北京二中 2023—2024 学年度第六学段高二年级学段考试试卷

数学选择性必修Ⅲ

命题人：燕铁 审核人：周长春 得分：

一．选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A=\{x||x|<3，x\in Z\}$，$B=\{x||x|>1，x\in Z\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\varnothing$　　　　B. {–3，–2，2，3）

C. {–2，0，2}　　　　D. {–2，2}

【答案】D

【解析】

【分析】解绝对值不等式化简集合 A,B 的表示，再根据集合交集的定义进行求解即可.

【详解】因为 $A=\left\{x\|x|<3, x \in Z\right\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，

$B=\left\{x\|x|>1, x \in Z\right\}=\{x|x>1 \text{或} x<-1, x \in Z\}$，

所以 $A\cap B=\{2,-2\}$.

故选：D.

【点睛】本题考查绝对值不等式的解法，考查集合交集的定义，属于基础题.

2. 李老师全家一起外出旅游，家里有一盆花交给邻居帮忙照顾，如果邻居记得浇水，那么花存活的概率为 0.8，如果邻居忘记浇水，那么花存活的概率为 0.3．已知邻居记得浇水的概率为 0.6，忘记浇水的概率为 0.4，那么李老师回来后发现花还存活的概率为（　　）

A. 0.45　　B. 0.5　　C. 0.55　　D. 0.6

【答案】D

【解析】

【分析】利用条件概率和全概率公式求解.

【详解】设事件 A：邻居记得浇水，事件 B：邻居忘记浇水，事件 C：花存活，

则有 $P(A)=0.6, P(B)=0.4, P(C \mid A)=0.8, P(C \mid B)=0.3,$

由全概率公式可得 $P(C)=P(A)P(C \mid A)+P(B)P(C \mid B)=0.48+0.12=0.6$，

故选:D.

3. 已知函数 $f(x)=2^{x}+x, g(x)=\log_{2} x+x, h(x)=x^{3}+x$ 的零点分别为 a，b，c，则 a，b，c

的大小顺序为（　　）

A. $a>b>c$　　　　B. $b>c>a$　　　　C. $c>a>b$　　　　D. $b>a>c$

【答案】B

【解析】

【分析】首先可求出$c=0$，再由$f(x)=0$得$2^x=-x$，由$g(x)=0$得$\log_2 x=-x$，将其转化为$y=2^x$、$y=\log_2 x$与$y=-x$的交点，数形结合即可判断.

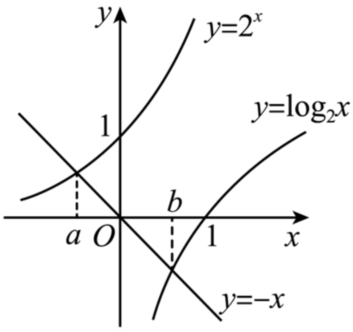
【详解】解：由$h(x)=x^3+x=0$得$x=0$，$\therefore c=0$，

由$f(x)=0$得$2^x=-x$，由$g(x)=0$得$\log_2 x=-x$.

在同一平面直角坐标系中画出$y=2^x$、$y=\log_2 x$、$y=-x$的图象，

由图象知$a<0$，$b>0$，$\therefore a<c<b$.

故选：B



【点睛】本题考查函数的零点，函数方程思想，对数函数、指数函数的图象的应用，属于中档题.

4. 已知m，n为异面直线，m⊥平面α，n⊥平面β，直线l满足l⊥m，l⊥n，$l\not\subset\alpha, l\not\subset\beta$, 则（　）

A. α∥β且l∥α　　　　B. α⊥β且l⊥β

C. α与β相交，且交线垂直于l　　　　D. α与β相交，且交线平行于l

【答案】D

【解析】

【详解】试题分析：由$m\perp$平面α，直线l满足$l\perp m$，且$l\not\subset\alpha$，所以$l//\alpha$，又$n\perp$平面β，$l\perp n, l\not\subset\beta$，所以$l//\beta$，由直线$m,n$为异面直线，且$m\perp$平面$\alpha, n\perp$平面$\beta$，则$\alpha$与$\beta$相交，否则，若$\alpha//\beta$则推出$m//n$，与$m,n$异面矛盾，所以$\alpha,\beta$相交，且交线平行于$l$，故选D.

考点：平面与平面的位置关系，平面的基本性质及其推论.

5. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，$x\in R$，其中 $\omega>0$，$-\pi<\varphi\leq\pi$．若 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 6π，且当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f\left(x\right)$ 取得最大值，则（　　）

A. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-2\pi,0\right]$ 上是减函数

B. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3\pi,-\pi\right]$ 上是减函数

C. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-2\pi,0\right]$ 上是增函数

D. $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3\pi,-\pi\right]$ 上是增函数

【答案】C

【解析】

【分析】由函数 $f(x)$ 的最小正周期为 6π 求 ω，且 $2\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=2$ 求 φ，进而确定解析式，分别求出函数的单调增区间和减区间，结合选项验证即可.

【详解】$\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 6π，根据周期公式可得 $\omega=\dfrac{2\pi}{6\pi}=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore f(x)=2\sin(\dfrac{1}{3}x+\varphi)$，

$\because$ 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

$\therefore 2\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=2$，则 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，

$\because -\pi<\varphi\leq\pi\Rightarrow\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore\ f(x)=2\sin(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{3})$，

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq\dfrac{1}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得函数的单调增区间 $[6k\pi-\dfrac{5\pi}{2},6k\pi+\dfrac{\pi}{2}]\ k\in\mathbf{Z}$，

由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，得函数的单调减区间 $[6k\pi+\dfrac{\pi}{2},6k\pi+\dfrac{7\pi}{2}]\ k\in\mathbf{Z}$，

结合选项知 C 正确，

故选：C.

6. 命题“$\forall x\in[1,2],2x+\dfrac{a}{x}\geq0$”为真命题的一个充分不必要条件是（　　）

A. $a\geq-1$　　B. $a\geq-2$　　C. $a\geq-3$　　D. $a\geq-4$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意得到命题的一个充要条件，然后将充分不必要条件转化为真子集，再结合选项即可得到结果.

【详解】命题“$\forall x \in [1,2], 2x+\frac{a}{x} \geq 0$”为真命题，可化为“$\forall x \in [1,2], 2x^2+a \geq 0$”恒成立，

即只需 $a \geq \left(-2x^2\right)_{\max} = -2$，

所以命题“$\forall x \in [1,2], 2x+\frac{a}{x} \geq 0$”为真命题的一个充要条件是 $a \geq -2$，

而要找的一个充分不必要条件即为集合 $\left\{a \middle| a \geq -2\right\}$ 的真子集，

由选项可知 A 符合题意.

故选:A.

7. 永沙高级中学学生会有 8 位学生春游，其中高一学生 2 名、高二学生 3 名、高三学生 3 名.现将他们排成一列，要求 2 名高一学生相邻、3 名高二学生相邻，3 名高三学生中任意两名都不相邻，则不同的排法种数有（　　）

A. 288 种　　B. 144 种　　C. 72 种　　D. 36 种

【答案】B

【解析】

【分析】先将 2 名高一学生看成整体，3 名高二学生看成整体，排成一排，然后 3 名高三学生去插空即可.

【详解】根据题意，分 2 步进行：

第一步，先将 2 名高一学生看成整体，3 名高二学生看成整体，然后排成一排有 $A_2^2A_3^3A_2^2$ 种不同的排法，

第二步，将 3 名高三学生插在这两个整体形成的 3 个空档中，有 A_3^3 种不同排法，

根据分步原理，共有 $A_2^2A_3^3A_2^2A_3^3=144$ 种不同的排法，

故选：B

8. 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+8)=-f(x)$，若 $y=f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称，且 $f(3)=3$，则 $f(43)=$（　　）

A. 0　　B. -3　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可判断函数的奇偶性以及周期，利用赋值法求出 $f(5)$，再结合周期求函数值，即得答案.

【详解】由于 $y=f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称，故 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，

即 $y=f(x)$ 为奇函数，

又 $f(x+8)=-f(x)$，则 $f(x+16)=-f(x+8)=f(x)$，即 16 为 $f(x)$ 的周期，

令 $x=-3$ 代入 $f(x+8)=-f(x)$，则 $f(5)=-f(-3)=f(3)=3$，

故 $f(43)=f(43-3\times16)=f(-5)=-f(5)=-3$，

故选：B

9. 已知 $f(x)$ 是定义在[﹣1，1]上的奇函数，且 $f(-1)=-1$，当 a，$b\in[-1,1]$，且 $a+b\neq0$ 时，$(a+b)(f(a)+f(b))>0$ 成立，若 $f(x)<m^2-2tm+1$ 对任意的 $t\in[-1,1]$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. （﹣∞，﹣2）∪{0}∪（2，+∞）

B. （﹣∞，﹣2）∪（2，+∞）

C. （﹣2，2）

D. （﹣2，0）∪（0，2）

【答案】B

【解析】

【分析】

先利用函数的奇偶性将已知不等式化为：$a,b\in[-1,1]$ 时，$(a-b)(f(a)-f(b))>0$，根据增函数的定义推得函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，从而求得最大值为 $f(1)=1$，然后将已知不等式先对 x 恒成立，再对 t 恒成立，就可以求出 m 的范围

【详解】解：因为 $f(x)$ 是定义在[﹣1，1]上的奇函数，当 a，$b\in[-1,1]$，且 $a+b\neq0$ 时，$(a+b)(f(a)+f(b))>0$ 成立，

所以将 b 换为 $-b$，可得 $(a-b)(f(a)-f(b))>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-f(-1)=1$，

所以 $f(x)<m^2-2tm+1$ 对任意的 $t\in[-1,1]$ 恒成立，等价于 $1<m^2-2tm+1$，

即 $2tm-m^2<0$ 对任意的 $t\in[-1,1]$ 恒成立，

令 $g(t)=2tm-m^2$，则 $\begin{cases}g(-1)<0\\g(1)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2m-m^2<0\\2m-m^2<0\end{cases}$，

解得 $m<-2$ 或 $m>2$，

故选：B

【点睛】关键点点睛：此题考查函数的奇偶性和单调性，含 3 个变量的不等式对 2 个变量恒成立求第三个变量取值范围的问题，解题的关键是按顺序先对一个变量恒成立，转化为求最值，再对另一个变量恒成立，转化为求最值即可，考查数学转化思想

10. 已知 $a>0$，$b>0$ 且 $ab=1$，不等式 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{m}{a+b}\geq 4$ 恒成立，则正实数 m 的取值范围是（　　）

A. $m\geq 2$　　　　B. $m\geq 4$　　　　C. $m\geq 6$　　　　D. $m\geq 8$

【答案】D

【解析】

【分析】由条件结合基本不等式可求 $a+b$ 的范围，化简不等式可得 $m\geq 4(a+b)-\frac{(a+b)^2}{2}$，利用二次函数性质求 $4(a+b)-\frac{(a+b)^2}{2}$ 的最大值，由此可求 m 的取值范围.

【详解】不等式 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{m}{a+b}\geq 4$ 可化为 $\frac{a+b}{2ab}+\frac{m}{a+b}\geq 4$，又 $a>0$，$b>0$，$ab=1$，

所以 $m\geq 4(a+b)-\frac{(a+b)^2}{2}$，

令 $a+b=t$，则 $m\geq 4t-\frac{t^2}{2}$，

因为 $a>0$，$b>0$，$ab=1$，所以 $t=a+b\geq 2\sqrt{ab}=2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立，

又已知 $m\geq 4t-\frac{t^2}{2}$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $m\geq\left(4t-\frac{t^2}{2}\right)_{\max}$

因为 $4t-\frac{t^2}{2}=\frac{1}{2}(8t-t^2)=-\frac{1}{2}(t-4)^2+8\leq 8$，当且仅当 $t=4$ 时等号成立，

所以 $m\geq 8$，当且仅当 $a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$ 或 $a=2-\sqrt{3}$，$b=2+\sqrt{3}$ 时等号成立，

所以 m 的取值范围是 $[8,+\infty)$，

故选：D.

二．填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 命题“$\forall x\in R$，$x^2+2x+2>0$”的否定为________________________.

【答案】$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2x_0+2\leq 0$

【解析】

【分析】利用全称命题的否定是特称命题写出结果即可.

【详解】：因为全称命题的否定是特称命题，

所以，命题“$\forall x\in R$，$x^2+2x+2>0$”的否定为：命题“$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2x_0+2\le 0$”.

故答案为$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2x_0+2\le 0$.

【点睛】本题考查命题的否定，特称命题与全称命题的否定关系，基本知识的考查.

12. 在二项式$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$的展开式中，含$x$的项的系数是________.

【答案】-10

【解析】

【分析】求出通项，根据x的指数为1求出r，然后可得.

【详解】$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$展开式的通项$T_{r+1}=C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=\left(-1\right)^r C_5^r x^{10-3r}$，

令$10-3r=1$得$r=3$，所以含x的项的系数为$\left(-1\right)^3 C_5^3=-10$.

故答案为：-10

13. 已知$f\left(x\right)$为偶函数，当$x\ge 0$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}1-4x^2, x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\ 2x-1, x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\end{cases}$，则$f\left[f\left(\dfrac{5}{8}\right)\right]=$________；

不等式$f\left(x-1\right)\le\dfrac{3}{4}$的解集为________.

【答案】 ①. $\dfrac{3}{4}$##0.75 ②. $\left[\dfrac{1}{8},\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{15}{8}\right]$

【解析】

【分析】根据题中所给的分段函数解析式，先求出$f\left[f\left(\dfrac{5}{8}\right)\right]$值，结合其单调性得到其范围，结合偶函数的性质得到结果.

【详解】由题意可知$f\left[f\left(\dfrac{5}{8}\right)\right]=f\left(2\times\dfrac{5}{8}-1\right)=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=1-4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

当$x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$时，$f\left(x\right)=1-4x^2\le\dfrac{3}{4}$，解$x\le-\dfrac{1}{4}$或$x\ge\dfrac{1}{4}$，则$\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{2}$，

当$x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，$f\left(x\right)=2x-1\le\dfrac{3}{4}$，解$x\le\dfrac{7}{8}$，则$\dfrac{1}{2}<x\le\dfrac{7}{8}$，

故当 $f(x)\le\frac{3}{4}$，则 $\frac{1}{4}\le x\le\frac{7}{8}$，

由 $f(x)$ 是偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)\le\frac{3}{4}$，则 $-\frac{7}{8}\le x\le-\frac{1}{4}$

由 $f(x-1)\le\frac{3}{4}$，则 $\frac{1}{4}\le x-1\le\frac{7}{8}$ 或 $-\frac{7}{8}\le x-1\le-\frac{1}{4}$

解得 $\frac{5}{4}\le x\le\frac{15}{8}$ 或 $\frac{1}{8}\le x\le\frac{3}{4}$

故答案为：$\frac{3}{4}$；$\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{4},\frac{15}{8}\right]$

14. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，点 A 是抛物线上的动点．设点 $B(-2,0)$，当 $\frac{|AF|}{|AB|}$ 取得最小值时，

$|AF|=$______；此时 $\triangle ABF$ 内切圆的半径为______.

【答案】 ①. 4 ②. $4-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】第一空，设 $A(x,y)$，由题结合抛物线定义可得 $\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+8x}}$，后由基本不等式可得答案；第二空，由第一空可得 $\triangle ABF$ 面积及周长，即可得答案.

【详解】由题可得抛物线焦点为(2,0)，准线为：$x=-2$.

设 $A(x,y)$，其中 $x>0$.

由抛物线定义可得 $|AF|=x+2$，$|AB|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+8x}$.

则 $\frac{|AF|}{|AB|}=\frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+8x}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8x}{x^2+4x+4}}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8}{x+\frac{4}{x}+4}}}\ge\sqrt{\frac{1}{1+\frac{8}{2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}+4}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

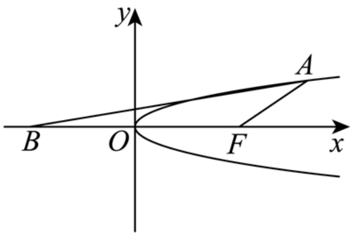
当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时取等号，则 $|AF|=4$；

由第一空取 $A(2,4)$，则 $|AB|=\sqrt{(2+2)^2+4^2}=4\sqrt{2},|AF|=|BF|=4$，得 $\triangle ABF$ 周长为 $C=8+4\sqrt{2}$.

又 $\triangle ABF$ 面积为 $S=\frac{1}{2}|BF|\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

设 $\triangle ABF$ 内切圆的半径为 r，则 $\frac{1}{2}Cr=S\Rightarrow r=\frac{2S}{C}=\frac{16}{8+4\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$.

故答案为：4；$4-2\sqrt{2}$



15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|a^{x}-1\right|, & x\le 1\\ \left(a-2\right)\left(x-1\right), & x>1\end{cases}$，其中 $a>0$ 且 $a\ne 1$．给出下列四个结论：

①若 $a\ne 2$，则函数 $f\left(x\right)$ 的零点是 0；

②若函数 $f\left(x\right)$ 无最小值，则 a 的取值范围为(0,1)；

③若存在实数 M，使得对任意的 $x\in \mathrm{R}$，都有 $f\left(x\right)\le M$，则 M 的最小值为 1；

④若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a-2$ 恰有三个不相等的实数根 x_1，x_2，x_3，则 a 的取值范围为(2,3)，且 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围为 $\left(-\infty,2\right)$.

其中，所有正确结论的序号是_______.

【答案】①③④

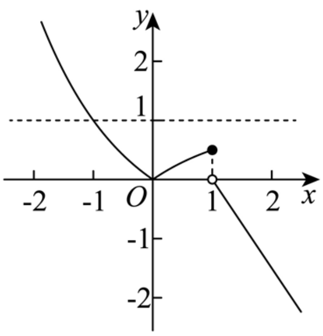
【解析】

【分析】分 $0<a<1$，$1<a<2$， $a=2$，$a>2$ 四种情况作出函数 $f(x)$ 的简图，然后对四个结论逐一判断正误.

【详解】对于①：当 $a\ne 2$ 时，显然，当 $x>1$ 时，$f(x)$ 无零点；

当 $x\le 1$ 时，由 $f(x)=0$ 可得 $a^{x}=1\Rightarrow x=0$，所以 $f(x)$ 的零点是 0. 故①正确；

对于②：当 $0<a<1$ 时，简图如下：



当 $1<a<2$ 时，简图如下：