重庆市第八中学2024届高三适应性月考卷（八）数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知全集$I=\left\{x|0\leq x\leq 6\right\}$，集合$M=\left\{x\in I|\ x^2-5x+6\geq 0\right\}$，则$\complement_I M=$（　　）

A．$\left[2,3\right]$　　B．$\left(2,3\right)$　　C．$\left[1,6\right]$　　D．$\left(1,6\right)$

2．某工厂生产A，B，C三种不同型号的产品，它们的产量之比为2:3:5，用分层抽样的方法抽取一个容量为n的样本.若样本中A型号的产品有30件，则样本容量n为（　　）

A．150　　B．180　　C．200　　D．250

3．已知i为虚数单位，则$(1+\mathrm{i})^{12}=$（　　）

A．2^{12}　　B．-2^{12}　　C．2^6　　D．-2^6

4．设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，前n项和为S_n，若$a_2+a_4=6,S_9=45$，则$d=$（　　）

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

5．一个宿舍的四名同学甲、乙、丙、丁受邀参加一个晚会且必须有人去，其中甲、乙两名同学要么都去，要么都不去，则该宿舍不同的参加晚会的方案共有（　　）

A．4　　B．7　　C．10　　D．12

6．已知圆台O_1O_2的上底面积为16π，下底面积为64π，且其外接球半径$R=\sqrt{65}$，则该圆台的高为（　　）

A．6或7　　B．8或12　　C．6或8　　D．7或12

7．已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{ax}-\ln x,a>0$.若$\exists x_0\in\left(1,2\right)$，对$\forall x\in\left(1,2\right),f\left(x_0\right)\leq f\left(x\right)$，则（　　）

A．$1<\mathrm{e}^a<\sqrt{2}$　　B．$a<\mathrm{e}^{-a}<\sqrt{2a}$

C．$\sqrt{2a}<\mathrm{e}^{-a}<\sqrt{2}a$　　D．$a<\mathrm{e}^{-a}<2a$

8．已知平面向量$\vec{a},\vec{b}$均为单位向量，且$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$，若$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\frac{1}{4}$，则$\left|\vec{c}\right|$的取值范围为（　　）

A．$\left[0,\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2},\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]$

C. $\left[0,\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right]$　　　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right]$

二、多选题

9．已知双曲线C过点$\left(\sqrt{6},\sqrt{6}\right)$且渐近线为$r=\pm\sqrt{2}x$，则（　）

A．C的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$

B．C的离心率为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C．直线$x=my+3\left(m\in\mathbf{R}\right)$经过$C$的一个焦点

D．C的两条渐近线的夹角的正切值为$2\sqrt{2}$

10．已知$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right),\omega>0$，那么（　）

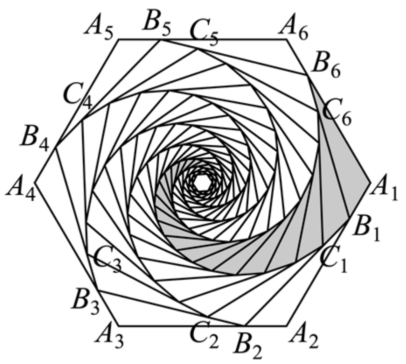
A．若$f\left(x\right)$的最小正周期为π，则$\omega=2$

B．若$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到的函数为偶函数，则$\omega_{\min}=1$

C．若$f\left(x\right)$在$\left(0,\pi\right)$上恰有 2 个极值点，则ω的取值范围为$\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$

D．存在ω，使得$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递减

11．数学中有各式各样富含诗意的曲线，螺旋线就是其中一类，螺旋线这个名词源于希腊文，它的原意是“旋卷”或“缠绕”.如图所示，正六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$的边长为 1，分别取其各条边的四等分点，连接得到正六边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$，再取其各条边的四等分点，连接得到正六边形$C_1C_2C_3C_4C_5C_6$，依次类推…对于阴影部分，记第一个阴影$\triangle A_1B_1B_6$的最大边长为a_1，面积为S_1；第二个阴影$\triangle B_1C_1C_6$的最大边长为a_2，面积为S_2，第三个阴影三角形的最大边长为a_3，面积为S_3，依次类推….则（　）



A．数列$\{a_n\}$是以$\frac{3}{4}$为公比的等比数列

B．$S_2=\frac{39\sqrt{3}}{1024}$

C．任意阴影三角形的最小角的余弦值为$\frac{7\sqrt{13}}{26}$

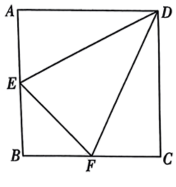
D．数列$\{S_n\}$的前 2023 项和小于$\frac{\sqrt{3}}{4}$

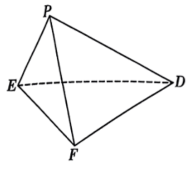
三、填空题

12．抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$A(2,m)(m>0)$在C上，若$|AF|=3$，则m的值为________.

13．设曲线$f(x)=x\sin x$在点$(\pi,f(\pi))$处的切线为l，则l与两坐标轴围成的三角形的面积为________.

14．如图，边长为 2 的正方形$ABCD$中，E,F分别是AB,BC的中点，将$\triangle ADE,\triangle CDF,\triangle BEF$分别沿$DE,DF,EF$折起，使$A,B,C$重合于点$P$，则三棱锥$P-DEF$的外接球的体积为________；设直线$PD,PE,PF$与平面$DEF$所成角分别为$\alpha,\beta,\gamma$，则$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$________.





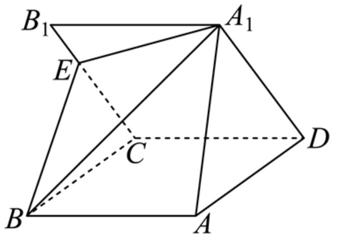
四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{9}{4}$.

(1)求 A；

(2)若$b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$，求$\cos C$.

16．如图，$ABCD$为菱形，$AB=2,\angle ADC=60^\circ$，将菱形$ABCD$沿CD旋转至A_1B_1CD，使得$AA_1=\sqrt{6}$，E为线段CB_1上一动点.



(1)求证：BE // 平面AA_1D；

(2)当E为CB_1中点时，求平面EA_1B与平面AA_1D所成角的余弦值.

17．一个袋子中有10个大小相同的球，其中有4个白球，6个黄球，从中依次随机地摸出4个球作为样本，设采用有放回摸球和不放回摸球得到的样本中黄球的个数分别为X,Y.

(1)求$E(X),E(Y)$；

(2)现采用不放回摸球，设$A_k\ (k=1,2,3,4)$表示“第k次取出的是黄球”，证明：

$P(A_1A_2A_3)<P(A_1)P(A_2)P(A_3)$；

(3)分别就有放回摸球和不放回摸球，用样本中黄球的比例估计总体中黄球的比例，求误差的绝对值不超过0.2的概率.并比较所求两概率的大小，说明其实际含义.

18．过椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的右焦点$F$且不与坐标轴垂直的直线$l$交$C$于$A,B$两点，$AB$的垂直平分线交$x$轴于点$D$，交直线$x=t$于点$E$.

(1)O为坐标原点，求$|OD|$的取值范围；

(2)若A,D,B,E四点在同一圆上，求t的值.

19．给出以下两个数学运算（符号）定义：

①若函数$y=f(x)$，则$f^{(1)}(x)=f(x),f^{(2)}(x)=f(f(x)),\cdots\cdots,f^{(k)}(x)=f^{(k-1)}(f(x))$，其中$f^{(k)}(x)$称为函数$y=f(x)$的$k$次迭代.如：

$f(x)=2x-1,f^{(2)}(x)=f(f(x))=2f(x)-1=2(2x-1)-1=4x-3,\cdots\cdots$.

②对于正整数$a,b,m\ (0\leq a\leq b)$，若b被m除得的余数为a，则称a,b同余于m，记为

$b \equiv a(\bmod m)$.如：$25 \equiv 1(\bmod 2), 26 \equiv 2(\bmod 3), \cdots\cdots$.

(1)若函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f^{(3)}(1)$；

(2)设n是一个给定的正整数，函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, x \equiv 0(\bmod 3), \\ \dfrac{x-1}{3}+3^{n-1}, x \equiv 1(\bmod 3), \\ \dfrac{x-2}{3}+2 \times 3^{n-1}, x \equiv 2(\bmod 3),\end{cases} x \in \mathbf{N}$, 记集合

$A_n=\left\{x \in \mathbf{N} \mid f^{(n)}(x)=x\right\}$.

①证明：当$x \geqslant 3^n$时，$f(x)<x$；

②求A_1, A_2并猜想A_n.

参考答案：

1．B

【分析】解不等式，根据补集的定义即可求解。

【详解】集合 $M=\left[0,2\right]\cup\left[3,6\right]$，所以 $\complement_{I}M=\left(2,3\right)$，

故选：B

2．A

【分析】直接由分层抽样的定义按比例计算即可.

【详解】由题意样本容量为 $n=30\div\dfrac{2}{2+3+5}=150$.

故选：A.

3．D

【分析】先计算 $(1+\mathrm{i})^2$，再计算 $(1+\mathrm{i})^{12}$，

【详解】$(1+\mathrm{i})^{12}=(2\mathrm{i})^6=-2^6$，

故选：D

4．C

【分析】根据等差数列下标和性质以及 S_n 的公式计算出 a_3,a_5，然后计算公差 d。

【详解】$a_2+a_4=2a_3=6\Rightarrow a_3=3,S_9=\dfrac{9\left(a_1+a_9\right)}{2}=9a_5=45\Rightarrow a_5=5$，

故 $d=\dfrac{5-3}{2}=1$。

故选：C

5．B

【分析】将甲、乙捆绑作为一个整体，可认为三名同学受邀参加一个晚会，并且有人必须去，根据分步乘法计算原理计算可得.

【详解】由于甲、乙两名同学要么都去，要么都不去，

因此将甲、乙捆绑，则可认为三名同学受邀参加一个晚会，并且有人必须去，

每个人有两种选择，则共有 2^3 种，而其中有一种情况是三名同学都不去，

所以共有 $2^3-1=7$ 种方案.

故选：B.

6．C

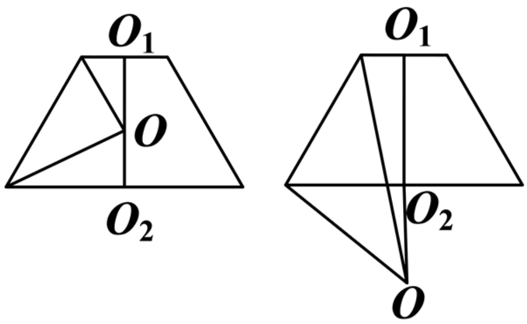
【分析】根据截面图列出上下底面半径r_1,r_2和球心到上下底面的距离d_1,d_2的方程组求解即可。

【详解】截面如图所示，球心可在截面的内部或外部，

设上下底面半径分别为r_1,r_2，则$r_1=4,r_2=8$，设球心O到上下底面的距离分别分别为d_1,d_2，

则$r_1^2+d_1^2=65,r_2^2+d_2^2=65$，故$d_1=7,d_2=1$，于是圆台高$h=d_1+d_2=8$或$h=\left|d_1-d_2\right|=6$。

故选：C



7．B

【分析】由题意可知：$f(x)$在$\left(1,2\right)$上有最小值，即有极小值点，根据极小值点的定义和零点存在定理列式即可。

【详解】$f'\left(x\right)=a\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{1}{x}$，由条件可知$f(x)$在$\left(1,2\right)$有极小值点，根据零点存在定理可得：

$f'\left(1\right)<0$且$f'\left(2\right)>0$，即$a\mathrm{e}^{a}<1$且$a\mathrm{e}^{2a}>\dfrac{1}{2}$，所以$a<\mathrm{e}^{-a}<\sqrt{2a}$。

故选：B

8．D

【分析】据题意，设$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\vec{c}=(x,y)$，由已知可得点$C$在圆

$(x-\dfrac{3}{4})^2+(y-\dfrac{\sqrt{3}}{4})^2=\dfrac{1}{2}$上运动，由$|\vec{c}|=|OC|$，数形结合即可求得取值范围.

【详解】设$\vec{a}=\left(1,0\right),\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\vec{c}=\left(x,y\right)$，

由$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\dfrac{1}{4}$，可得$x^2-\dfrac{3}{2}x+y^2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=-\dfrac{1}{4}$，

所以点$C\left(x,y\right)$在圆$\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2}$上，则$\left|\vec{c}\right|=\left|OC\right|$.

又点$O(0,0)$到圆心$(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$的距离为$\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，圆的半径$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\le|OC|\le\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$，

所以$|\vec{c}|$的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right]$.

故选：D.

【点睛】方法点睛：本题考查向量的运算与几何性质的转化，难度一般.根据向量的模长与夹角，结合向量的坐标运算，将定向量转化为定点，动向量化为动点问题，将向量的模长转化为定点到动点的距离，再结合几何性质求得最值即可.

9．ACD

【分析】用待定系数法求出双曲线的方程即可判断ABC；利用正切函数二倍角公式可判断D。

【详解】若C的焦点在x轴，$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，又$\frac{6}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$，则$a^2=3,b^2=6,c^2=9$，

若C的焦点在y轴，$\frac{a}{b}=\sqrt{2}$，又$\frac{6}{a^2}-\frac{6}{b^2}=1$，则$b^2=-3$，舍；故$C$的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$，故A正确；

所以C的离心率为$e=\sqrt{3}$，故B错误；

直线$x=my+3$过C的右焦点$(3,0)$，故C正确；

C的两条渐近线夹角的正切值为$\left|\frac{\sqrt{2}-\left(-\sqrt{2}\right)}{1+\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}\right|=2\sqrt{2}$，故D正确。

故选：ACD

10．AC

【分析】结合周期公式检验选项A；结合函数图象的平移及函数的奇偶性检验选项B；结合函数取得最值的条件检验选项C；结合函数的单调性检验选项D.

【详解】$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3}),\omega>0$，因为$\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，又$\omega>0$，可知$\omega=2$，故A正确；

将$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后得到$y=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$，

若所得函数为偶函数，则$\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，得$\omega=\frac{1}{2}+3k,k\in\mathbf{Z}$，所以$\omega_{\min}=\frac{1}{2}$，故B错误；

由$x\in\left(0,\pi\right)$，得$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$，

若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上恰有 2 个极值点，则 $\frac{3\pi}{2}<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\le\frac{5\pi}{2}$，解得 $\omega\in\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$，故 C 正确；

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3},\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$,$\omega$ 无解，

即 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上不可能单调递减，故 D 错误.

故选：AC.

11．BCD

【分析】利用给定条件，利用余弦定理、三角形面积公式求出 a_1,S_1，进而探求数列 $\left\{a_n\right\}$、$\left\{S_n\right\}$ 的特征，再逐项分析计算即得.

【详解】正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的边长为 1，每个内角为 $120°$，在 $\triangle A_1B_1B_6$ 中，

$\left|A_1B_1\right|=\frac{1}{4},\left|A_1B_6\right|=\frac{3}{4}$，

由余弦定理，得 $\left|B_1B_6\right|=\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{3}{4})^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot(-\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{13}}{4}$，

则 $a_1=\frac{\sqrt{13}}{4},S_1=\frac{1}{2}\cdot\left|A_1B_1\right|\cdot\left|A_1B_6\right|\cdot\sin120°=\frac{3\sqrt{3}}{64}$，

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=\sqrt{(\frac{1}{4}a_{n-1})^2+(\frac{3}{4}a_{n-1})^2-2\cdot\frac{1}{4}a_{n-1}\cdot\frac{3}{4}a_{n-1}\cdot(-\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{13}}{4}a_{n-1}$，

因此数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 $\frac{\sqrt{13}}{4}$ 为首项，以 $\frac{\sqrt{13}}{4}$ 为公比的等比数列，$a_n=(\frac{\sqrt{13}}{4})^n$，

当 $n\ge 2$ 时，$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}a_{n-1}\cdot\frac{3}{4}a_{n-1}\cdot\sin120°=\frac{3\sqrt{3}}{64}a_{n-1}^2=\frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot(\frac{13}{16})^{n-1}$，$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{64}$ 满足上式，

因此数列 $\left\{S_n\right\}$ 是以 $\frac{3\sqrt{3}}{64}$ 为首项，以 $\frac{13}{16}$ 为公比的等比数列，

对于 A，数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 $\frac{\sqrt{13}}{4}$ 为公比的等比数列，A 错误；

对于 B，$S_2=\frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot\frac{13}{16}=\frac{39\sqrt{3}}{1024}$，B 正确；

对于 C，记阴影三角形的最小角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{(\frac{3}{4}a_{n-1})^2+a_n^2-(\frac{1}{4}a_{n-1})^2}{2\cdot\frac{3}{4}a_{n-1}\cdot a_n}=\frac{7\sqrt{13}}{26}$，C 正确；

对于 D，$\left\{S_n\right\}$ 的前 2023 项和为 $S_1+S_2+\cdots+S_{2023}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{64}[1-(\frac{13}{16})^{2023}]}{1-\frac{13}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}[1-(\frac{13}{16})^{2023}]<\frac{\sqrt{3}}{4}$，

D 正确.

故选：BCD