

2020-2021 学年湖南省长沙市三湘名校教育联盟五市十校教研教

改共同体高二（下）期末数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知集合 $S = \{x | x^2 - x = 0\}$, $T = \{x | x^2 + x = 0\}$, 则 $S \cup T =$ ()
- A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. (5 分) 已知 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()
- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. (5 分) 当生物体死亡后, 它机体内的碳 14 含量会按确定的比率衰减, 大约每经过 5730 年衰减为原来的一半, 这个时间称为“半衰期”. 2021 年 3 月 23 日四川省文物考古研究院联合北京大学对三星堆新发现 K4 坑的部分炭屑样品使用碳 14 年代检测方法进行了分析, 发现碳 14 含量衰减为原来的 67.90%, 则该遗址距今约 () 年. (参考数据: $\log_2 0.6790 = -0.5585$)
- A. 3000 B. 3100 C. 3200 D. 3300
4. (5 分) 已知 $3\sin \alpha - 4\cos \alpha = 0$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()
- A. $-\frac{12}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{24}{25}$ D. $-\frac{24}{25}$
5. (5 分) 已知 $a = \log_6 2$, $b = \log_{12} 4$, $c = \log_{18} 6$, 则 ()
- A. $c > b > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $a > c > b$
6. (5 分) 为庆祝建党一百周年, 长沙市文史馆举办“学党史, 传承红色文化”的主题活动, 某高校团委决定选派 5 男 3 女共 8 名志愿者, 利用周日到该馆进行宣讲工作. 已知该馆有甲、乙两个展区, 若要求每个展区至少要派 3 名志愿者, 每个志愿者必须到两个展区中的一个工作, 且女志愿者不能单独去某个展区工作, 则不同的选派方案种数为 ()
- A. 252 B. 250 C. 182 D. 180
7. (5 分) 在半径为 2 的球中挖去一个半径为 1 的同心球, 设过球心的截面的面积为 S_1 , 不过球心的任意非圆面的截面的面积为 S_2 , 则 ()

A. $S_1 = S_2$

B. $S_1 > S_2$

C. $S_1 < S_2$

D. $S_1、S_2$ 的大小关系不定

8. (5分) 若 A 是圆 C 所在平面内的一定点, P 是圆 C 上的一动点, 线段 AP 的垂直平分线与直线 CP 相交于点 Q , 则点 Q 的轨迹不可能是 ()

A. 圆

B. 椭圆

C. 双曲线

D. 抛物线

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. (5分) 下列关于函数 $f(x) = |\sin 2x|$ 的结论正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 是偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2

C. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递增

D. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

10. (5分) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 中, M 为 PA 的中点, $PB \perp CM$, $CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 ()

A. $PB \perp CA$

B. $PB \perp PA$

C. 该三棱锥的体积是 $\frac{1}{3}$

D. 该三棱锥的外接球的表面积是 3π

11. (5分) 已知直线 $l: ax + y - 2 = 0$ 与 $eC: (x-1)^2 + (y-a)^2 = 4$ 相交于 $A、B$ 两点, 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则满足条件的实数 a 的值可能是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. 2

D. 3

12. (5分) 设随机变量 X 表示从 1 到 n 这 n 个整数中随机抽取的一个整数, Y 表示从 1 到 X 这 X 个整数中随机抽取的一个整数, 则 ()

A. 当 $n=2$ 时, $P(X=2, Y=1) = \frac{1}{4}$

B. 当 $n=4$ 时, $P(X+Y=4) = \frac{7}{24}$

C. 当 $n=k(k \dots 2 \text{ 且 } k \in N^*)$ 时, $P(X=k, Y=k) = \frac{1}{k^2}$

D. 当 $n=2^k(k \dots 2 \text{ 且 } k \in N^*)$ 时, $\sum_{i=1}^k P(X=2^i, Y=1) = \frac{2^k - 1}{2^{2k}}$

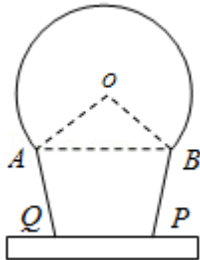
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. (5 分) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_4 = -2$ ， $a_6 = 3$ ，则 S_n 的最小值为 ____.

14. (5 分) 宽与长的比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ 的矩形叫做黄金矩形. 它广泛的出现在艺术、建筑、人体和自然界中，令人赏心悦目. 在黄金矩形 $ABCD$ 中， $BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ， $AB > BC$ ，那么 $\frac{AB}{AC}$ 的值为 ____.

15. (5 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线与 C 交于 A ， B 两点，且 $|FA| = 4$ ，则 $|AB| =$ ____.

16. (5 分) 2020 年底，我国已正式对外宣布，实现了全面脱贫的伟大胜利. 某市为表彰在脱贫攻坚工作中做出突出贡献的先进单位，制作了一批奖杯，奖杯的剖面图形如图所示，其中扇形 OAB 的半径为 10， $\angle PBA = \angle QAB = \frac{\pi}{3}$ ， $\angle AOB = 2\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ ， $AQ = QP = PB$ ，则 $PQ =$ ____ (用 θ 表示)；据调研发现，当 OP 最长时该奖杯比较美观，此时 θ 的值为 ____.



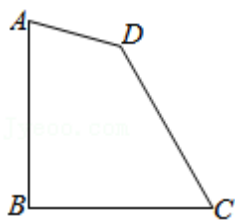
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n$ ，令 $b_n = a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2^{n-1}}$ ， $n = 1, 2, \dots$

(1) 求 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中去掉数列 $\{b_n\}$ 中的项，剩下的项按原来顺序排成新数列 $\{c_n\}$ ，求 c_{2021} 的值.

18. (12 分) 如图，在平面四边形 $ABCD$ 中， $BC = 2$ ， $AD = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $\angle BAD = 75^\circ$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积.



19. (12分) 为了解某校学生参加社区服务的情况，采用按性别分层抽样的方法进行调査。已知该校共有学生 960 人，其中男生 560 人，从全校学生中抽取了容量为 n 的样本，得到一周参加社区服务时间的统计数据如下：

	超过 1 小时	不超过 1 小时
男	20	8
女	12	m

- (1) 求 m, n ;
- (2) 能否有 95% 的把握认为该校学生一周参加社区服务时间是否超过 1 小时与性别有关?
- (3) 若以样本中学生参加社区服务时间超过 1 小时的频率作为该事件发生的概率，现从该校随机调查 60 名学生，记一周参加社区服务时间超过 1 小时的人数为 X ，求 X 的数学期望.

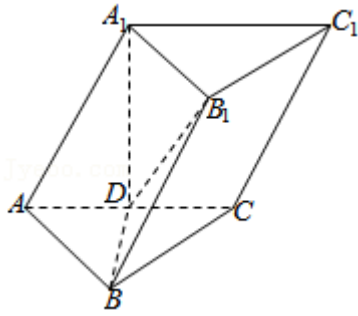
附：

$P(K^2 \dots k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

20. (12分) 如图所示，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面 $\triangle ABC$ 是正三角形，侧面 AA_1C_1C 是菱形，点 A_1 在平面 ABC 的射影为线段 AC 的中点 D ，过点 B_1, B, D 的平面 α 与棱 A_1C_1 交于点 E .

- (1) 证明：四边形 BB_1ED 是矩形；
- (2) 求二面角 $A - BB_1 - E$ 的余弦值.



21. (12分) 双曲线 C 的中心在原点 O ，焦点在 x 轴上，且焦点到其渐近线 $y = \pm 2x$ 的距离为 2.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 过点 $P(0, 2)$ 的直线 l 与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A, B 两点，与其渐近线分别交于 M, N (从左至右) 两点.

(i) 证明: $AM = BN$;

(ii) 是否存在这样的直线 l ，使得 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，

请说明理由.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = x^a e^{ax} + b$ (其中 e 是自然对数的底数)，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程是 $y = 6e^3 x - 5e^3$.

(1) 求 a, b ;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} - mx - \ln x$ ，若 $g(x) \geq 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立，求 m 的取值范围.

2020-2021 学年湖南省长沙市三湘名校教育联盟五市十校教研教
改共同体高二（下）期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. (5 分) 已知集合 $S = \{x | x^2 - x = 0\}$, $T = \{x | x^2 + x = 0\}$, 则 $S \cup T =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

【解答】解：因为集合 $S = \{x | x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}$,

又 $T = \{x | x^2 + x = 0\} = \{0, -1\}$,

所以 $S \cup T = \{-1, 0, 1\}$.

故选：D.

2. (5 分) 已知 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 1 C. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

【解答】解：Q $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$$\therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^2 = 1,$$

故选：B.

3. (5 分) 当生物体死亡后，它机体内的碳 14 含量会按确定的比率衰减，大约每经过 5730 年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”. 2021 年 3 月 23 日四川省文物考古研究院联合北京大学对三星堆新发现 K4 坑的部分炭屑样品使用碳 14 年代检测方法进行了分析，发现碳 14 含量衰减为原来的 67.90%，则该遗址距今约 () 年. (参考数据：

$$\log_2 0.6790 = -0.5585)$$

- A. 3000 B. 3100 C. 3200 D. 3300

【解答】解：设生物体死亡后，碳 14 每年衰减为原来的 p ,

依题意，有 $(1-p)^{5730} = \frac{1}{2}$, $1-p = 2^{-\frac{1}{5730}}$,

设距今约 t 年, 碳 14 衰减为原来的 $(1-p)^t = (2^{-\frac{1}{5730}})^t = 67.90\%$,

结合参考数据: $-\frac{t}{5730} = \log_2 0.6790 = -0.5585$, 可得 $t \approx 3200$.

故选: C.

4. (5分) 已知 $3\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

A. $-\frac{12}{25}$

B. $\frac{12}{25}$

C. $\frac{24}{25}$

D. $-\frac{24}{25}$

【解答】解: $3\sin\alpha - 4\cos\alpha = 0$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{4\cos\alpha}{3},$$

$$\text{Q } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\therefore \left(\frac{4\cos\alpha}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1, \text{ 解得 } \cos\alpha = \pm\frac{3}{5},$$

$$\therefore \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos\alpha = \frac{3}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}.$$

故选: C.

5. (5分) 已知 $a = \log_6 2$, $b = \log_{12} 4$, $c = \log_{18} 6$, 则 ()

A. $c > b > a$

B. $a > b > c$

C. $c > a > b$

D. $a > c > b$

【解答】解: 由对数运算公式得, $\frac{1}{a} = \log_2 6 = 1 + \log_2 3$, $\frac{1}{b} = \log_4 12 = 1 + \log_4 3$,

$$\frac{1}{c} = \log_6 18 = 1 + \log_6 3, \text{ 易知 } \log_2 3 > \log_4 3 > \log_6 3,$$

$$\therefore c > b > a.$$

故选: A.

6. (5分) 为庆祝建党一百周年, 长沙市文史馆举办“学党史, 传承红色文化”的主题活动, 某校团委决定选派 5 男 3 女共 8 名志愿者, 利用周日到该馆进行宣讲工作. 已知该馆有甲、乙两个展区, 若要求每个展区至少要派 3 名志愿者, 每个志愿者必须到两个展区中的一个工作, 且女志愿者不能单独去某个展区工作, 则不同的选派方案种数为 ()

A. 252

B. 250

C. 182

D. 180

【解答】解: 根据题意, 分 2 步进行分析:

①将8人分为2组,要求每组至少3人且3名女志愿者不能单独成一组,有 $(C_8^3 + \frac{C_8^4 C_4^4}{A_2^2} - 1) = 90$

种分组方法,

②将分好的2组安排到两个展区,有 $A_2^2 = 2$ 种安排方法,

则有 $90 \times 2 = 180$ 种选派方法,

故选: D.

7. (5分) 在半径为2的球中挖去一个半径为1的同心球, 设过球心的截面的面积为 S_1 , 不过球心的任意非圆面的截面的面积为 S_2 , 则()

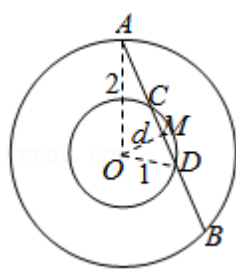
A. $S_1 = S_2$

B. $S_1 > S_2$

C. $S_1 < S_2$

D. S_1 、 S_2 的大小关系不定

【解答】解: 如图所示,



设球心 O 到不过球心的任意非圆面的截面的距离为 d ,

则该截面的面积为 $S_2 = \pi[(2^2 - d^2) - (1^2 - d^2)] = 3\pi$,

而过球心 O 的截面的面积为 $S_1 = \pi(2^2 - 1^2) = 3\pi$,

所以 $S_1 = S_2$.

故选: A.

8. (5分) 若 A 是圆 C 所在平面内的一定点, P 是圆 C 上的一动点, 线段 AP 的垂直平分线与直线 CP 相交于点 Q , 则点 Q 的轨迹不可能是()

A. 圆

B. 椭圆

C. 双曲线

D. 抛物线

【解答】设圆 C 的半径为 r ,

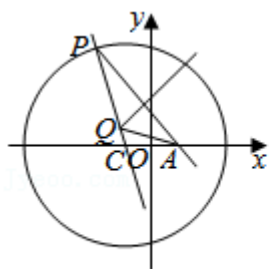


图 (1)

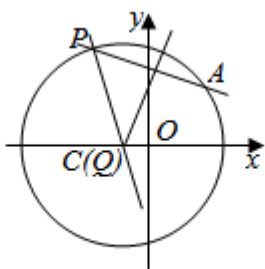


图 (2)

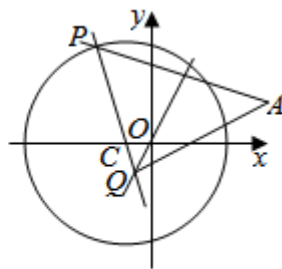


图 (3)

①若点 A 在圆 C 内不同于点 C 处, 如图 (1) 所示, 则有 $|QA| + |QC| = r > |AC|$,

故点 Q 的轨迹是以 A 、 C 为焦点的椭圆, 所以 B 正确;

②若点 A 与 C 重合, 则有 $|QP| = |QA| = \frac{r}{2}$,

故点 Q 的轨迹是以 C 为圆心, $\frac{r}{2}$ 为半径的圆, 所以 A 正确;

③若点 A 在圆 C 上, 如图 (3) 所示, 则由垂径定理, 线段 AP 的垂直平分线必过点 C , 故 Q 与 C 重合,

故点 Q 的轨迹是一个点;

④点 A 在圆 C 外, 如图 (4) 所示,

则 $|QA| = |QP| = |PC| + |QC| = r + |QC|$, 所以 $|QA| - |QC| = r < |AC|$, 故点 Q 的轨迹是以 A 、 C 为焦点的双曲线右支,

当 AP 的垂直平分线交 CP 的延长线于点 Q 时, Q 的轨迹是以 A 、 C 为焦点的双曲线左支, 所以 C 正确;

故选: D .

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. (5 分) 下列关于函数 $f(x) = |\sin 2x|$ 的结论正确的是()

A. 函数 $f(x)$ 是偶函数

B. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2

C. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ 单调递增

D. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π

【解答】解: 作出函数 $f(x)$ 的图像如下:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/878136000102006064>