【坐标系压轴专题】

坐标系中的问题，一般出在压轴题，不是压轴题也会有很大的难度，针对此便有了这个专题

【1】坐标系问题的基本运算

实用度：★★★★

如果想要熟练地解坐标系中的问题，先掌握下列的几个重要点（看不清放大看）

已知点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$ （$x_1>x_2$，$y_1<y_2$）

1. 两点间的距离公式：$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$（实质：勾股定理）
2. 过这两点的一次函数 $y=kx+b$ 中，斜率 k 的值为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$（实质：正切值）
3. 若 C 为 AB 中点，则坐标 $C(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$（实质：相似等比放缩）
4. 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 中，抛物线对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$，抛物线开口方向取决于 a 的正负（正上负下），b 的值主要取决于 a 的值与对称轴的位置（左同右异），抛物线与 y 轴的结局取决于 c 的正负
5. 过 A 点反比例函数的解析式 $y=\frac{|x_1y_1|}{x}$，若双曲线过 A、B 两点，则 $x_1y_1=x_2y_2$
6. 求过已知三点 A、B、C 的抛物线解析式：①待定系数法（实质：三点代入）②交点法，假设 A、B 两点坐标中 $y_1=y_2=0$，则设抛物线解析式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，代入 C 的坐标解 a（实质：抛物线的函数值为 0 的时候方程解）③顶点法，如果 A 是抛物线顶点，则设抛物线解析式 $y=a(x-x_1)^2+y_1$，代入 B 的坐标求 a
7. 抛物线、直线，抛物线 $y=a(x-m)^2+n$，向右平移 a、向上平移 b 个单位，则 $y=a(x-m-a)^2+n+b$，反之同理。直线平移 $y=kx+b$，向右平移 t 个单位，向上平移 g 个单位，则 $y=k(x-t)+b+g$

前三点、最后一点稍难，有口诀：

两点间距离公式：**横坐标相减的平方加纵坐标相减的平方开根号**

斜率 k：**竖直高度比水平宽度**

中点坐标公式：**横坐标的平均数，纵坐标的平均数**

平移函数图像：**左增右减，上加下减**

【例题 1】（原创）难度：★★★★

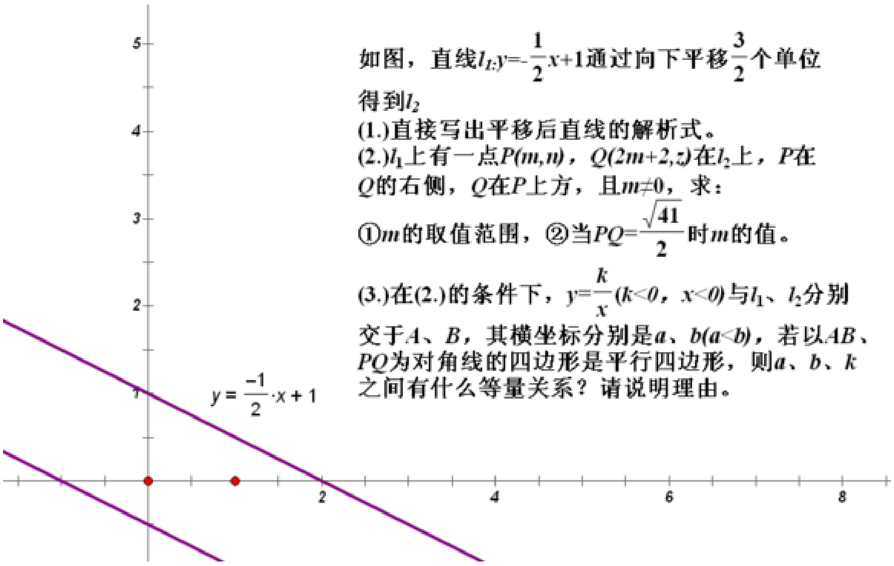
如图，直线 l_1:$y=-\frac{1}{2}x+1$ 通过向下平移 $\frac{3}{2}$ 个单位得到 l_2

(1.)直接写出平移后直线的解析式。

(2.)l_1 上有一点 $P(m,n)$，$Q(2m+2,z)$ 在 l_2 上，P 在 Q 的右侧，Q 在 P 上方，且 $m\neq 0$，求：

①m 的取值范围，②当 $PQ=\frac{\sqrt{41}}{2}$ 时 m 的值。

(3.)在(2.)的条件下，$y=\frac{k}{x}$($k<0$，$x<0$)与 l_1、l_2 分别交于 A、B，其横坐标分别是 a、b($a<b$)，若以 AB、PQ 为对角线的四边形是平行四边形，则 a、b、k 之间有什么等量关系？请说明理由。



答案：

(1.) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

(2.)由题意， $P(m,-\frac{1}{2}m+1)$ $Q(2m+2,-m-\frac{3}{2})$**，所以可得不等式组**

$$\begin{cases} m>2m+2 \\ -\frac{1}{2}m+1<-m-\frac{3}{2} \end{cases}$$ **解得** $m<-2$

(3.)由两点间距离公式， $\sqrt{(m-2m-2)^2+(-\frac{1}{2}m+1+m+\frac{3}{2})}=\frac{\sqrt{41}}{2}$

解得 $m_1=-\frac{26}{5}$**，** $m_2=0$**(舍去)，所以** $m=-\frac{26}{5}$

(4.)设 $A(a,\frac{k}{a})$**，** $B(b,\frac{k}{b})$**，设PQ与AB交于** D**，由平行四边形，QD=PD，AD=BD**

由中点坐标公式可得 $a+b=m+2m+2$

$$\frac{k}{a}+\frac{k}{b}=-\frac{1}{2}m+1-m-\frac{3}{2}$$

化简，有 $k(a+b)=-\frac{73}{10}ab$**，所以** $k=-\frac{73}{136}ab$

【2】等腰三角形、直角三角形存在性

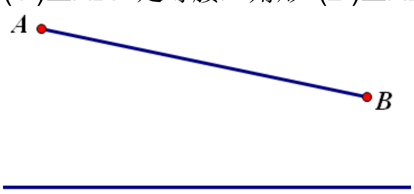
基础做起，实用性：★★★

关键词：等腰两圆一线，直角两线一圆

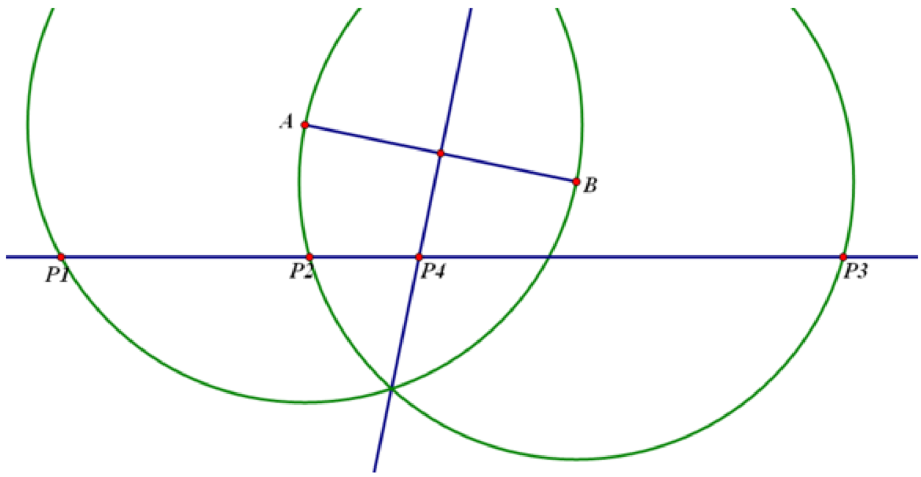
这两点放在一起是为了对比，它们都需要分类讨论。什么叫做两圆一线、两线一圆呢？

举个例子，如图，AB 线段一条，在下面那根直线上找 P 和 Q，使得

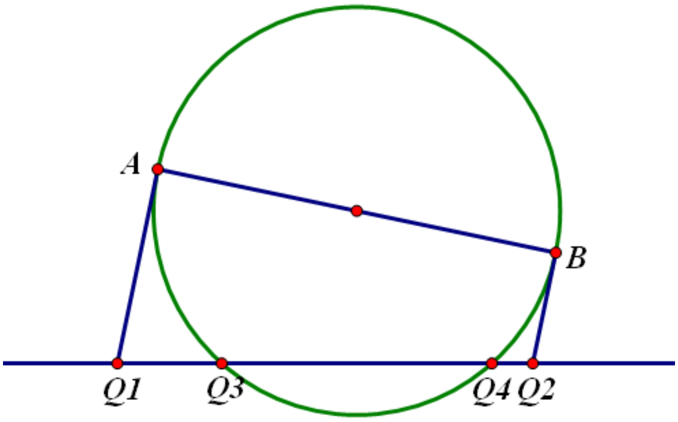
(1.)△ABP 是等腰三角形 (2.)△ABQ 是直角三角形



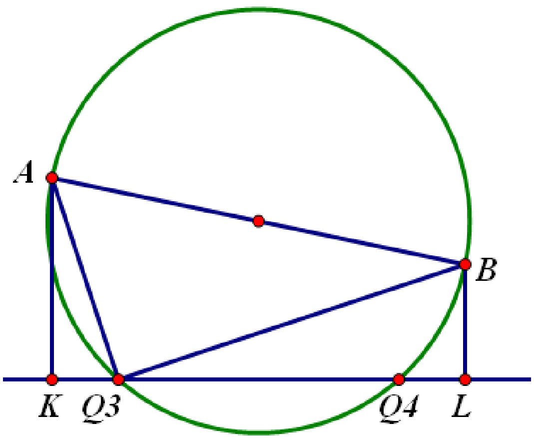
首先(1.)，有三种可能（AB=AP，AB=BP，AP=BP），两圆: 以 A 为圆心，AB 为半径画圆，与直线交于 P1，还有一个圆是以 B 为圆心，AB 为半径画圆与直线交于 P2 和 P3。最后一线：AB 的垂直平分线与直线交于 P4，P5（有时不一定 5 个，视情况而定）



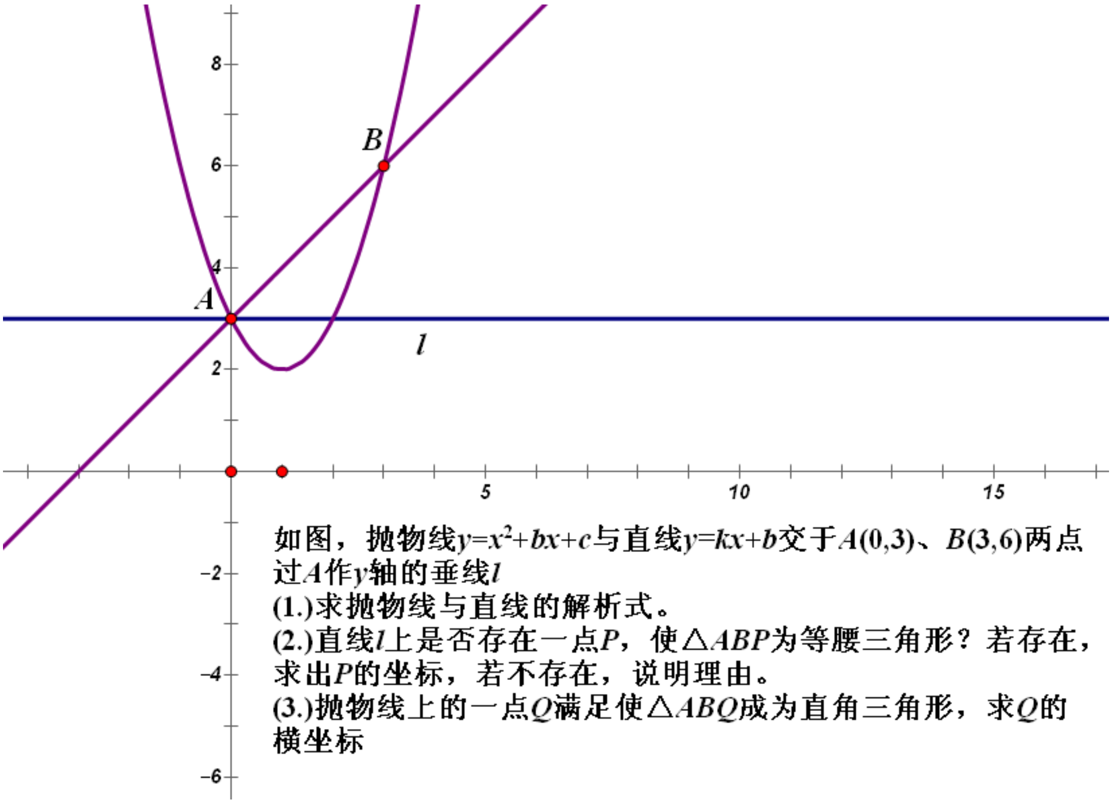
(2.)，同样三种，两线：分别以 A、B 作 AB 的垂线分别交直线于 Q1，Q2，一圆：以 AB 为直径作圆，由于直径所对圆周角是直角，所以与直线交点为 Q3 Q4（个数视情况而定）



已经找到了，怎么求呢？
等腰的话最暴力的算法就是设出未知点坐标，把三角形三段长都用两点间距离公式表达出来，最后一个一个等起来解方程即可。当然这是无可奈何、形状实在不好找的时候的迫不得已办法，一般他会给你已知两点，在抛物线对称轴上或 x 轴上或 y 轴上找，这样就有一些几何特征可以利用。**当然暴力算法某些时候也是必须要用的。**
直角，两线的好找（k1k2 乘积为-1 可以，做垂直相似也可以），最后一圆略麻烦，这就要用到模型: 一线三等角，做垂直，如图。左右两个三角形相似，然后设线段长，表达，相似比，解方程即可。一般是一元二次方程，所以解出一个另一个就自然知道。
注意：这里是非常规做法，就是妙招，再好算或者你对自己计算有信心的情况下，可以用中点坐标公式得出圆心坐标，再得出半径，设出 Q 的坐标，用两点间距离公式来做。



【例题】（原创）难度：★★★



答案：

(1.) $y = x^2 - 2x + 3$

(2.)P 的坐标为(3,3)或(6,3)或 $(3\sqrt{2},3)$或$(-3\sqrt{2},3)$

(3.) 1或 - 2或 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

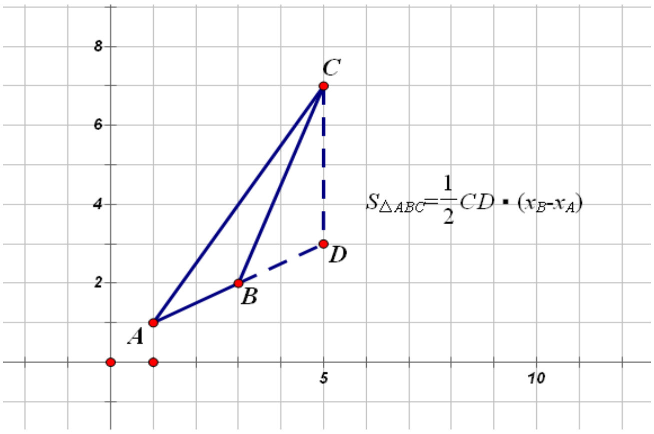
【3】铅直高模型

实用度：★★★★★

平面直角坐标系里，随机的三个点，围成一个三角形，你能求出这个三角形的面积吗？

这种题很容易，简单几个字：**水平宽乘铅直高**

打个比方，这道题，随便找三个点 A、B、C（坐标看网格），求△ABC 的面积



好的我们先做辅助线，作 CD⊥x 轴交 AB（或它的延长线）于 D，那么不论这个三角形是钝角三角形还是锐角三角形还是直角三角形，它的面积总会等于图上那玩意。

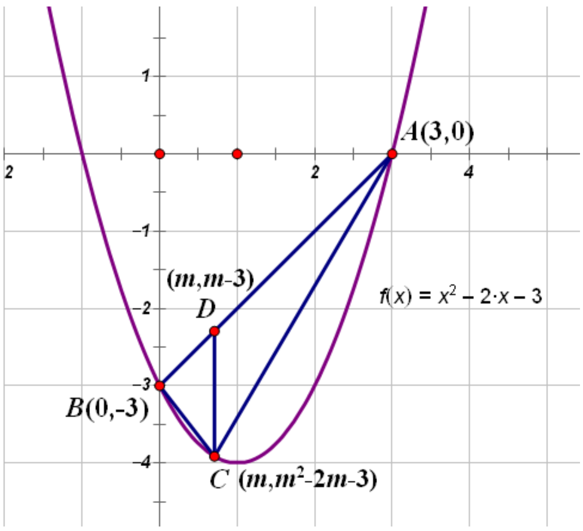
其中，因为 CD 是作 x 轴的垂线做出来的，所以叫做**铅直高**，铅直高与哪个边相交，那么这条边（注意是线段，如图的 AB）两个端点的水平距离为**水平宽**（事实上就是右边端点的横坐标减去左边端点的横坐标），两个的乘积的二分之一就是面积，从图上直观地看出，面积是 4

怎么考？

一般让你求一个关于面积的函数解析式，然后求最大值。

怎么求？

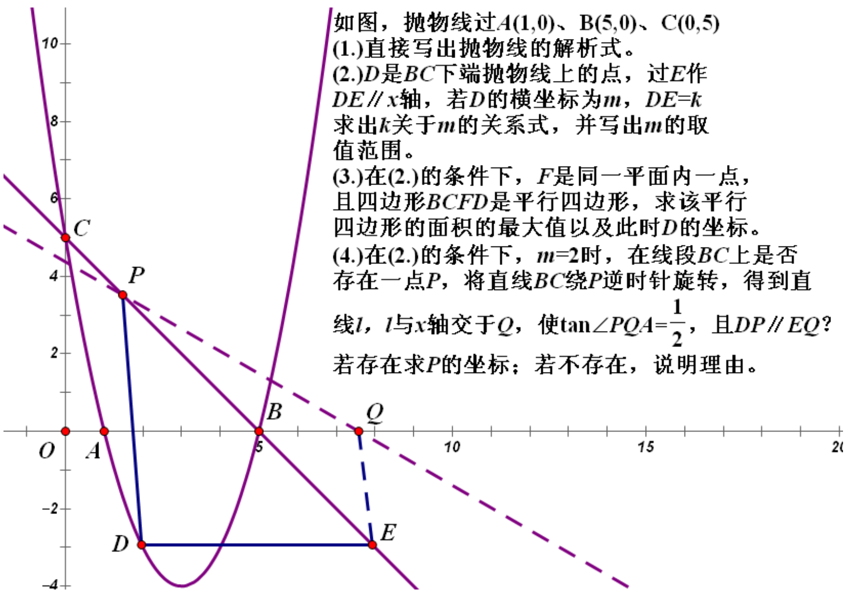
水平宽好求，铅直高呢？再如图：



好了，已知抛物线函数表达式，如图，C 是 AB 下方抛物线上的动点，求△ABC 面积的最大值。做这种题先作辅助线 CD⊥x 轴交 AB 于 D，然后设 C 坐标，因为 CD⊥x 轴，所以 D 的横坐标与 C 的相同。所以 CD 的长度就有，拿 $m-3-(m^2-2m-3)$ 就是纵坐标相减（注意：被减数一定要是位于上方的点的纵坐标。）

这种题近几年考了很多，都快考烂了，所以中考绝不可能出这样常规的题，一定会加以创新。

【例题 1】（原创）难度：★★★★



答案：

(1.) $y = x^2 - 6x + 5$

(2.)提示：过 D 作 DE 的垂线交 CE 于 G，利用竖直高解。$k = -m^2 + 5m$

(3.)提示：求平行四边形面积最大值即求△BCD 面积最大值，$D(\frac{5}{2},-\frac{15}{4})$，$S = \frac{125}{4}$

(4.)提示：作垂直，用相似。$P(2,3)$

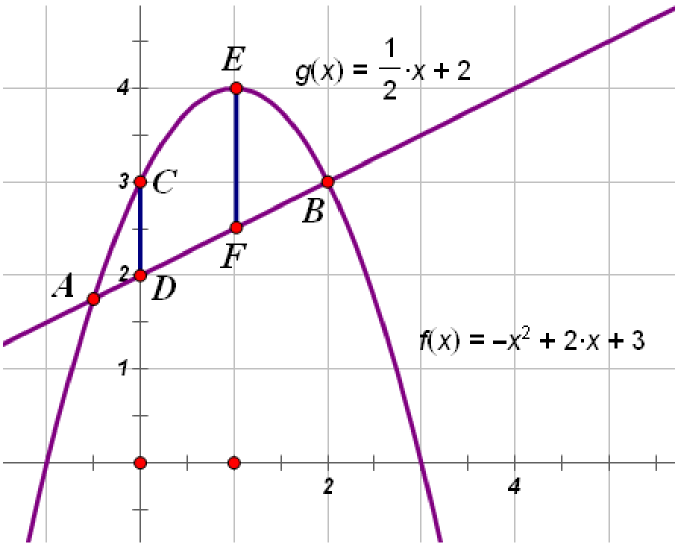
【4.1】四边形存在性问题——平行四边形

实用度：★★★★

四边形存在性近年来经常考，所以这部分要重视，只是平行四边形考得多了，题型会有创新，因此先打好常规题的基础：一般平行四边形最普通的出题方式如下：

普通法

函数给出，抛物线交直线于 A、B，在抛物线和直线上分别找 E、F，使得 C、D、F、E 为顶点的四边形是平行四边形。

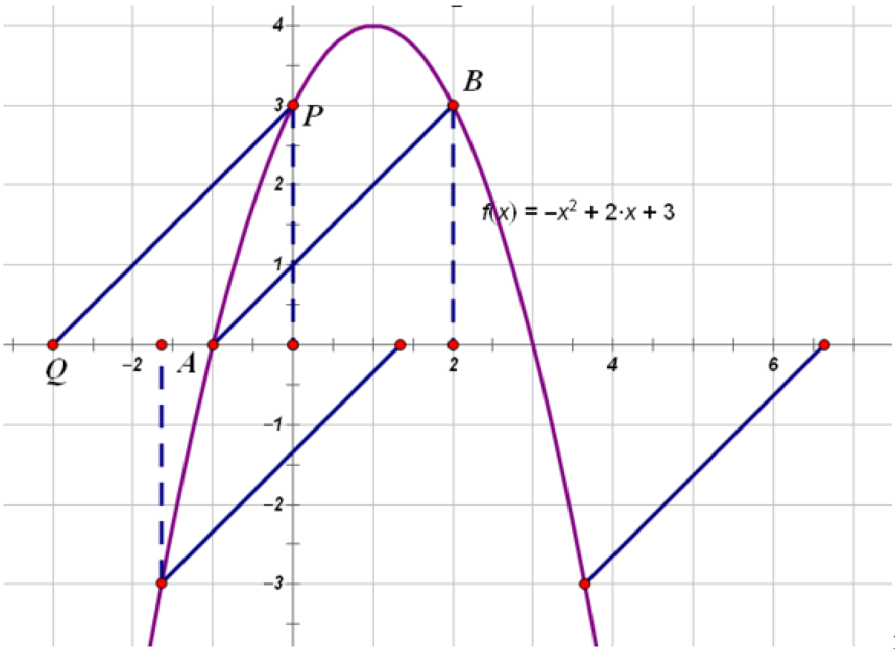


这种题十分简单，用上次讲的铅直高表达 EF 和 CD 一等起来就是【以 EF、CD 为对边的平行四边形】注意还没有完，还要讨论对角线的情况，这要取 CD 中点，设坐标转化，然后代入函数求解。

然后稍微复杂的：作高法

这个讲起来就复杂点了，如图

函数有，B 的坐标看网格，在抛物线、x 轴上找 P、Q，使以 A、B、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形，求 P、Q 的坐标

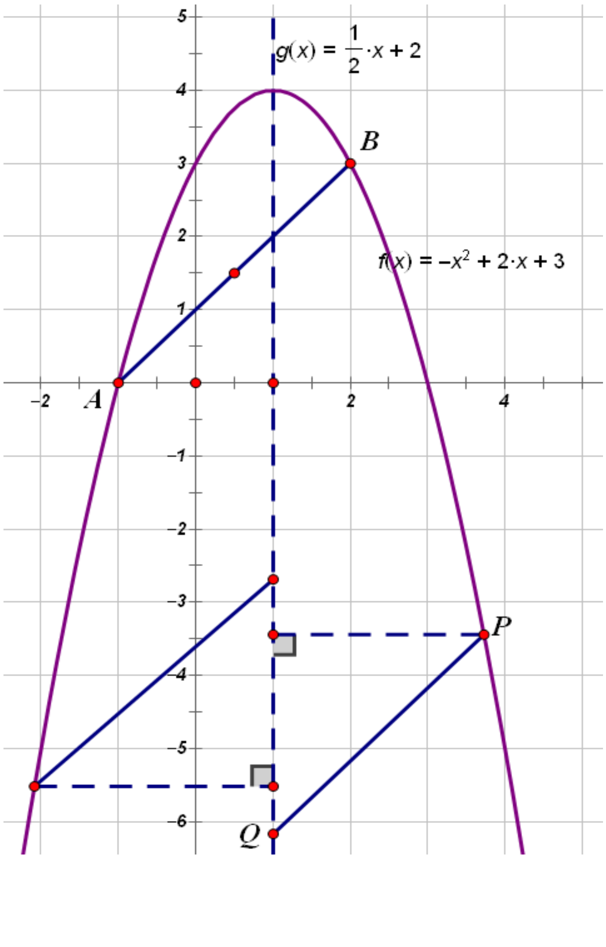


先讨论 AB 是边的情况，既然是平行四边形那就先作 PQ∥AB，我们知道，当 PQ=AB 时就是平行四边形。什么时候相等？P 到 x 轴距离和 B 到 x 轴的距离相等，如图，作 PM⊥x 轴，BN⊥x 轴，（图上没画）PM=BN=3 时，就会有△PQM≌△BAN，这样 PQ=AB，就 OK。也就是说，P 的纵坐标是±3 时，因为抛物线有了，解方程即可得到 P 的坐标，因为全等，AN=QM，所以 Q 的坐标也有了（？？，0）。另外就是对角线的情况，同样找中点转换。

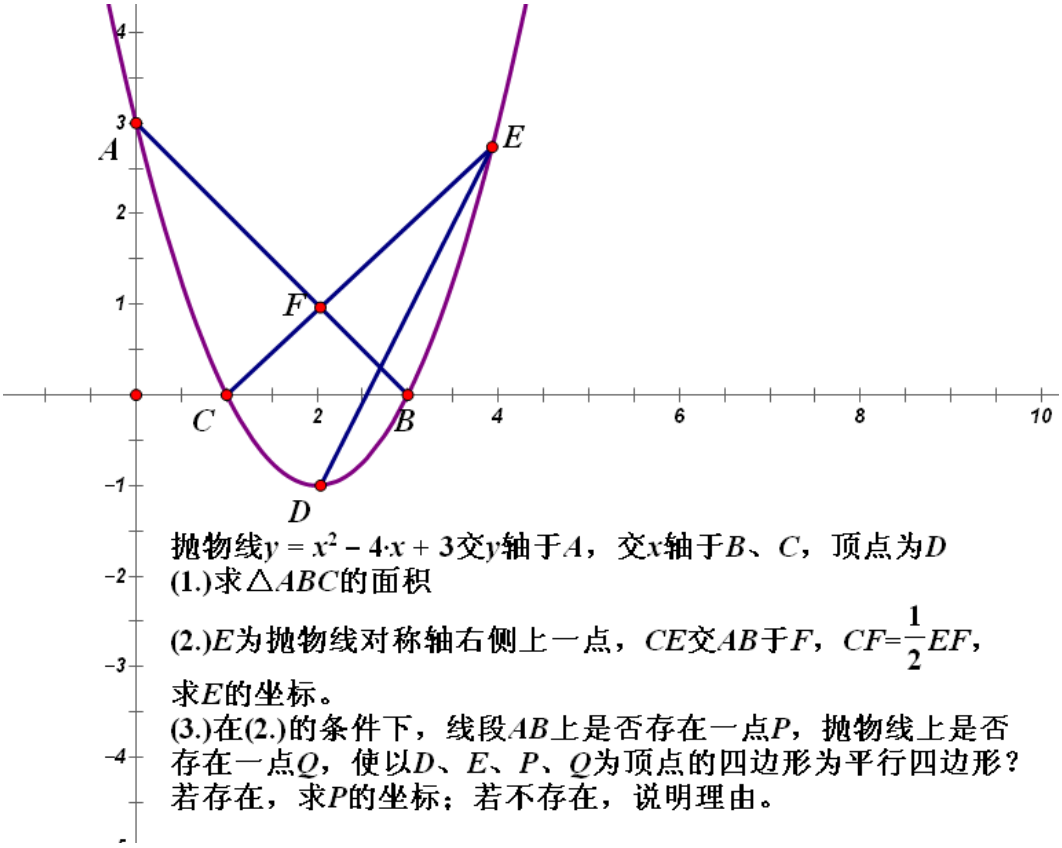
变式：

万一题目条件不变，Q 改成在对称轴或者某常函数上找要怎么办？

事实上是一样的：只是歪了点而已，记住两边都有，别只找到一边不找另一边。



【例题】（原创）难度：★★★



答案：

(1.)3

(2.) $E(4,3)$

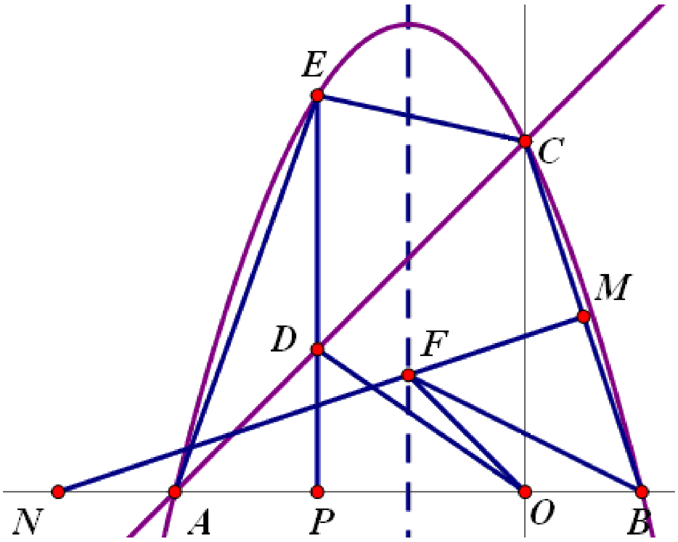
(3.) $P(\frac{-1+\sqrt{33}}{2},\frac{7-\sqrt{33}}{2})$ 或 $(\frac{9-\sqrt{17}}{2},\frac{-3+\sqrt{17}}{2})$

【4.2】四边形存在性——菱形与等腰梯形

实用度：★★★

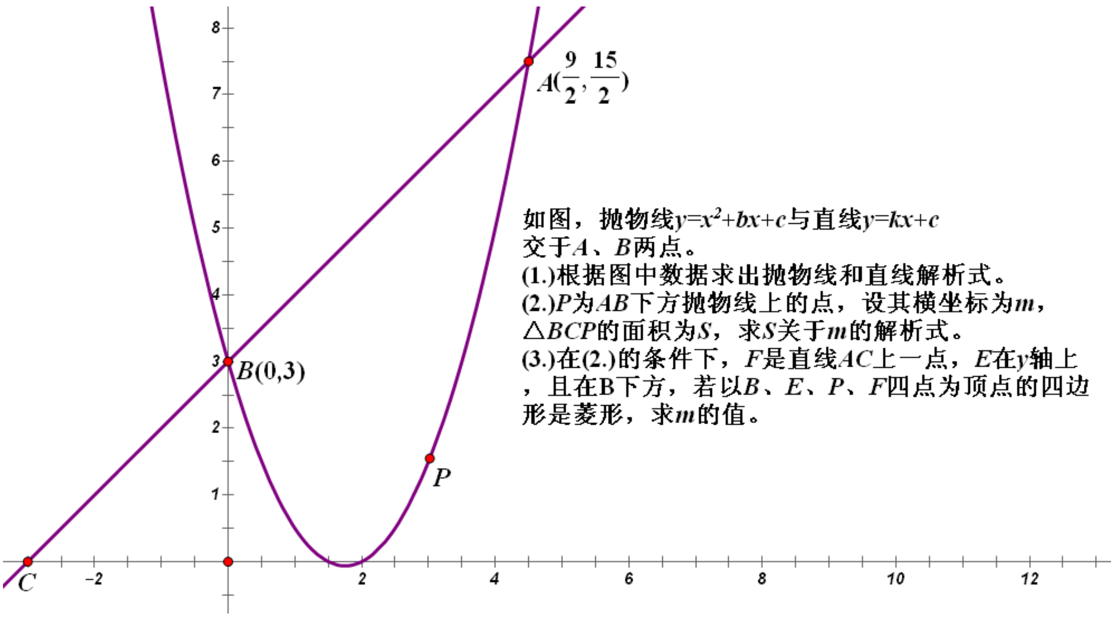
首先从菱形开始说起。事实上，菱形的存在性就相当于变向的找等腰三角形，就是说找菱形就按照找等腰的那个套路找，不必讲太多，充分利用四边相等，且对边平行的性质，还有对角线互相垂直且平分的性质，马上就能找到。

然后等腰梯形有点难搞。好的我们拿镇楼图说话：

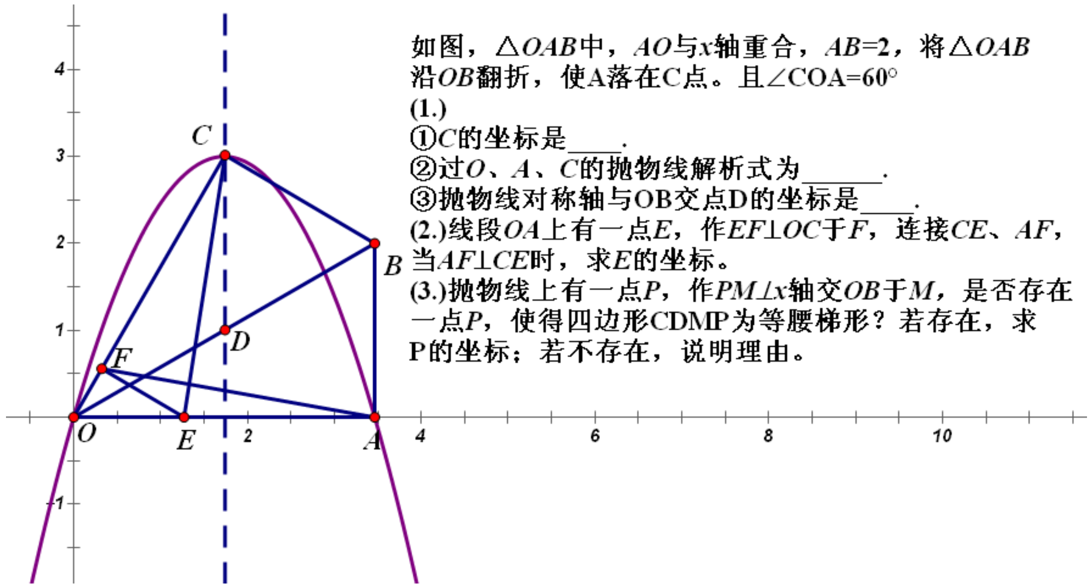


原题是我改编的，其中抛物线：y=-x²+2x+3（你会发现这个函数被用烂了）
E 是 AC 上方抛物线上的动点，作 ED⊥x 轴交 AC 于 D，当四边形 DECO 为等腰梯形时，求 E 的坐标。
这种题的话先说常规做法，作 EG⊥y 轴，DH⊥y 轴，利用 CG=DH 来解，就是拿 CO-DE（DE 的长度可以表示）再除以 2，等于 OH 来解方程。这样会很麻烦所以= =
妙招解法：
设 CO 的中点是 G，DE 的中点是 H，当 GH⊥y 轴时，就是等腰梯形，理由很简单，这个时候 GH 是垂直平分 CO 的，由对称性就能秒杀。D、E 坐标可表达，其中点 H 用中点坐标公式表达，表达出 H 的纵坐标，和 G 的纵坐标（就是 3/2)相等解方程就秒杀。
总结一下，看到有等腰的什么东西可以联想到垂直平分线，就好解了。

【例题 1】（改编）难度：★★★



【例题 2】（原创）难度：★★★★



答案：【1】(1.)抛物线的表达式为 $y=x^2-\frac{7}{2}x+3$，直线的表达式为 $y=x+3$

(2.)提示：水平宽×铅直高÷2，关键在于哪一段。$S=-\frac{3}{2}m^2+\frac{27}{4}m$

(3.)提示：分类讨论，画图求解。$m=\frac{9-\sqrt{33}}{4}$ 或 $\frac{9}{2}-\sqrt{2}$

【2】(1.)① $C(\sqrt{3},3)$ ② $y=x^2-2\sqrt{3}x$ ③ $D(\sqrt{3},1)$

(2.)提示：过 F 作 FG⊥OA 于 G，通过△FGA 与某一个三角形相似。$OE=6\sqrt{3}-2\sqrt{21}$

(3.)提示：根据对称性做，P 是 BC 与抛物线的交点。$P(\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3})$

【5】坐标系轴对称综合问题

实用度：★★★★

坐标系中的轴对称是今年考的比较多的问题

关注下面几点：

角相等，边相等的转化

并且还要和相似全等连用，如：

如图，函数有，直线 CD 下方的抛物线上是否存在 A，x 轴上存在 B，使得 A、B 关于 CD 轴对称

【5】坐标系轴对称综合问题

实用度：★★★★

坐标系中的轴对称是今年考的比较多的问题

关注下面几点：

角相等，边相等的转化

并且还要和相似全等连用，如：

如图，函数有，直线 CD 下方的抛物线上是否存在 A，x 轴上存在 B，使得 A、B 关于 CD