专题 01 二次函数（易错必刷 30 题 6 种题型专项训练）

题型大集合

【题型一】利用二次函数的定义求参数

【题型二】含参数的二次函数的图象和性质

【题型三】利用二次函数的图象和性质求线段最值问题

【题型四】利用二次函数的图象和性质求周长最值问题

【题型五】利用二次函数的图象和性质求面积最值问题

【题型六】利用二次函数的图象和性质求平移后综合问题

题型大通关

【题型一】利用二次函数的定义求参数（共 5 题）

（23-24 九年级上·四川广安·期末）

1．若关于 x 的函数 $y=x^{a^2+1}-7x$ 的图象是抛物线，则 a 的值是_____.

（23-24 九年级上·云南昭通·期末）

2．若函数 $y=(2-m)x^{|m|}+1$（m 是常数）是二次函数，则 m 的值是___________.

（22-23 九年级上·黑龙江哈尔滨·期末）

3．如果函数 $y=\left(m+1\right)x^{m^2-m}+3$ 是二次函数，则 m 的值为_____.

（23-24 九年级上·云南昆明·期末）

4．若 $y=\left(m-2\right)x^{m^2-2}+x-3$ 是关于 x 的二次函数．则 m 的值为_____.

（23-24 九年级上·四川绵阳·期末）

5．已知函数 $y=\left(m^2-3m\right)x^{m^2-2m-1}$ 的图象是抛物线，则 $m=$_____.

【题型二】含参数的二次函数的图象和性质（共 5 题）

（22-23 九年级上·江苏泰州·期末）

6．已知二次函数 $y=-x^2+2mx$，对于其图像和性质，下列说法错误的是（　）

A．图像开口向下　　B．图像经过原点

C．当$x>2$时，y随x的增大而减小，则$m<2$　　D．当$x<m$时，y随x的增大而增大

（22-23九年级上·陕西西安·期末）

7．已知抛物线$y=ax^2-2ax+c$（a，c为常数，且$a>0$），关于抛物线的下列说法中，不正确的是(　　)

A．抛物线的对称轴为直线$x=1$

B．若$c<0$，则抛物线与x轴有两个交点，且交点在y轴两侧

C．若点$\left(x_1,y_1\right)$，$(x_2，y_2)$在抛物线上，且$x_1<x_2$，$x_1+x_2>2$，则$y_1<y_2$

D．若点$\left(m,n\right)$在抛物线上，则$n\le c-a$

（21-22九年级上·天津河北·期末）

8．已知二次函数$y=a(x+1)(x-m)$（a为非零常数，$1<m<2$），当$x<-1$时，y随x的增大而增大，则下列结论正确的是（　　）

①当$x>2$时，y随x的增大而减小；

②若图象经过点$(0,1)$，则$-1<a<0$；

③若$(-2021,y_1)$，$(2021,y_2)$是函数图象上的两点，则$y_1<y_2$；

④若图象上两点$(\frac{1}{4},y_1)$，$(\frac{1}{4}+n,y_2)$对一切正数n，总有$y_1>y_2$，则$1<m\le\frac{3}{2}$．

A．①②　　B．①③　　C．①②③　　D．①③④

（23-24九年级上·四川南充·期末）

9．已知自变量为x的函数$y=mx^2-(m-1)x-2m+1$，下列结论：①当自变量$x=-1$时，函数值$y=1$；②自变量x在实数范围内，函数有最大或最小值；③图象与x轴有公共点；④无论m何值，图象经过两个定点．其中正确结论有_____（填写序号）

（23-24九年级上·福建泉州·期末）

10．抛物线$y=ax^2-2ax+c$（a，c是常数且$a\neq0$，$c>0$）经过点$(-1,0)$．

下列四个结论：

①该抛物线一定经过点$(3,0)$；

②$2a+c>0$；

③若点$P_1\left(m,y_1\right)$，$P_2\left(m+1,y_2\right)$在该抛物线上，$y_1>y_2$，则m的取值范围为$m>1$；

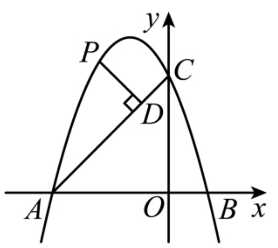
④若x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$是方程$ax^2-2ax+c+n=0$的两个根，其中$n<0$，则$-1<x_1<x_2<3$．

其中正确的是_____．（填写序号）

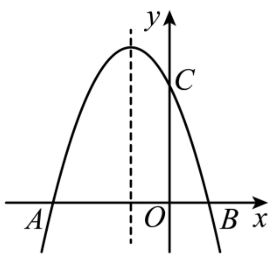
【题型三】利用二次函数的图象和性质求线段最值问题

（23-24九年级上·山东济南·期末）

11．如图1，抛物线$y=ax^2+bx+3\left(a\neq0\right)$与$x$轴交于$A\left(-3,0\right)$和$B\left(1,0\right)$两点，与$y$轴交于点$C$．



图①



图②

(1)求该抛物线的函数表达式；

(2)P是抛物线上，位于直线AC上方的一个动点，过点P作$PD\perp AC$于点D，求P坐标为何值时PD最大，并求出最大值；

(3)如图②，将原抛物线向左平移2个单位长度得到抛物线y'，y'与原抛物线相交于点M，点N为原抛物线对称轴上的一点，在平面直角坐标系中是否存在点H，使以点A，M，N，H为顶点的四边形为矩形，若存在，请直接写出点H的坐标；若不存在，请说明理由．

（22-23九年级上·山东济南·期末）

12．如图，抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于点$A\left(-1,0\right)$，$B\left(4,0\right)$，与y轴交于点C，连接BC，点P为线段CB上一个动点（不与点C，B重合），过点P作$PQ\parallel y$轴交抛物线于点Q．

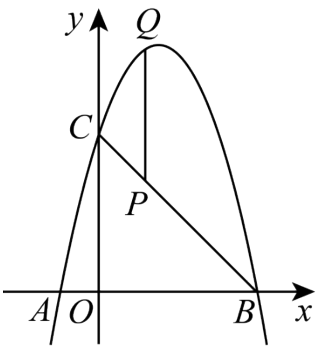


图1

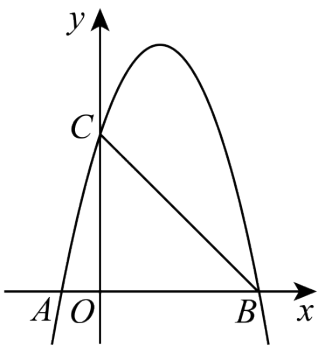
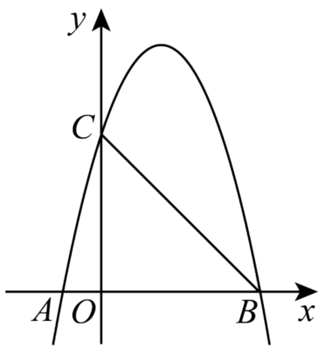


图2



备用图

(1)求抛物线的表达式和对称轴；

(2)设 P 的横坐标为 t，请用含 t 的式子表示线段 PQ 的长，并求出线段 PQ 的最大值；

(3)已知点 M 是抛物线对称轴上的一个点，点 N 是平面直角坐标系内一点，当线段 PQ 取得最大值时，是否存在这样的点 M，N，使得四边形 $PBMN$ 是菱形？若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

（23-24 九年级上·广西崇左·期末）

13．如图 1，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，AD 为等腰直角 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，抛物线 $y=a\left(x-2\right)^2+4$ 的顶点为点 A，且经过 B、C 两点，B、C 两点在 x 轴上.

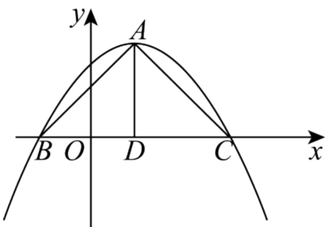


图1

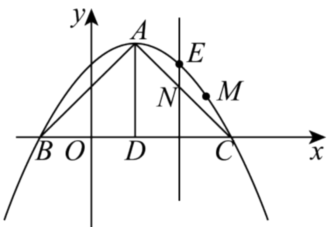


图2

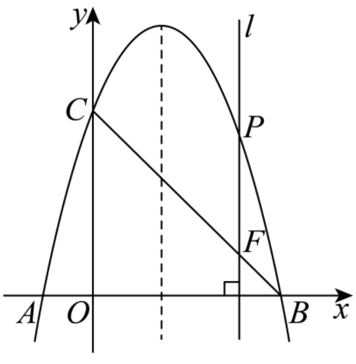
(1)求该抛物线的解析式；

(2)如图 2，点 E 为抛物线上位于直线 AC 上方的一点， 过点 E 作 $EN\perp x$ 轴交直线 AC 于点 N，求线段 EN 的长度最大值及此时点 E 的坐标；

(3)如图 2，点 $M\left(5,\ b\right)$ 是抛物线上的一点，点 P 为对称轴上一动点，在(2)的条件下， 当线段 EN 的长度最大时，求 $PE+PM$ 的最小值.

（23-24 九年级上·山东聊城·期末）

14．如图，二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 的图象与 x 轴交于点 $A\left(-1,0\right)$，$B(4,0)$，与 y 轴交于点 C，P 为 BC 上方抛物线上一动点，过 P 作垂直于 x 轴的直线 l 交线段 BC 于点 F.



(1)求出二次函数 $y=ax^2+bx+4$ 和 BC 所在直线的表达式；

(2)在动直线 l 移动的过程中，试求线段 PF 长度的最大值，并求出此时点 P 的坐标；

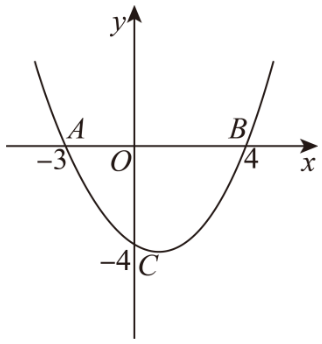
(3)抛物线上是否存在点 Q，使 $\triangle ABQ$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积，若存在，请直接写出点 Q

的坐标；如果不存在，请说明理由.

【题型四】利用二次函数的图象和性质求周长最值问题

（23-24 八年级下·云南昆明·期末）

15．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴交于 $A\left(-3,0\right)$ 、$B(4,0)$ 两点，且 $OB=OC$.

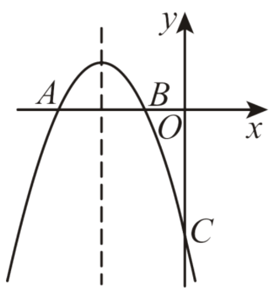


(1)求抛物线解析式；

(2)点 H 是抛物线对称轴上的一个动点，连接 AH 、 CH 、 AC ，求出当 $\triangle ACH$ 的周长最小时点 H 的坐标.

（23-24 九年级上·广东梅州·期末）

16．如图所示，抛物线交 x 轴于点 $A\left(-3,0\right),B\left(-1,0\right)$，交 y 轴于点 $C(0,-3)$



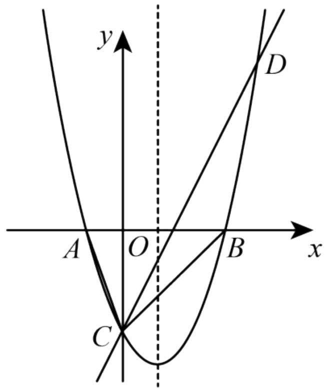
(1)求抛物线的解析式；

(2)若抛物线的顶点为 P，求 $\triangle ABP$ 的面积

(3)点 Q 是抛物线对称轴上的一个动点，是否存在点 Q，使 $\triangle QBC$ 的周长最小？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

（23-24 八年级下·重庆·期末）

17．如图，抛物线 $y=x^2-2x-3$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，连接 AC ， BC .

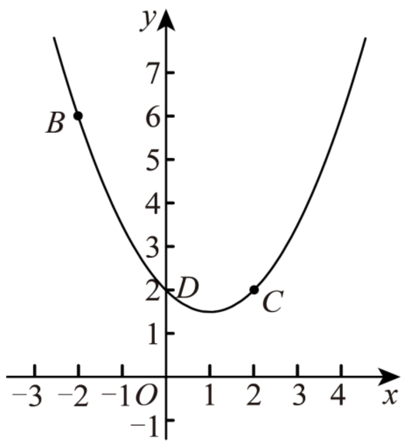


(1)求$\triangle ABC$的面积；

(2)直线$y=2x-3$与抛物线交于点C、D，在抛物线的对称轴上是否存在点P，使$\triangle PBD$的周长最小？如果存在，请求出点P坐标；如不存在，请说明理由．

（23-24 九年级上·湖南郴州·期末）

18．如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+2$过$B(-2,6)$，$C(2,2)$两点．



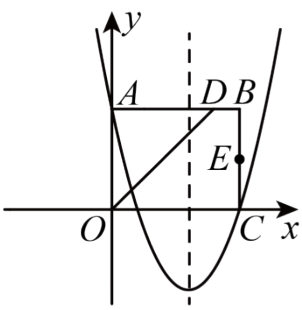
(1)求抛物线的表达式．

(2)记抛物线与y轴的交点为D，求$\triangle BCD$的面积．

(3)点M在抛物线的对称轴上，当M的坐标为多少时$\triangle BMD$周长最小？

（23-24 九年级上·宁夏吴忠·期末）

19．如图，在平面直角坐标系中，矩形$OABC$的边OA在y轴的正半轴上，OC在x轴的正半轴上，$\angle AOC$的平分线交AB于点D，E为BC的中点．已知$A(0,4)$、$C(5,0)$，二次函数$y=\frac{4}{5}x^2+bx+c$的图象经过A，C两点．



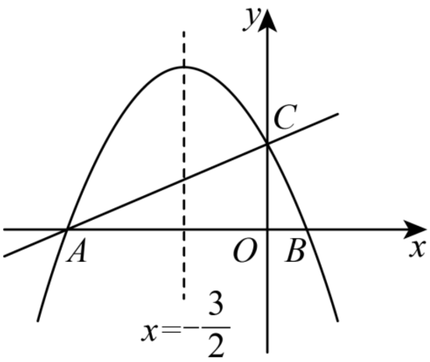
(1)求该二次函数的解析式；

(2)F，G 分别为 x 轴、y 轴上的动点，顺次连接 D、E、F、G 构成四边形 $DEFG$，求四边形 $DEFG$ 周长的最小值．

【题型五】利用二次函数的图象和性质求面积最值问题

（23-24 九年级上·广东深圳·期末）

20．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴交于点A，与 y 轴交于点 C．抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{3}{2}$，且经过 A、C 两点，与 x 轴的另一交点为点 B．

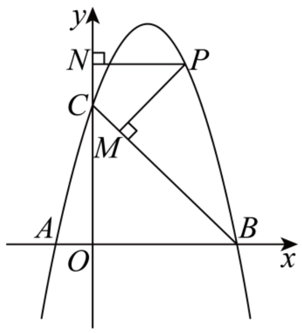


(1)求抛物线解析式．

(2)若点 P 为直线 AC 上方的抛物线上的一点，连接 PA，PC．求 $\triangle PAC$ 的面积的最大值，并求出此时点 P 的坐标．

（23-24 九年级上·江西赣州·期末）

21．抛物线 $y=-x^2+\left(m+2\right)x+m+3$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C，点 P 是抛物线上一点，其横坐标为 a．



(1)已知点$C(0,5)$，求抛物线的解析式．

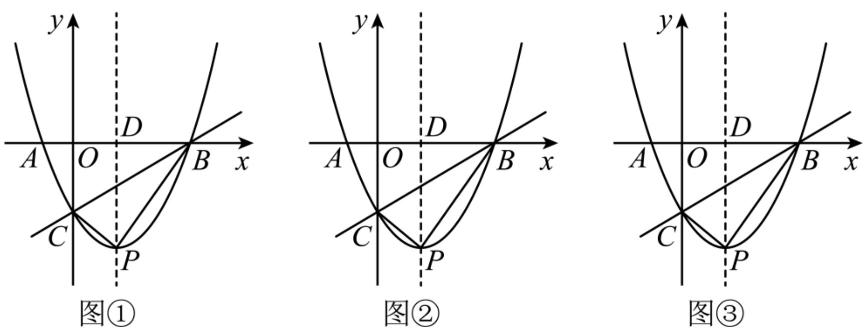
(2)若$m=1$，

①如图，当点P位于第一象限时，过点P分别作$PM\perp BC$于点E，$PN\perp y$轴于点N，当$PM+PN$取得最大值时，求a的值；

②在①的条件下，连接PB，PC，判断此时$\triangle PBC$的面积是否为最大，并说明理由．

（23-24九年级上·湖南郴州·期末）

22．如图，抛物线$y=x^2+bx+c$（b、c为常数）与x轴相交于点$A(-1,0)$、$B(3,0)$，与y轴相交于点C，其对称轴与x轴相交于点D，作直线BC.



(1)求抛物线的解析式．

(2)设点P为抛物线对称轴上的一个动点．

①如图①，若点P为抛物线的顶点，求$\triangle PBC$的面积．

②是否存在点P使$\triangle PBC$的面积为6？若存在，求出点P坐标；若不存在，请说明理由．

（23-24八年级下·重庆·期末）

23．如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y=ax^2+bx+3$与x轴交于A、B两点，与y轴交于点C，连接AC，其中$A(-3,0)$，$B(1,0)$.

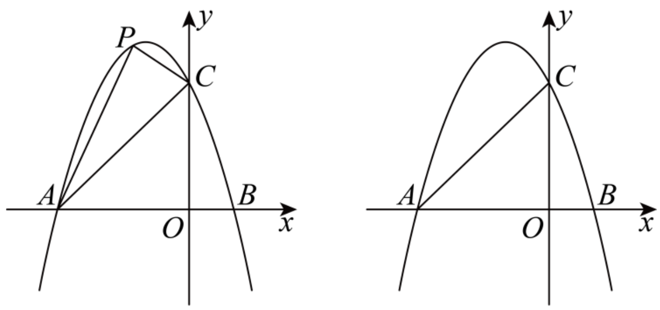


图1　　　　图2

(1)求抛物线的解析式；

(2)如图 1，点 P 是直线 AC 上方抛物线上一点，连接 PA、PC，求 $\triangle PAC$ 面积的最大值，及此时点 P 的坐标；

(3)如图 2，连接 BC，在抛物线上是否存在一点 N，使得 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABN}$？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，说明理由．

（22-23 九年级上·广东佛山·期末）

24．如图 1，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 A、B，与 y 轴交于点 C，且 $A(-1,0)$，$OB=OC=3OA$．

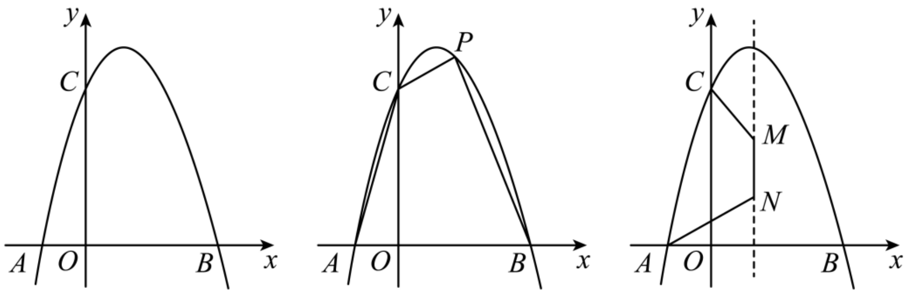


图1　　　　图2　　　　图3

(1)试求抛物线的解析式；

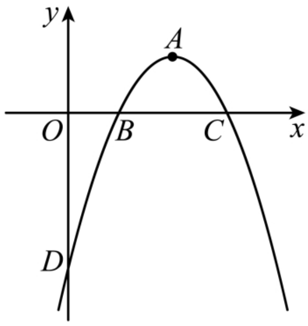
(2)如图 2，点 P 是第一象限抛物线上的一点，连接 AC、PB、PC．且 $S_{\text{四边形}OBPC}=5S_{\triangle AOC}$，试求点 P 的坐标？

(3)如图 3，定长为 1 的线段 MN 在抛物线的对称轴上上下滑动，连接 CM、AN．记 $m=CM+MN+AN$，试问：m 是否有最小值？如果有，请求 m 的最小值；如果没有，请说明理由．

【题型六】利用二次函数的图象和性质求平移后综合问题

（23-24 九年级上·甘肃兰州·期末）

25．如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+4x-3$ 图象的顶点是 A，与 x 轴交于 B，C 两点，与 y 轴交于点 D，点 B 的坐标是(1,0)．



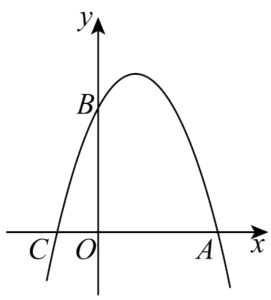
(1)求 A，C 两点的坐标．

(2)平移该二次函数的图象，使点 D 恰好落在点 A 的位置上，求平移后图象所对应的二次函数的表达式．

(3)在直线 CD 上方的抛物线上是否存在点 P，使 $\triangle PCD$ 的面积最大？若存在，求 P 点的坐标及 $\triangle PCD$ 面积的最大值．

（23-24 八年级下·广西南宁·期末）

26．如图，抛物线 $y=ax^2-2ax+3$ 与 y 轴交于点 B，与 x 轴交于点 $A,C\left(-1,0\right)$（点A在点 C 的右边）．



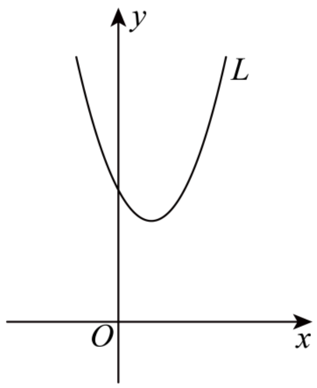
(1)求抛物线的表达式；

(2) P 为抛物线上任意一点，将点 P 向上平移 2 个单位长度得到点 P'，若点 P' 关于原点 O 的对称点恰好落在抛物线上，求此时点 P 的坐标；

(3)将抛物线 $y=ax^2-2ax+3$ 向右平移 $n(n>0)$ 个单位长度得到抛物线 L，若点 $\left(-1,y_1\right)$，$\left(5,y_2\right)$ 均在抛物线 L 上，且 $y_1\geq y_2$，求 n 的取值范围．

（23-24 九年级上·河北秦皇岛·期末）

27．如图，已知抛物线 L: $y=x^2-2x+4$．



(1)求抛物线L的顶点坐标；

(2)将二次函数$y=x^2-2x+4\left(x<0\right)$的图像向右平移2个单位长度，与二次函数$y=x^2-2x+4\left(x\geq 2\right)$的图像组成一个新的函数图像，记为$L'$，设$L'$上的一点$P$的坐标为$\left(m,n\right)$.

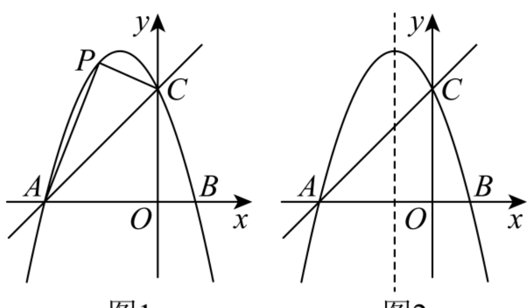
①当m满足________时，n随m的增大而增大；

②直接写出L'的函数表达式；

③当$m>2$时，过点P作y轴的垂线，分别交L，L'于点M，N，若点N是线段PM的三等分点，求点P的坐标.

（23-24九年级上·山东济南·期末）

28．如图，在平面直角坐标系中，直线$y=x+3$与x轴交于点A，与y轴交于点C，将点A沿x轴向右平移4个单位长度得到点B，抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点A，B，C.



(1)求抛物线的表达式；

(2)如图1，在直线AC上方的抛物线上，是否存在一点P，使$\triangle ACP$的面积最大？若存在，请求出点P的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)如图2，点M在抛物线的对称轴上，点Q在x轴上，若以点M、Q、A、C为顶点，AC为边的四边形为平行四边形，请求出M,Q的坐标.

（23-24九年级上·云南昆明·期末））

29.）如图1，二次函数$y=ax^2+4x+c(a\neq 0)$的图象与一次函数$y=-x+2$的图象交于A，B两点，点A在y轴上，抛物线的对称轴为直线$x=2$，点C是二次函数图象的顶点．

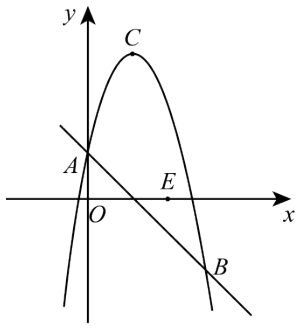


图1

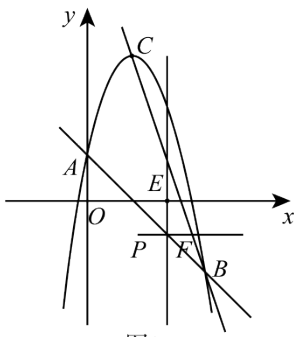


图2

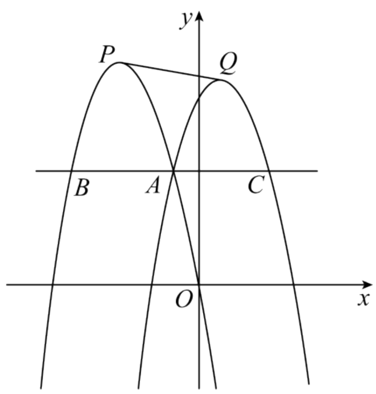
(1)求二次函数解析式；

(2)若将二次函数$y=ax^2+4x+c$的顶点C向右平移n个单位后得到C'．在点C'的平移过程中，是否存在一个合适的位置，使$\triangle ABC'$是一个以BC'为斜边的直角三角形？若存在，请求出点C'的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)如图2，P是x轴下方线段AB上一点，过点P分别作x轴的垂线和平行线，垂足为点E，平行线交直线BC于点F．当$\triangle PEF$面积最大时，在x轴上找一点M，使$|BM-PM|$的值最大，求出点P的坐标，并直接写出点M的坐标和$|BM-PM|$的最大值．

（22-23九年级上·江苏泰州·期末）

30．在平面直角坐标系中，已知抛物线$y_1=-x^2-6x$．



(1)求抛物线y_1的顶点P坐标；

(2)平移抛物线y_1得抛物线y_2，两抛物线交于点A，过点A作x轴的平行线交抛物线y_1和平移后的抛物线y_2分别为B和C（点B在点C的左侧）．

①平移后的抛物线y_2顶点在直线$x=1$上，点A的横坐标为-1，求抛物线y_2的表达式；

②平移后的抛物线y_2顶点在直线$x=1$上，点A的横坐标为$m\left(-3<m<1\right)$，求BC的长；

③设点A的横坐标为n，$BC=10$，抛物线y_2的顶点为Q，设$PQ^2=y$，求y关于n的函数表达式，并求PQ的最小值．

1．±1

【分析】本题考查了二次函数的定义，形如$y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$的函数叫做二次函数，其图象为抛物线，据此即可求解.

【详解】解：由题意得：$a^2+1=2$，

解得：$a=\pm1$，

故答案为：±1

2．-2

【分析】此题主要考查了二次函数定义，关键是掌握形如$y=ax^2+bx+c(a$、b、c是常数，$a\neq0)$的函数，叫做二次函数．利用二次函数定义可得：$|m|=2$，且$2-m\neq0$，再计算出m的值即可.

【详解】解：由题意得：$|m|=2$，且$2-m\neq0$，

解得：$m=-2$，

故答案为：-2

3．2

【分析】由二次函数的定义进行计算，即可得到答案.

【详解】解：$\because y=\left(m+1\right)x^{m^2-m}+3$是二次函数，

$\therefore\begin{cases}m+1\neq0\\m^2-m=2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m\neq-1\\m=-1\\m=2\end{cases}$，

$\therefore m=2$；

故答案为：2.

【点睛】本题考查了二次函数的定义，解题的关键是熟记二次函数的定义进行解题.

4．-2

【分析】本题考查了二次函数.解题的关键是掌握二次函数的定义:函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0$，a、b、c为常数）叫二次函数.

利用二次函数定义可得$m^2-2=2$，且$m-2\neq0$，再解即可.

【详解】解：由题意得：$m^2-2=2$，且$m-2\neq0$，

解得：$m=-2$，

故答案为：-2．

5．-1

【分析】本题考查了二次函数的定义，利用了二次函数的定义：形如$y=ax^2+bx+c\left(a\neq0\right)$是二次函数，注意二次项的系数不等于零是解题关键．根据二次函数最高次数是二次，二次项的系数不等于零，可得答案．

【详解】解：根据题意得：$\begin{cases}m^2-2m-1=2\\ m^2-3m\neq0\end{cases}$，

解得：$m=-1$，

故答案为：-1．

6．C

【分析】二次函数化成顶点式为$y=-x^2+2mx=-\left(x-m\right)^2+m^2$，再根据二次函数的性质进而求解．

【详解】解：$\because y=-x^2+2mx=-\left(x-m\right)^2+m^2$，

$\therefore$抛物线开口向下，顶点坐标为$\left(m,m^2\right)$，对称轴是直线$x=m$，选项A正确，不符合题意；

$\therefore x>m$时，y随x增大而减小，$x<m$时，y随x增大而增大，选项C错误，符合题意，选项D正确，不符合题意；

把$x=0$代入$y=-x^2+2mx$，得$y=0$，

$\therefore$抛物线经过$\left(0,0\right)$，该函数图象经过原点，选项B正确，不符合题意，

故选：C．

【点睛】本题考查二次函数的性质，解题的关键是掌握二次函数图象与系数的关系．

7．D

【分析】本题考查了二次函数图象的性质，掌握二次函数图象的性质是解题的关键．将解析式化为顶点式，得出对称轴为直线$x=1$，即可判断A选项，令$y=0$，则$ax^2-2ax+c=0$，根据判别式$\Delta>0$，即可判断B选项，根据已知条件，可得$x_2-1>1-x_1$，根据抛物线开口向上，离对称轴越远，函数值越大，即可判断C选项，根据顶点坐标，可得函数最小值，进而判断D选项．

【详解】解：$\because y=ax^2-2ax+c=a\left(x-1\right)^2-a+c$，

$\therefore$抛物线的对称轴是直线$x=1$，故A选项正确；

令$y=0$，则$ax^2-2ax+c=0$，$\Delta=b^2-4ac=4a^2-4ac$，

若$c<0$，$\Delta=4a^2-4ac>0$，$x_1x_2=\dfrac{c}{a}<0$，

$\therefore$则抛物线与x轴有两个交点，且交点在y轴两侧，故B选项正确；

抛物线开口向上，若点$\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$在抛物线上，且$x_1<x_2$，$x_1+x_2>2$，

则$x_1<1<x_2$，$x_2-1>1-x_1$，

$\therefore y_1<y_2$，故C选项正确；

$\because y=a\left(x-1\right)^2-a+c$，顶点坐标为$\left(1，c-a\right)$，$a>0$，抛物线开口向上，

若点$\left(m,n\right)$在抛物线上，则$n\geq c-a$

故D选项错误，

故选：D．

8．D

【分析】根据题目中的函数解析式和二次函数的性质，可以判断各个选项中的说法是否正确，从而可以解答本题．

【详解】解：①：$\because$二次函数$y=a(x+1)(x-m)$（a为非零常数，$1<m<2$），

$\therefore x_1=-1，x_2=m，x_1<x_2$，

又$\because$当$x<-1$时，y随x的增大而增大，

$\therefore a<0$，开口向下，

$\therefore$当$x>2>x_2$时，y随x的增大而减小，

故①正确；

②：$\because$二次函数$y=a(x+1)(x-m)$（a为非零常数，$1<m<2$），当$x<-1$时，y随x的增大而增大，

$\therefore a<0$，

若图象经过点$(0,1)$，则$1=a(0+1)(0-m)$，

得$1=-am$，

$\because a<0,1<m<2$，

$\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}$ ，

故②错误；

③：又∵对称轴为直线$x=\frac{-1+m}{2}$，$1 < m < 2$，

$\therefore 0 < \frac{-1+m}{2} < \frac{1}{2}$，

∴若$(-2021, y_1)$，$(2021, y_2)$是函数图象上的两点，2021离对称轴近些，则$y_1 < y_2$，

故③正确；

④若图象上两点$(\frac{1}{4}, y_1)$，$(\frac{1}{4}+n, y_2)$对一切正数n，总有$y_1 > y_2$，$1 < m < 2$，

∴该函数与x轴的两个交点为$(-1,0),(m,0)$，

$\therefore 0 < \frac{-1+m}{2} \le \frac{1}{4}$，

解得$1 < m \le \frac{3}{2}$，

故④正确；

∴①③④正确；②错误．

故选：D．

【点睛】本题考查二次函数的性质、二次函数图象上点的坐标特征，解答本题的关键是明确题意，利用二次函数的性质解答．

9．③④##④③

【分析】本题考查了一次函数与二次函数的性质，将$x=-1$代入，即可判断①，$m=0$，函数为$y=x+1$，是一次函数，无最大或最小值，故②错误，分$m=0$，$m \ne 0$根据一次函数与二次函数的性质，即可判断③，根据$y=m\left(x^2-x-2\right)+(x+1)=m(x+1)(x-2)+(x+1)$得出图象必过定点$(-1,0),(2,3)$．即可判断④．

【详解】（1）当$x=-1$时，$y=m+(m-1)-2m+1=0$．∴①错误．

（2）当$m=0$，函数为$y=x+1$，是一次函数，无最大或最小值．∴②错误．

（3）若$m=0$，则$y=x+1$，与x轴有公共点．

若$m \ne 0$，则$\Delta=m-1+4(2m-1)=9m^2-6m+1=(3m-1)^2 \ge 0$．∴③正确．

（4）$y=m\left(x^2-x-2\right)+(x+1)=m(x+1)(x-2)+(x+1)$．

当$x=-1$时，$y=0$；当$x=2$时，$y=3$．图象必过定点$(-1,0),(2,3)$．

∴④正确.

10．①②④

【分析】本题考查了二次函数的性质及数形结合思想，掌握二次函数的基本性质并会灵活应用是解题的关键.

根据题意确定抛物线的对称轴，再根据图象与系数的关系逐个判断即可.

【详解】解：①∵抛物线经过点$(-1,0)$，

$\therefore a+2a+c=0$，

$\therefore 3a+c=0$，

当$x=3$时，$9a-6a+c=3a+c=0$，

$\therefore$该抛物线一定经过$(3,0)$，

故此项正确；

②由①得：$c=-3a$，

$\because c>0$，

$\therefore -3a>0$，

$\therefore a<0$，

$\because 3a+c=0$，

$\therefore 2a+c=-a$，

$\therefore 2a+c>0$，

故此项正确；

③抛物线的对称轴为直线$x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$，

$\because a<0$，

当$y_1>y_2$时，

$|m-1|<|m+1-1|$，

解得，$m>1$或$\dfrac{1}{2}<m<1$，

故此项错误.

④∵抛物线$y=ax^2-2ax+c$，对称轴为直线$x=1$，

$\because$抛物线$y=ax^2-2ax+c$经过点$(-1,0)$，$(3,0)$，

$\because x_1$，$x_2\left(x_1<x_2\right)$是方程$ax^2-2ax+c+n=0$的两个根，其中$n<0$，，

所以两个根就是抛物线$y=ax^2-2ax+c$与直线$y=-n$交点的横坐标，

$\because -n>0$，

$\therefore -1<x_1<x_2<3$，

故此项正确，

故答案为：①②④．

11．(1) $y=-x^2-2x+3$

(2)当P点运动到$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$时，$PD$最大值为$\frac{9\sqrt{2}}{8}$

(3)存在，H点的坐标为$\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$或$\left(0,\frac{7}{3}\right)$或$\left(-4,2\right)$或$\left(-4,1\right)$

【分析】（1）设顶点式$y=a\left(x+3\right)\left(x-1\right)$，展开得$-3a=3$，解方程求出$a$即可得到抛物线解析式；

（2）过点P作$PE\parallel y$轴交AC于点E，根据题意推出$\triangle OAC$，$\triangle PDE$为等腰直角三角形，利用等腰直角三角形的性质，推出PD的表达式，最终利用函数法求最值；

（3）分AM为边和对角线两种情况，进行讨论求解，先通过勾股定理求出N点的坐标，再由矩形对角线的性质，直接计算H的坐标．

【详解】（1）解：设抛物线解析式为$y=a\left(x+3\right)\left(x-1\right)$，

即$y=ax^2+2ax-3a$，

$\because y=ax^2+bx+3$

$\therefore -3a=3$，

解得$a=-1$，

$\therefore$抛物线的函数表达式为$y=-x^2-2x+3$；

（2）解：由（1）知$y=-x^2-2x+3$，

当$x=0$时，$y=3$，

$\therefore C\left(0,3\right)$，

$\therefore OA=OC$，

$\therefore \triangle OAC$是等腰直角三角形，$\angle CAO=45°$，

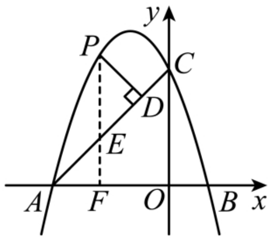
设直线AC的解析式为$y=kx+b$，

将$C\left(0,3\right)$，$A\left(-3,0\right)$代入，得$\begin{cases}b=3\\-3k+b=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}b=3\\k=1\end{cases}$，

$\therefore y_{AC}=x+3$，

$\because$ P是抛物线上位于直线AC上方的一个动点，过点P作$PE\,/\!/\,y$轴交AC于点E，



图①

$\therefore$设$P\left(m,-m^2-2m+3\right)$，则$E\left(m,m+3\right)$，

$\therefore PE=-m^2-3m$，其中$-3<m<0$，

$\because \angle PFA=90°,\angle CAO=45°$，

$\therefore \angle PED=\angle AEF=45°$，

$\because PD\perp AC$，

$\therefore \triangle PED$为等腰直角三角形，

$\therefore PD=\sqrt{2}PE=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(m^2+3m\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(m+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$

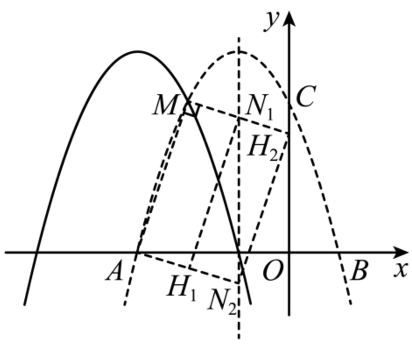
$\therefore$当$m=-\dfrac{3}{2}$时，PD最大值为$\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$，此时$P\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}\right)$；

（3）解：平移后的函数解析式为$y=-\left(x+3+2\right)\left(x-1+2\right)=-x^2-6x-5$，

将$y=-x^2-6x-5$与$y=-x^2-2x+3$联立，得$-x^2-6x-5=-x^2-2x+3$，

解得两条抛物线交点M的坐标为$(-2,3)$，

如图，以AM为边，作$MN_1\perp AM$交对称轴于N_1，可构造矩形AMN_1H_1，设$N_1\left(-1,y_1\right)$，



$\therefore AM^2=(-2+3)^2+(3-0)^2=10$，

$MN_1^{\ 2}=\left[(-1)-(-2)\right]^2+(y_1-3)^2$， $AN_1^{\ 2}=\left[(-1)-(-3)\right]^2+(y_1-0)^2$，

$\because AM^2+MN_1^{\ 2}=AN_1^{\ 2}$，

$\therefore 10+\left[(-1)-(-2)\right]^2+(y_1-3)^2=\left[(-1)-(-3)\right]^2+(y_1-0)^2$，

解得 $y_1=\frac{8}{3}$，

设 $H_1(p_1,q_1)$，由 A，M，N_1，H_1 四点的相对位置关系可得：

$\begin{cases}(-1)+(-3)=(-2)+p_1\\0+\frac{8}{3}=3+q_1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}p_1=-2\\q_1=-\frac{1}{3}\end{cases}$，

$\therefore H_1\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$；

同理，以 AM 为边，作 $MN_2\perp AM$ 交对称轴于 N_2，可构造矩形 AMN_2H_2，设 $N_2(-1,y_2)$，

$\because AM^2+AN_2^{\ 2}=MN_2^{\ 2}$，

$\therefore 10+\left[(-1)-(-3)\right]^2+(y_2-0)^2=\left[(-1)-(-2)\right]^2+(y_2-3)^2$，

解得 $y_2=-\frac{2}{3}$，即 $N_2\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$，

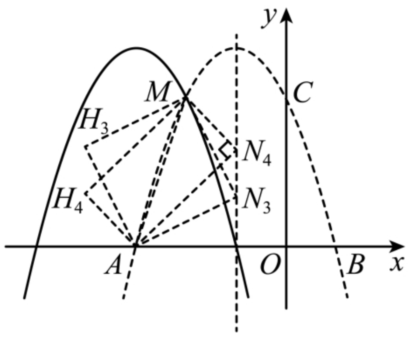
设 $H_2(p_2,q_2)$，由 A，M，N_2，H_2 四点的相对位置关系可得：

$\begin{cases}(-1)+(-2)=(-3)+p_2\\3+\left(-\frac{2}{3}\right)=0+q_2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}p_2=0\\q_2=\frac{7}{3}\end{cases}$

$\therefore H_2\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$；

如图，以 AM 为对角线，作 $MN_3 \perp AN_3$ 交对称轴于 N_3，可构造矩形 AN_3MH_3，设 $N_3\left(-1,y_3\right)$，



$\because AM^2 = AN_3^{\ 2} + MN_3^{\ 2}$，

$\therefore 10=\left[(-1)-(-3)\right]^2+\left(y_3-0\right)^2+\left[(-1)-(-2)\right]^2+\left(y_3-3\right)^2$，

解得 $y_3=1$， $y_4=2$，即 $N_3\left(-1,1\right)$， $N_4\left(-1,2\right)$，

设 $H_3\left(p_3,q_3\right)$，由 A，M， N_3， H_3 四点的相对位置关系可得：

$\begin{cases}(-3)+(-2)=(-1)+p_3\\3+0=1+q_3\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}p_3=-4\\q_3=2\end{cases}$，

$\therefore H_3\left(-4,2\right)$；

设 $H_4\left(p_4,q_4\right)$，由 A，M， N_4， H_4 四点的相对位置关系可得：

$\begin{cases}(-3)+(-2)=(-1)+p_4\\3+0=2+q_4\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}p_4=-4\\q_4=1\end{cases}$，

$\therefore H_4\left(-4,1\right)$；

综上可知，H 点的坐标为 $\left(-2,-\dfrac{1}{3}\right)$ 或 $\left(0,\dfrac{7}{3}\right)$ 或 $\left(-4,2\right)$ 或 $\left(-4,1\right)$

【点睛】本题考查了待定系数法求函数解析式，用函数法求线段和最值问题，二次函数图象和性质，矩形性质等知识点，是一道关于二次函数综合题和压轴题，综合性强，难度较大；熟练掌握相关知识并灵活运用方程思想，数形结合思想和分类讨论思想是解题关键.

12．(1)抛物线的表达式为$y=-x^2+3x+4$，对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$

(2)当$t=2$时，PQ的最大值为4

(3)存在，M的坐标是$(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{7}}{2})$或$(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2})$

【分析】（1）设抛物线的表达式为$y=-(x-x_1)(x-x_2)$，根据抛物线与x轴交点可得交点式，化简即可求解；

（2）先求出直线BC的表达式，再设点$P\left(t,-t+4\right)$，求出$PQ==-t^2+4t$，最后利用二次函数的性质即可求出PQ的最大值；

（3）当四边形$PBMN$是菱形时，$BP=BM$，设点$M\left(\frac{3}{2}，m\right)$，可列方程$(4-2)^2+2^2=(4-\frac{3}{2})^2+m^2$，求出$m$的值，即得答案．

【详解】（1）解：设抛物线的表达式为$y=-(x-x_1)(x-x_2)$，

因为抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于点$A\left(-1,0\right)$，$B\left(4,0\right)$，

所以$y=-(x+1)(x-4)=-x^2+3x+4$，

则抛物线的对称轴为直线$x=\frac{3}{2}$；

（2）解：设直线BC的表达式为$y=kx+4$：，

将点B的坐标代入上式得$0=4k+4$，

解得$k=-1$，

故直线BC的表达式为$y=-x+4$，

设点$P\left(t,-t+4\right)$，则点$Q\left(t,-t^2+3t+4\right)$，

则$PQ=\left(-t^2+3t+4\right)-\left(-t+4\right)=-t^2+4t$，

$\because -1<0$，

故PQ有最大值，

当$t=2$时，PQ的最大值为4；

（3）解：存在，理由：

当$t=2$时，点$P\left(2,2\right)$，

设点$M\left(\frac{3}{2}，m\right)$，而点$B\left(4,0\right)$；

$\because$四边形$PBMN$是菱形，

则 $BP=BM$，

即，$(4-2)^2+2^2=(4-\frac{3}{2})^2+m^2$，

解得：$m=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，

即点 M 的坐标为 $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{7}}{2})$ 或 $(\frac{3}{2}，-\frac{\sqrt{7}}{2})$．

【点睛】本题是二次函数的综合题，主要考查了二次函数的交点式，求一次函数的解析式，二次函数的图象与性质，菱形的性质，熟练掌握二次函数的图象及性质及菱形的性质是解题的关键．

13．(1) $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$

(2)1，$E\left(4,3\right)$

(3) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$

【分析】（1）先确定点 A 的坐标为 $\left(2,4\right)$，再结合等腰直角三角形的性质可得 $C\left(6,0\right)$，然后运用待定系数法即可解答；

（2）先用待定系数法可得 AC 的函数解析式为 $y=-x+6$，设 $E\left(t,-\frac{1}{4}t^2+t+3\right)$、$N(t,-t+6)$，则 $EN=-\frac{1}{4}t^2+2t-3$，然后化成顶点式求最值即可；

（3）先确定点 $M\left(5,\frac{7}{4}\right)$，过点 E 作 AD 的对称点 $E'\left(0,3\right)$，连接 $E'M$ 交 AD 于点 P，此时 $PE+PM$ 最短时 $M\left(5,\frac{7}{4}\right)$，最后运用勾股定理即可解答．

【详解】（1）解：$\because AD$ 为等腰直角 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，$y=a\left(x-2\right)^2+4$ 的顶点为点 A，

$\therefore A$ 的坐标为 $\left(2,4\right)$，

$\therefore AD=4$，

$\because AD$ 为等腰直角 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高，

$\therefore CD=AD=4$，

$\therefore C\left(6,0\right)$．

把 $C\left(6,0\right)$ 代入，$y=a\left(x-2\right)^2+4$ 解得：$a=-\frac{1}{4}$，

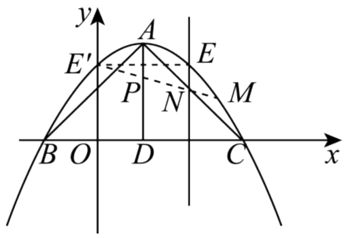
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}\left(x-2\right)^2+4$ 即 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$．

（2）解：设直线 AC 的函数解析式为 $y=kx+b$，

$\because A(2,4)$，$C(6,0)$，

$\therefore AC$ 的函数解析式为 $y=-x+6$．

设 $E\left(t,-\frac{1}{4}t^2+t+3\right)$，$N(t,-t+6)$，



$EN=-\frac{1}{4}t^2+t+3-(-t+6)=-\frac{1}{4}t^2+2t-3=-\frac{1}{4}(t-4)^2+1$，

$\therefore$当 $t=4$ 时，EN 最大为 1，

$\therefore E(4,3)$．

（3）解：$\because M(5,\ b)$ 在抛物线 $y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+4$ 上，

$\therefore M\left(5,\frac{7}{4}\right)$．

$\because AD$ 是此抛物线的对称轴，

$\therefore$过点 E 作 AD 的对称点 $E'(0,3)$，连接 $E'M$ 交 AD 于点 P，此时 $PE+PM$ 最短，$M\left(5,\frac{7}{4}\right)$；

$\therefore PE+PM$ 最短 $=E'M=\sqrt{(0-5)^2+\left(3-\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{17}}{4}$．

【点睛】本题主要考查了二次函数与几何的综合、求函数解析、求函数最值等知识点，灵活运用相关知识成为解题的关键．

14．(1)二次函数的表达式为：$y=-x^2+3x+4$，BC 所在直线的表达式为：$y=-x+4$；

(2) PF 的最大值为 $-(\frac{3}{2})^2+3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$，此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{25}{4}\right)$；

(3)存在，$(3,4)$，$\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2},-4\right)$，$\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2},-4\right)$．

【分析】（1）由题意得出方程组，求出二次函数的解析式为 $y=-x^2+3x+4$，则 $C(0,4)$，由待定系数法求出 BC 所在直线的表达式即可

（2）设点 P 的横坐标为 $t(0<t<4)$．可得 $P(t,-t^2+2t+4)$，$F(t,-t+4)$，则 $PF=-t^2+3t$，再利用二次函数的性质可得答案；

（3）由 $\triangle ABQ$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积，可得点 Q 与点 C 的到 x 轴的距离相等，所以点 Q

的纵坐标为± 4，代入二次函数关系式，分别求解即可．

【详解】（1）解：将点$A(-1,0)$，$B(4,0)$，代入$y=ax^2+bx+4$，

得：$\begin{cases}0=a-b+4\\0=16a+4b+4\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$，

$\therefore$二次函数的表达式为：$y=-x^2+3x+4$，

当$x=0$时，$y=4$，

$\therefore C(0,4)$，

设BC所在直线的表达式为：$y=mx+n$，

将$C(0,4)$、$B(4,0)$代入$y=mx+n$，

得：$\begin{cases}4=n\\0=4m+n\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=-1\\n=4\end{cases}$，

$\therefore BC$所在直线的表达式为：$y=-x+4$；

（2）解：设点P的横坐标为$t(0<t<4)$．

$\therefore P(t,-t^2+2t+4)$，$F(t,-t+4)$，

$\therefore PF=-t^2+2t+4-\left(-t+4\right)=-t^2+3t$，

$\therefore$当$t=-\frac{3}{2\times(-1)}=\frac{3}{2}$时，$PF$的最大值为$-(\frac{3}{2})^2+3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$，

此时点P的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{25}{4}\right)$．

（3）解：$\because\triangle ABQ$的面积等于$\triangle ABC$的面积，

$\therefore$点Q与点C的到x轴的距离相等，

$\because C(0,4)$，

$\therefore$点Q的纵坐标为± 4，

$\therefore -x^2+3x+4=\pm 4$，

解得：$x_1=0$（舍去），$x_2=3$，$x_3=\frac{3+\sqrt{41}}{2}$，$x_4=\frac{3-\sqrt{41}}{2}$