4、物体受外力以后，其内部将发生内力，它的集度称为应力。与物体的形变和材料强度直接有关的，是应力在其作用截面的法线方向和切线方向的分量，也就是正应力和切应力。应力及其分量的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ 。
- 5、弹性力学的基本假定为连续性、完全弹性、均匀性、各向同性。
- 6、平面问题分为平面应力问题和平面应变问题。
- 7、已知一点处的应力分量  $\sigma_x = 100 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 50 \text{ MPa}$ ， $\tau_{xy} = 10\sqrt{50} \text{ MPa}$ ，则主应力  $\sigma_1 = 150 \text{ MPa}$ ， $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$ ， $\alpha_1 = 35.16^\circ$ 。
- 8、已知一点处的应力分量， $\sigma_x = 200 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 0 \text{ MPa}$ ， $\tau_{xy} = -400 \text{ MPa}$ ，则主应力  $\sigma_1 = 512 \text{ MPa}$ ， $\sigma_2 = -312 \text{ MPa}$ ， $\alpha_1 = -37^\circ 57'$ 。
- 9、已知一点处的应力分量， $\sigma_x = -2000 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 1000 \text{ MPa}$ ， $\tau_{xy} = -400 \text{ MPa}$ ，则主应力  $\sigma_1 = 1052 \text{ MPa}$ ， $\sigma_2 = -2052 \text{ MPa}$ ， $\alpha_1 = -82^\circ 32'$ 。
- 10、在弹性力学里分析问题，要考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。
- 11、表示应力分量与体力分量之间关系的方程为平衡微分方程。
- 12、边界条件表示边界上位移与约束，或应力与面力之间的关系式。分为位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件。
- 13、按应力求解平面问题时常采用逆解法和半逆解法。
- 14、有限单元法首先将连续体变换成为离散化结构，然后再用结构力学位移法进行求解。其具体步骤分为单元分析和整体分析两部分。
- 15、每个单元的位移一般总是包含着两部分：一部分是由本单元的形变引起的，另一部分是

由于其他单元发生了形变而连带引起的。

16、每个单元的应变一般总是包含着两部分：一部分是与该单元中各点的位置坐标有关的，是各点不相同的，即所谓变量应变；另一部分是与位置坐标无关的，是各点相同的，即所谓常量应变。

17、为了能从有限单元法得出正确的解答，位移模式必须能反映单元的刚体位移和常量应变，还应当尽可能反映相邻单元的位移连续性。

18、为了使得单元内部的位移保持连续，必须把位移模式取为坐标的单值连续函数，为了使得相邻单元的位移保持连续，就不仅要使它们在公共结点处具有相同的位移时，也能在公共边上保持连续。

整个公共边界上具有相同的位移。

- 19、在有限单元法中，单元的形函数  $N_i$  在  $i$  结点  $N_i=1$ ；在其他结点  $N_i=0$  及  $\sum N_i=1$ 。
- 20、为了提高有限单元法分析的精度，一般可以采用两种方法：一是将单元的尺寸减小，以便较好地反映位移和应力变化情况；二是采用包含更高次项的位移模式，使位移和应力的精度提高。

二、判断题（请在正确命题后的括号内打“√”，在错误命题后的括号内打“×”）

- 1、连续性假定是指整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。（√）
- 2、均匀性假定是指整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。（×）
- 3、连续性假定是指整个物体是由同一材料组成的。（×）
- 4、平面应力问题与平面应变问题的物理方程是完全相同的。（×）
- 5、如果某一问题中， $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ ，只存在平面应力分量  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ， $\tau_{xy}$ ，且它们不沿  $z$  方向变化，仅为  $x$ ， $y$  的函数，此问题是平面应力问题。（√）
- 6、如果某一问题中， $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ ，只存在平面应变分量  $\varepsilon_x$ ， $\varepsilon_y$ ， $\gamma_{xy}$ ，且它们不沿  $z$  方向变化，仅为  $x$ ， $y$  的函数，此问题是平面应变问题。（√）
- 7、表示应力分量与面力分量之间关系的方程为平衡微分方程。（×）
- 8、表示位移分量与应力分量之间关系的方程为物理方程。（×）
- 9、当物体的形变分量完全确定时，位移分量却不能完全确定。（√）
- 10、当物体的位移分量完全确定时，形变分量即完全确定。（√）
- 11、按应力求解平面问题时常采用位移法和应力法。（×）
- 12、按应力求解平面问题，最后可以归纳为求解一个应力函数。（×）
- 13、在有限单元法中，结点力是指单元对结点的作用力。（×）
- 14、在有限单元法中，结点力是指结点对单元的作用力。（√）
- 15、在平面三结点三角形单元的公共边界上应变和应力均有突变。（√）

三、简答题

- 1、简述材料力学和弹性力学在研究对象、研究方法方面的异同点。

在研究对象方面，材料力学基本上只研究杆状构件，也就是长度远大于高度和宽度的构件；而弹性力学除了对杆状构件作进一步的、较精确的分析外，还对非杆状结构，例如板和壳，以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构加以研究。

在研究方法方面，材料力学研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，大都引用了一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，这就大简化了数学推演，但是，得出的解答往往是近似的。弹性力学研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的结果就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

## 2、简述弹性力学的研究方法。

答：在弹性体区域内部，考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，分别建立三套方程。即根据微分体的平衡条件，建立平衡微分方程；根据微分线段上形变与位移之间的几何关系，建立几何方程；根据应力与形变之间的物理关系，建立物理方程。此外，在弹性体的边界上还要建立边界条件。在给定面力的边界上，根据边界上微分体的平衡条件，建立应力边界条件；在给定约束的边界上，根据边界上的约束条件建立位移边界条件。求解弹性力学问题，即在边界条件下根据平衡微分方程、几何方程、物理方程求解应力分量、形变分量和位移分量。

### 3、弹性力学中应力如何表示？正负如何规定？

答：弹性力学中正应力用  $\sigma$  表示，并加上一个下标字母，表明这个正应力的作用面与作用方向；切应力用  $\tau$  表示，并加上两个下标字母，前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。并规定作用在正面上的应力以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，作用在负面上的应力以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。

### 4、简述平面应力问题与平面应变问题的区别。

答：平面应力问题是指很薄的等厚度薄板，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。对应的应力分量只有  $\sigma_x$ ， $\sigma_y$ ， $\tau_{xy}$ 。

而平面应变问题是指很长的柱形体，在柱面上受有平行于横截面并且不沿长度变化的面力，同时体力也平行于横截面并且不沿长度变化，对应的位移分量只有  $u$  和  $v$ 。

### 5、简述圣维南原理。

如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同，）那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

### 6、简述按应力求解平面问题时的逆解法。

答：所谓逆解法，就是先设定各种形式的、满足相容方程的应力函数；并由应力分量与应力函数之间的关系求得应力分量；然后再根据应力边界条件和弹性体的边界形状，看这些应力分量对应于边界上什么样的面力，从而可以得知所选取的应力函数可以解决的问题。

### 7、以三节点三角形单元为例，简述有限单元法求解离散化结构的具体步骤。

- (1) 取三角形单元的结点位移为基本未知量。
- (2) 应用插值公式，由单元的结点位移求出单元的位移函数。
- (3) 应用几何方程，由单元的位移函数求出单元的应变。
- (4) 应用物理方程，由单元的应变求出单元的应力。
- (5) 应用虚功方程，由单元的应力出单元的结点力。
- (6) 应用虚功方程，将单元中的各种外力荷载向结点移置，求出单元的结点荷载。
- (7) 列出各结点的平衡方程，组成整个结构的平衡方程组。

8、为了保证有限单元法解答的收敛性，位移模式应满足哪些条件？

答：为了保证有限单元法解答的收敛性，位移模式应满足下列条件：(1) 位移模式必须能

反映单元的刚体位移；(2) 位移模式必须能反映单元的常量应变；(3) 位移模式应尽可能反映位移的连续性。

9、在有限单元法中，为什么要求位移模式必须能反映单元的刚体位移？

每个单元的位移一般总是包含着两部分：一部分是由本单元的形变引起的，另一部分是本单元的形变无关的，即刚体位移，它是由于其他单元发生了形变而连带引起的。甚至在弹性体的某些部位，例如在靠近悬臂梁的自由端处，单元的形变很小，单元的位移主要是由于其他单元发生形变而引起的刚体位移。因此，为了正确反映单元的位移形态，位移模式必须能反映该单元的刚体位移。

10、在有限单元法中，为什么要求位移模式必须能反映单元的常量应变？

答：每个单元的应变一般总是包含着两部分：一部分是与该单元中各点的位置坐标有关的，是各点不相同的，即所谓变量应变；另一部分是与位置坐标无关的，是各点相同的，即所谓常量应变。而且，当单元的尺寸较小时，单元中各点的应变趋于相等，也就是单元的应变趋于均匀，因而常量应变就成为应变的主要部分。因此，为了正确反映单元的形变状态，位移模式必须能反映该单元的常量应变。

11、在平面三结点三角形单元中，能否选取如下的位移模式并说明理由：

$$(1) u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y, \quad v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y^2$$

$$(2) u(x,y) = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2, \quad v(x,y) = \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

答：(1) 不能采用。因为位移模式没有反映全部的刚体位移和常量应变项；对坐标  $x, y$  不对等；在单元边界上的连续性条件也未能完全满足。

(2) 不能采用。因为，位移模式没有反映刚体位移和常量应变项；在单元边界上的连续性条件也不满足。

#### 四、分析计算题

1、试写出无体力情况下平面问题的应力分量存在的必要条件，并考虑下列平面问题的应力分量是否可能在弹性体中存在。

$$(1) \sigma_x = Ax + By, \quad \sigma_y = Cx + Dy, \quad \tau_{xy} = Ex + Fy;$$

$$(2) \sigma_x = A(x^2 + y^2), \quad \sigma_y = B(x^2 + y^2), \quad \tau_{xy} = Cxy;$$

其中，A, B, C, D, E, F 为常数。

解：应力分量存在的必要条件是必须满足下列条件：(1) 在区域内的平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases}; (2) \text{ 在区域内的相容方程 } \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0; (3) \text{ 在边界上的应力边界}$$

条件  $\begin{cases} (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \bar{f}_x(s) \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s) \end{cases}$ ; (4) 对于多连体的位移单值条件。



(1) 此组应力分量满足相容方程。为了满足平衡微分方程，必须  $A=-F$ ， $D=-E$ 。此外还应满足应力边界条件。

(2) 为了满足相容方程，其系数必须满足  $A+B=0$ ；为了满足平衡微分方程，其系数必须满足  $A=B=-C/2$ 。上两式是矛盾的，因此，此组应力分量不可能存在。

2、已知应力分量  $\sigma_x = -Qxy^2 + C_1 x^3$ ， $\sigma_y = -3C_2 xy^2$ ， $\tau_{xy} = -C_2 y^3 - C_3 x^2 y$ ，体力不计， $Q$  为常数。

试利用平衡微分方程求系数  $C_1$ ， $C_2$ ， $C_3$ 。

解：将所给应力分量代入平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} -Qy^2 + 3C_1 x^2 - 3C_2 y^2 - C_3 x^2 = 0 \\ -3C_2 xy - 2C_3 xy = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} [(3C_1 - C_3)x^2 - (Q + 3C_2)y^2] = 0 \\ (3C_2 + 2C_3)xy = 0 \end{cases}$$

由  $x$ ， $y$  的任意性，得

$$\begin{cases} 3C_1 - C_3 = 0 \\ Q + 3C_2 = 0 \\ 3C_2 + 2C_3 = 0 \end{cases}$$

由此解得， $C_1 = \frac{Q}{6}$ ， $C_2 = -\frac{Q}{3}$ ， $C_3 = \frac{Q}{2}$

3、已知应力分量  $\sigma_x = -q$ ， $\sigma_y = -q$ ， $\tau_{xy} = 0$ ，判断该应力分量是否满足平衡微分方程和相容方程。

解：将已知应力分量  $\sigma_x = -q$ ， $\sigma_y = -q$ ， $\tau_{xy} = 0$ ，代入平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases}$$

可知，已知应力分量  $\sigma_x = -q$ ， $\sigma_y = -q$ ， $\tau_{xy} = 0$  一般不满足平衡微分方程，只有体力忽略不计时才满足。

按应力求解平面应力问题的相容方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1+\nu)\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}$$

将已知应力分量  $\sigma_x = -q$ ,  $\sigma_y = -q$ ,  $\tau = 0$  代入上式, 可知满足相容方程。

按应力求解平面应变问题的相容方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_x) = \frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y}$$

将已知应力分量  $\sigma_x = -q$ ,  $\sigma_y = -q$ ,  $\tau = 0$  代入上式, 可知满足相容方程。

4、试写出平面问题的应变分量存在的必要条件, 并考虑下列平面问题的应变分量是否可能存在。

$$(1) \quad \varepsilon_x = Axy, \quad \varepsilon_y = By^3, \quad \gamma_{xy} = C - Dy^2;$$

$$(2) \quad \varepsilon_x = Ay^2, \quad \varepsilon_y = Bx^2y, \quad \gamma_{xy} = Cxy;$$

$$(3) \quad \varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = Cxy;$$

其中,  $A, B, C, D$  为常数。

解: 应变分量存在的必要条件是满足形变协调条件, 即

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

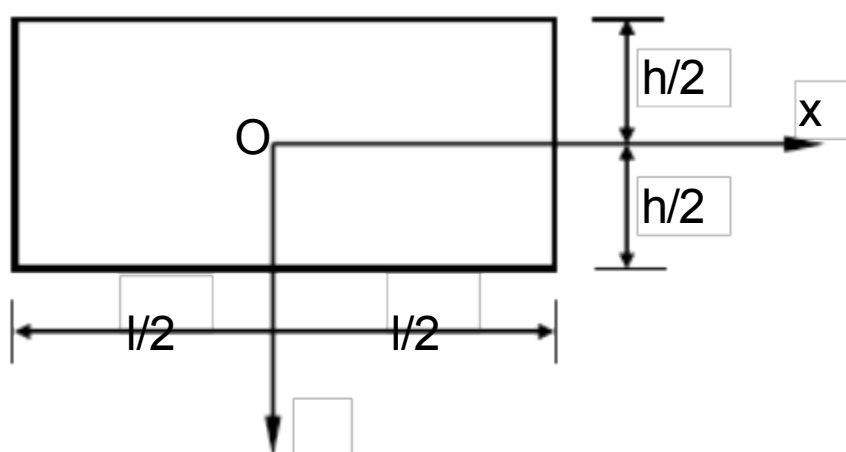
将以上应变分量代入上面的形变协调方程, 可知:

(1) 相容。

(2)  $2A + 2B = C$  (1分); 这组应力分量若存在, 则须满足:  $B=0, 2A=C$ 。

(3)  $0=C$ ; 这组应力分量若存在, 则须满足:  $C=0$ , 则  $\varepsilon_x = 0, \varepsilon_y = 0, \gamma_{xy} = 0$  (1分)。

5、证明应力函数  $\varphi = by^2$  能满足相容方程, 并考察在如图所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题 (体力不计,  $b \neq 0$ )。



解：将应力函数 $\varphi = by^2$  代入相容方程

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

可知，所给应力函数  $\varphi = by^2$  能满足相容方程。

由于不计体力，对应的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2b, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$$

对于图示的矩形板和坐标系，当板内发生上述应力时，根据边界条件，上下左右四个边上的面力分别为：

$$\text{上边, } y = \frac{h}{2}, \quad l=0, \quad m=-1, \quad f_x = -(\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = 0, \quad f_y = -(\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0;$$

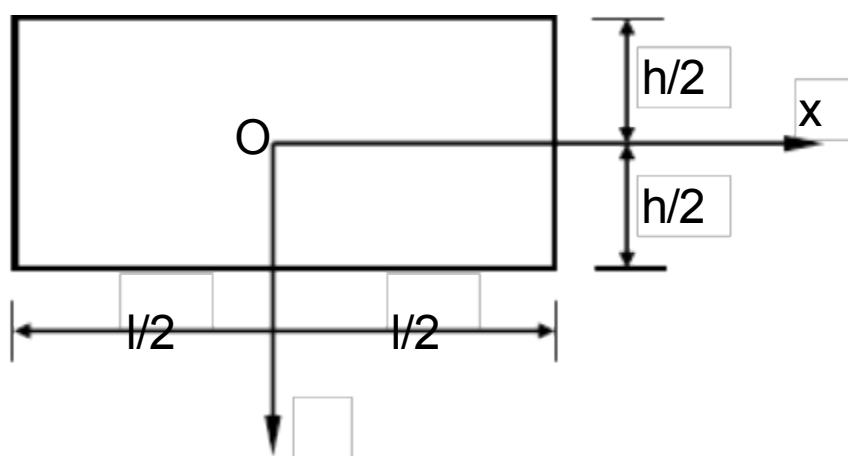
$$\text{下边, } y = \frac{h}{2}, \quad l=0, \quad m=1, \quad f_x = (\tau_{xy})_{y=\frac{h}{2}} = 0, \quad f_y = (\sigma_y)_{y=\frac{h}{2}} = 0;$$

$$\text{左边, } x = -\frac{l}{2}, \quad l=-1, \quad m=0, \quad f_x = -(\sigma_x)_{x=-\frac{l}{2}} = -2b, \quad f_y = -(\tau_{xy})_{x=-\frac{l}{2}} = 0;$$

$$\text{右边, } x = \frac{l}{2}, \quad l=1, \quad m=0, \quad f_x = (\sigma_x)_{x=\frac{l}{2}} = 2b, \quad f_y = (\tau_{xy})_{x=\frac{l}{2}} = 0。$$

可见，上下两边没有面力，而左右两边分别受有向左和向右的均布面力  $2b$ 。因此，应力函数  $\varphi = by^2$  能解决矩形板在  $x$  方向受均布拉力 ( $b > 0$ ) 和均布压力 ( $b < 0$ ) 的问题。

6、证明应力函数  $\varphi = axy$  能满足相容方程，并考察在如图所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题（体力不计， $a \neq 0$ ）。



解：将应力函数  $\varphi = axy$  代入相容方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/877166030143006114>