专题 01 二次函数的图形和性质应用的六种类型

题型归纳

二次函数的图形和性质应用的六种类型

1. 二次函数的图像在解题中的应用
2. 二次函数图像的平移在解题中的应用
3. 二次函数的性质在解题中的应用
4. 二次函数图像上的三角形在解题中的应用
5. 二次函数图像上的四边形在解题中的应用
6. 二次函数图像上的平行线在解题中的应用

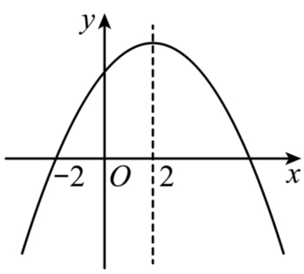
精讲精练

题型 01 二次函数的图像在解题中的应用

【典例分析】

【例 1－1】（23－24 九年级上·安徽滁州·阶段练习）

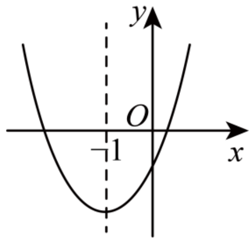
1．如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(-2,0)$，且顶点在直线 $x=2$ 上，则 $\frac{b}{c}$ 的值为（　）



A．3　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{1}{3}$

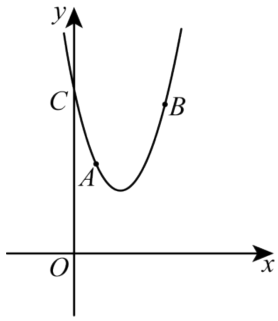
【例 1－2】（23－24 九年级上·山东淄博·期中）

2．如图，二次函数 $y=a\left(x+1\right)^{2}-2$ 的图象过点$(1,0)$，当$-2\le x<3$时，函数值y的取值范围是_____．



【例 1－3】（22－23 九年级上·贵州遵义·期中）

3．如图，在平面直角坐标系中，抛物线$y=x^{2}+bx+c$的图象经过点$A\left(1,3\right)$，$B\left(4,6\right)$，与y轴交于点C．



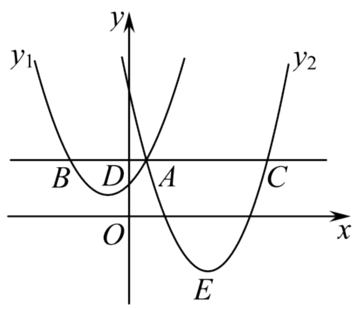
(1)求抛物线的解析式；

(2)连接AC、AB、BC，求$\triangle ABC$的面积．

【变式演练】

【变式 1－1】（23－24 九年级上·四川自贡·阶段练习）

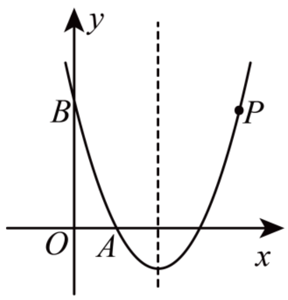
4．如图，抛物线$y_1=\frac{1}{2}\left(x+1\right)^{2}+1$与$y_2=a\left(x-4\right)^{2}-3$交于点$A\left(1,3\right)$，过点$A$作$x$轴的平行线，分别交两条抛物线于$B$、$C$两点，且$D$、$E$分别为顶点．则以下结论：①$a=\frac{2}{3}$；②$AC=AE$；③$\triangle ABD$是等腰直角三角形；④当$x>1$时，$y_1>y_2$．正确的是（　　）



A．①②③　　　　B．①③　　　　C．①②④　　　　D．①②③④

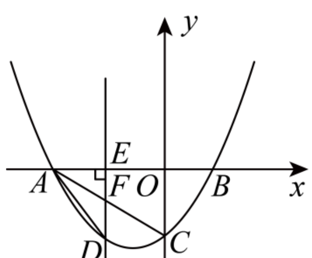
【变式 1－2】（23－24 九年级上·四川绵阳·阶段练习）

5．如图，在平面直角坐标系中，抛物线$C_1: y=x^2+bx+c$经过点$A(1,0)$、点$B(0,3)$，点P是该抛物线上一动点，其横坐标为n．若抛物线C_1在点P左侧部分(包括点P)的最低点的纵坐标为$4-n$，则n的值为___________．



【变式 1－3】（23－24 九年级上·安徽合肥·期末）

6． 如图，抛物线$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$经过点$A(-4,0)$、$B(2,0)$，交y轴于点$C\left(0,-\frac{8}{3}\right)$．$D$为抛物线在第三象限部分上的一点，作$DE\perp x$轴于点$E$，交线段$AC$于点$F$，连接$AD$．



(1)求抛物线的表达式；

(2)求线段DF长度的最大值，并求此时点D的坐标；

(3)若线段AF把$\triangle ADE$分成面积比为$1:2$的两部分，求此时点E的坐标．

题型 02 二次函数图像的平移在解题中的应用

【典例分析】

【例 2－1】（2024 九年级上·全国·专题练习）

7．将抛物线 $y=x^2$ 向左平移 2 个单位长度，再向上平移 3 个单位长度，所得抛物线的表达式为（　　）

A． $y=\left(x+2\right)^2+3$　　B． $y=\left(x+2\right)^2-3$

C． $y=\left(x-2\right)^2+3$　　D． $y=\left(x-2\right)^2-3$

【例 2－2】（23－24 九年级上·广东东莞·期中）

8．把抛物线 $y=3x^2$ 向左平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位，所得的抛物线的解析式是_____．

【例 2－3】（23－24 九年级上·吉林·阶段练习）

9．已知关于 x 的二次函数 $y=-\left(m+2\right)x^{m-2}$（$m$ 为常数）．

(1)求 m 的值；

(2)将该函数图象向下平移 n 个单位，使得平移后的图象经过点 $\left(0,-8\right)$，求 n 的值．

【变式演练】

【变式 2－1】（22－23 九年级上·北京朝阳·期末）

10．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=m(x-3)^2+k$ 与 x 轴交于 $\left(a,0\right)$，$\left(b,0\right)$ 两点，其中 $a<b$．将此抛物线向上平移，与 x 轴交于 $\left(c,0\right)$，$\left(d,0\right)$ 两点，其中 $c<d$，下面结论正确的是（　）

A．当 $m>0$ 时，$a+b=c+d$，$b-a>d-c$

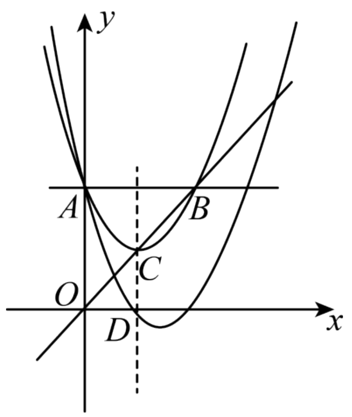
B．当 $m>0$ 时，$a+b>c+d$，$b-a=d-c$

C．当 $m<0$ 时，$a+b=c+d$，$b-a>d-c$

D．当 $m<0$ 时，$a+b>c+d$，$b-a<d-c$

【变式 2－2】（22－23 九年级上·内蒙古鄂尔多斯·阶段练习）

11．如图，抛物线 $y=x^2+bx+6$ 与 y 轴相交于点 A，与过点 A 平行于 x 轴的直线相交于点 B(点 B 在第一象限).抛物线的顶点 C 在直线 OB 上，对称轴与 x 轴相交于点 D.平移抛物线，使其经过点 A，D，则平移后的抛物线的解析式为_____．



【变式2－3】（22－23九年级上·浙江宁波）

12．已知二次函数图像的顶点坐标为$A(1,-4)$，且经过点$(2,-3)$.

(1)求该二次函数解析式.

(2)将该二次函数的图像向左平移几个单位能使平移后所得图像经过坐标原点？并求平移后图像对应的二次函数解析式.

题型03 二次函数的性质在解题中的应用

【典例分析】

【例3－1】（22－23九年级上·广东湛江·阶段练习）

13．抛物线$y=-(x-1)^2+2$的顶点坐标是（　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-1,-2)$　　C．$(1,2)$　　D．$(1,-2)$

【例3－2】（23－24九年级上·北京海淀·期中）

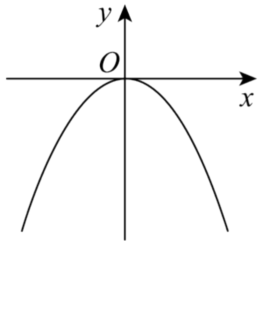
14．已知某抛物线上部分点的横坐标x，纵坐标的对应值如下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	5	0	-3	-4	-3	…

那么该抛物线的顶点坐标是____；当$-1<x\le k$时，总有$-4\le y<0$，则k的取值范围是____

【例3－3】（23－24九年级上·吉林·阶段练习）

15．若二次函数$y=(a-1)x^2+a^2-2a-3$的图象如图所示，求a的值.



【变式演练】

【变式3－1】（23－24九年级上·广东广州·阶段练习）

16．二次函数 $y=ax^2+bx-1\left(a\neq 0\right)$ 的图象经过点 $\left(1,1\right)$，则代数式 $a+b-2$ 的值为（　　）

A．-3　　B．0　　C．2　　D．5

【变式3－2】（23－24九年级上·北京海淀·期中）

17．抛物线 $y=x^2-2x-6$，当 $-1<x<4$ 时，函数 y 的取值范围是________

【变式3－3】（2024九年级上·全国·专题练习）

18．已知抛物线 $y=ax^2+bx+3(a<0)$．

(1)求证：在平面直角坐标系中，该抛物线与 x 轴总有两个公共点；

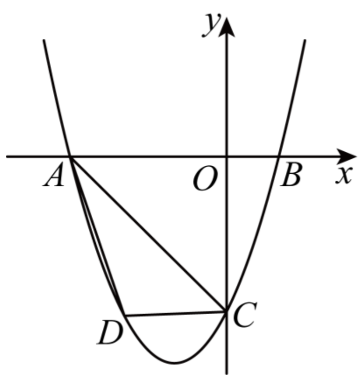
(2)若点 $A(m,y_1)$，$B(8,y_2)$，$C(m+6,y_1)$ 都在抛物线上，且 $3<y_2<y_1$，求 m 的取值范围．

题型04二次函数图像上的三角形在解题中的应用

【典例分析】

【例4－1】（23－24九年级上·广西崇左·期末）

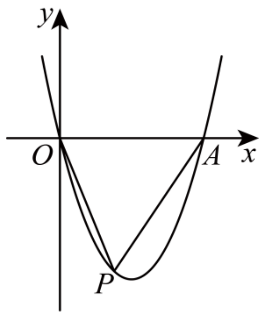
19．如图，抛物线 $y=x^2+2x-3$ 与 x 轴交于点 A 和点 B，与 y 轴交于点 C．点 D 是第三象限抛物线上一动点，连接 AD,AC,CD．则 $\triangle ACD$ 面积的最大值等于（　）



A．$\frac{25}{8}$　　B．$\frac{13}{4}$　　C．$\frac{27}{8}$　　D．$\frac{7}{2}$

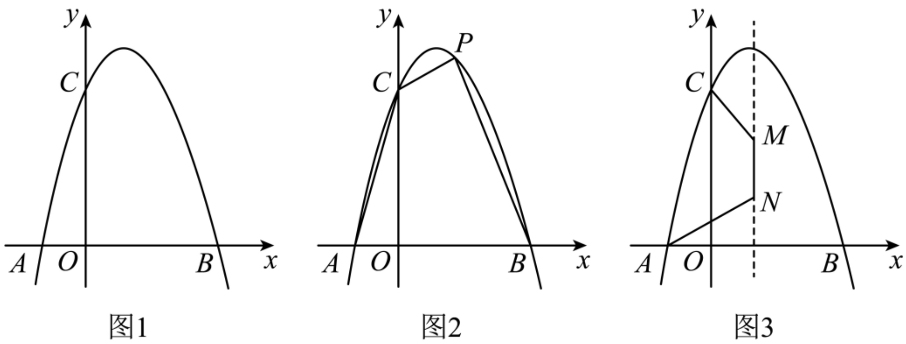
【例4－2】（23－24九年级上·江西南昌·阶段练习）

20．如图，抛物线 $y=x\left(x-4\right)$ 与 x 轴交于 O、A 两点，点 P 在抛物线上，则当 $\triangle AOP$ 的面积为8时，点 P 的坐标为_____．



【例4－3】（22－23九年级上·广东佛山·期末）

21．如图1，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 A、B，与 y 轴交于点 C，且 $A(-1,0)$，$OB=OC=3OA$．



(1)试求抛物线的解析式；

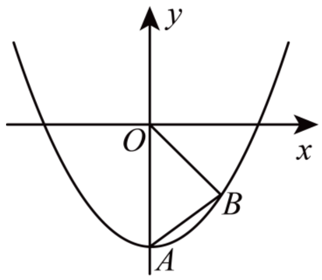
(2)如图2，点 P 是第一象限抛物线上的一点，连接 AC、PB、PC．且 $S_{四边形OBPC}=5S_{\triangle AOC}$，试求点 P 的坐标？

(3)如图3，定长为1的线段 MN 在抛物线的对称轴上上下滑动，连接 CM、AN．记 $m=CM+MN+AN$，试问：m 是否有最小值？如果有，请求 m 的最小值；如果没有，请说明理由．

【变式演练】

【变式4－1】（23－24九年级上·广东广州·期末）

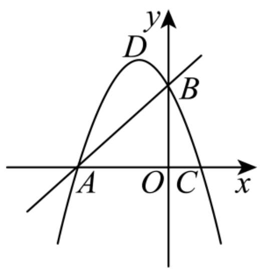
22．如图，抛物线 $y=ax^2+c$ 经过等腰直角三角形的两个顶点 A，B，点 A 在 y 轴上，则 ac 的值为(　)



A．-4　　　　B．-3　　　　C．-2　　　　D．-1

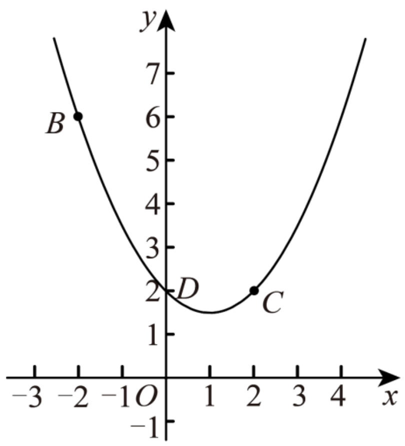
【变式4－2】（22－23九年级上·广西南宁·期中）

23．如图，直线$y=x+3$与两坐标轴交于A，B两点，抛物线$y=-x^2+bx+c$过A、B两点，且交x轴的正半轴于点C，在抛物线上有一点P，使得$\triangle PAB$是以AB为直角边的直角三角形，则点P的坐标为 ______．（提示：两点距离公式为：$AB=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}$）



【变式4－3】（23－24九年级上·湖南郴州·期末）

24．如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+2$过$B(-2,6)$，$C(2,2)$两点．



(1)求抛物线的表达式．

(2)记抛物线与y轴的交点为D，求$\triangle BCD$的面积．

(3)点M在抛物线的对称轴上，当M的坐标为多少时$\triangle BMD$周长最小？

题型05 二次函数图像上的四边形在解题中的应用

【典例分析】

【例 5－1】（23－24 九年级上·安徽宣城·期末）

25．已知点 $A(1,1)$、$B(3,1)$、$C(3,2)$、$D(1,2)$，若抛物线 $y=ax^2\left(a>0\right)$ 与四边形 $ABCD$ 的边没有交点，则 a 的取值范围为（　）

A．$\frac{1}{9}<a<1$　　B．$\frac{2}{9}<a<1$

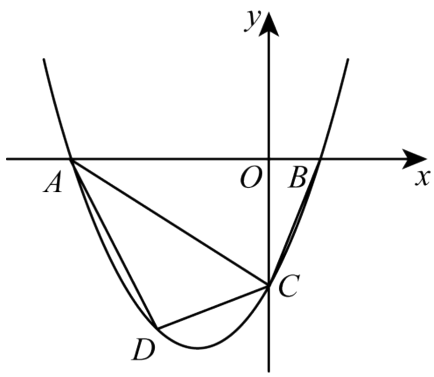
C．$a>2$ 或 $0<a<\frac{1}{9}$　　D．$a>1$ 或 $0<a<\frac{2}{9}$

【例 5－2】（23－24 九年级上·浙江杭州·阶段练习）

26．已知抛物线 $y=2x^2+bx+c$ 与直线 $y=-2$ 只有一个公共点，且过点 $A(m-2，n)$，$B(m+4，n)$，过点 A，B 分别作 x 轴的垂线，垂足为 M，N，则四边形 $AMNB$ 的周长为 ______．

【例 5－3】（22－23 九年级上·贵州黔南·期中）

27．已知，如图抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a>0\right)$ 与 y 轴交于点 $C(0,-4)$，与 x 轴交于 $A(-4,0)$、$B(1,0)$ 两点．



(1)求抛物线的解析式；

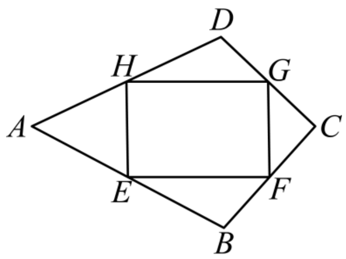
(2)若点 D 是线段 AC 下方抛物线上的动点，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值．

(3)点 P 是抛物线对称轴上一动点，点 Q 是直线 AC 上一动点，且以点 A、B、Q、P 为顶点的四边形是平行四边形，请直接写出点 Q 的坐标．

【变式演练】

【变式 5－1】（23－24 九年级上·广西钦州·期末）

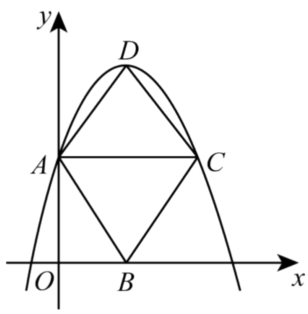
28．如图，在四边形 $ABCD$ 中，点 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，AD 的中点，若四边形 $EFGH$ 是矩形，且其周长是 20，则四边形 $ABCD$ 的面积的最大值是（　）



A．25　　　　B．30　　　　C．40　　　　D．50

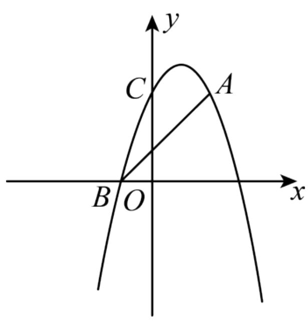
【变式 5－2】（22－23 九年级上·浙江温州·阶段练习）

29．如图，抛物线 $y=-x^2+6x+c$ 交 y 轴正半轴于点A，过点A作 $AC\parallel x$ 轴交抛物线于另一点 C，点 B 在 x 轴上，点 D 在抛物线上．当四边形 $ABCD$ 是菱形时，则 c 的值为_____．



【变式 5－3】（22－23 九年级上·云南保山·期末）

30．如图，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 经过点 $A(2,3)$，与 x 轴负半轴交于点 B，与 y 轴交于点 C，且 $OC=3OB$．



(1)求抛物线的解析式；

(2)点 D 在 y 轴上，且 $\angle BDO=\angle BAC$，求点 D 的坐标；

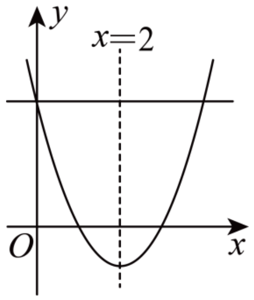
(3)点 M 在抛物线上，点 N 在抛物线的对称轴上，是否存在以点 A，B，M，N 为顶点的四边形是平行四边形？若存在．求出所有符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

题型 06 二次函数图像上的平行线在解题中的应用

【典例分析】

【例 6－1】（23－24 九年级上·吉林长春·期末）

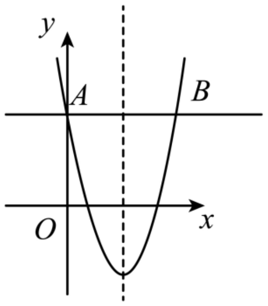
31．如图，已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=2$，点A、B 均在抛物线上，且 AB 与 x 轴平行，其中点A的坐标为(0,3)，则点 B 的坐标为（）



A．$(3,2)$　　B．$(4,3)$　　C．$(3,3)$　　D．$(5,3)$

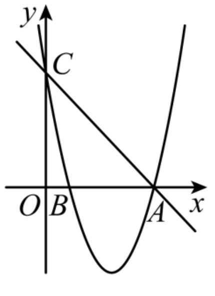
【例6−2】（21−22八年级下·浙江金华·期末）

32．如图，抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=3$，点 A，B 均在抛物线上，且 AB 与 x 轴平行，其中点 A 的坐标为 $(0,5)$，则点 B 的坐标为____.



【例6−3】（2023九年级上·河南洛阳）

33．如图，抛物线 $y=x^2-6x+c$ 与 x 轴交于点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，点 A 在点 B 的右侧，与 y 轴交于点 C.



(1)若直线 AC 的解析式为 $y=-x+5$，求抛物线的解析式；

(2)在（1）的条件下，过点 B 的直线与抛物线 $y=x^2-6x+c$ 交于另一点 P．若直线 AC 与直线 BP 平行，求点 P 的坐标；

(3)点$M(-1,-4)$，$N(6,-4)$为平面直角坐标系内两点，连结 MN．若抛物线与线段 MN 只有一个公共点，直接写出 c 的取值范围．

【变式演练】

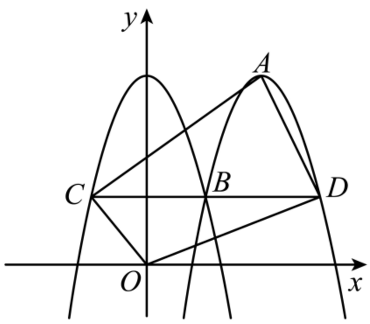
【变式 6－1】（22－23 九年级上·广东广州·期末）

34．直线 l 过点$(0,4)$且与 x 轴平行，若抛物线 $y=(x-a)^2+(x-2a)^2+(x-3a)^2-2a^2+a$（$a$ 为常数）与直线 l 无交点，则 a 的取值范围是（　　）．

A．$a>4$　　B．$a>0$　　C．$0<a\le 4$　　D．$0<a<4$

【变式 6－2】（22－23 九年级上·安徽合肥·阶段练习）

35．如图，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，抛物线 $y=a(x-3)^2+4$（a<0）的顶点为 A，与抛物线 $y=ax^2+4$ 交于 x 轴上方的点 B.

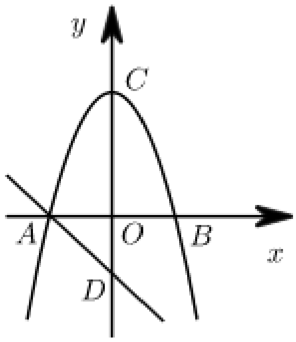


（1）点 B 的横坐标是_________

（2）过点 B 作平行于 x 轴的直线，分别与两条抛物线的另一个交点为 D，C，连结 AD，AC，OC，OD，则四边形 $ACOD$ 的面积为_________

【变式 6－3】（20－21 九年级上·江苏苏州·期中）

36．如图，已知抛物线 $y=-x^2+4$ 与 x 轴交于点 A，B（点 A 位于点 B 的左侧），C 为顶点，直线 $y=-x+m$ 经过点 A，与 y 轴交于点 D．



（1）求线段AD的长；

（2）平移该抛物线得到一条新抛物线，设新抛物线的顶点为C'．若新抛物线经过点D，并且新抛物线的顶点和原抛物线的顶点的连线CC'平行于直线AD，求新抛物线对应的函数表达式．

1．D

【分析】本题考查待定系数法求解析式，把$(-2,0)$和$x=2$代入计算即可．

【详解】∵抛物线$y=ax^2+bx+c$经过点$(-2,0)$，且顶点在直线$x=2$上，

$\therefore\begin{cases}0=4a-2b+c\\-\dfrac{b}{2a}=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}c=-12a\\b=-4a\end{cases}$，

$\therefore\dfrac{b}{c}=\dfrac{-4a}{-12a}=\dfrac{1}{3}$，

故选：D．

2．$-2\le y<6$

【分析】本题考查了待定系数法求二次函数的解析式以及二次函数的图象性质，正确掌握二次函数的图象性质是解题的关键．先求解二次函数的解析式，由对称轴$x=-1$在$-2\le x<3$里，故分别算出$x=-1$，$x=-2$，$x=3$所对应的函数值，即可作答．

【详解】解：依题意，把$(1,0)$代入$y=a(x+1)^2-2$，

得$0=a(1+1)^2-2=4a-2$，

解得$a=\dfrac{1}{2}$；

$\therefore y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-2$，

那么对称轴$x=-1$，

因为$-2\le -1<3$，

所以当$x=-1$时，$y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-2=\dfrac{1}{2}\times(-1+1)^2-2=-2$，

当$x=-2$时，$y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-2=\dfrac{1}{2}\times(-2+1)^2-2=-\dfrac{3}{2}$，

当$x=3$时，$y=\dfrac{1}{2}(x+1)^2-2=\dfrac{1}{2}\times(3+1)^2-2=6$，

所以当$-2\le x<3$时，则函数值y的取值范围是$-2\le y<6$，

故答案为：$-2\le y<6$．

3．(1) $y=x^2-4x+6$

(2) 6

【分析】（1）分别把$A(1,3)$，$B(4,6)$代入$y=x^2+bx+c$，利用待定系数法求解即可．

（2）连接AB、AC、BC，延长BA与y轴交于点D，求解$C(0,6)$，直线AB为$y=x+2$，

可得$D(0,2)$，再利用割补法求解面积即可；

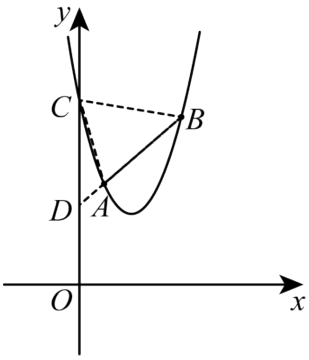
【详解】（1）解：分别把$A(1,3)$，$B(4,6)$代入$y=x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}1+b+c=3\\16+4b+c=6\end{cases}$

解得：$\begin{cases}b=-4\\c=6\end{cases}$.

故这个二次函数的解析式为：$y=x^2-4x+6$；

（2）解：如图，连接AC、AB、BC，延长BA与y轴交于点D，



$\because$当$x=0$时，$y=x^2-4x+6=6$，

$\therefore C(0,6)$，

$\because A(1,3)$，$B(4,6)$，设AB为$y=mx+n$，

$\therefore\begin{cases}m+n=3\\4m+n=6\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}m=1\\n=2\end{cases}$，

$\therefore$直线AB为$y=x+2$，

$\therefore D(0,2)$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}-S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}\times(6-2)\times4-\frac{1}{2}\times(6-2)\times1=6$.

【点睛】本题考查二次函数的综合应用，其中涉及到的知识点有待定系数法求函数解析式和坐标与图形面积等．要熟练掌握才能灵活运用．

4．B

【分析】本题考查了二次函数的性质，主要利用了待定系数法求二次函数解析式，已知函数

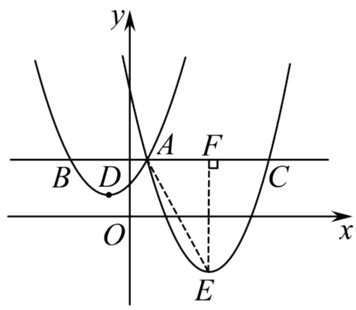
值求自变量的值，把点A坐标代入y_2， 求出a的值，即可得到函数解析式； 令$y=3$，求出A、B、C的横坐标，然后求出BD、AD的长，利用勾股定理的逆定理以及结合二次函数图象分析得出答案．

【详解】解：①$\because$抛物线$y_1=\frac{1}{2}\left(x+1\right)^2+1$与$y_2=a\left(x-4\right)^2-3$交于点$A\left(1,3\right)$，

$\therefore 3=a\left(1-4\right)^2-3,$

解得：$a=\frac{2}{3}$,故①符合题意；

②过点E作$EF\perp AC$于点F，



$\because E$是抛物线的顶点，

$\therefore AE=EC, E\left(4,-3\right),$

$\therefore AF=3, EF=6,$

$\therefore AE=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}, AC=2AF=6,$

$\therefore AC\neq AE,$， 故②不符合题意；

③当$y=3$时， $3=\frac{1}{2}\left(x+1\right)^2+1,$

解得：$x_1=1, x_2=-3,$

$\therefore B\left(-3,3\right), D\left(-1,1\right),$

$\therefore AB=4, AD=BD=2\sqrt{2},$

$\therefore AD^2+BD^2=AB^2,$

$\therefore \triangle ABD$是等腰直角三角形，故③符合题意；

④$\because \frac{1}{2}\left(x+1\right)^2+1=\frac{2}{3}\left(x-4\right)^2-3$时，

解得：$x_1=1, x_2=37,$

$\therefore$当 $37>x>1$时， $y_1>y_2$,故④不符合题意．

综上，符合题题意的有①③，

故选：B．

5．5 或$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$

【分析】本题考查了二次函数的图象及性质、待定系数法、一元二次方程求解．利用待定系数法求解，根据$y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，得出抛物线C_1的顶点坐标为$(2,-1)$，对称轴为直线$x=2$．进行分类讨论当$n>2$时，当$n\le 2$时，求解一元二次方程．

【详解】解：$\because$抛物线$C_1: y=x^2+bx+c$经过点$A(1,0)$、点$B(0,3)$，

$\therefore\begin{cases}1+b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=-4,\\ c=3,\end{cases}$

$\therefore$抛物线C_1的解析式为$y=x^2-4x+3$，

$\because y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

$\therefore$抛物线C_1的顶点坐标为$(2,-1)$，对称轴为直线$x=2$．

当$n>2$时，抛物线C_1顶点为最低点，

$\therefore -1=4-n$，解得$n=5$；

当$n\le 2$时，点P为最低点，将$x=n$代入$y=x^2-4x+3$中，得$y=n^2-4n+3$，

$\therefore n^2-4n+3=4-n$，

解得$n_1=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$（舍），$n_2=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$．

综上所述，n的值为 5 或$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$．

故答案为：5 或$\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$．

6．(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{2}{3}x-\dfrac{8}{3}$

(2)线段DF长度得最大值是$\dfrac{4}{3}$，此时D的坐标是$D\left(-2,-\dfrac{8}{3}\right)$

(3) $E(-1,0)$

【分析】（1）设抛物线的表达式为$y=a\left(x+4\right)\left(x-2\right)$然后把$C\left(0,-\frac{8}{3}\right)$代入求解即可得到答案；

（2）求出直线AC的解析式$y=-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$，然后设$F\left(x,-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)$，$D\left(x,\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)$，利用两点距离公式表示出$DF$，然后利用二次函数的性质求解即可；

（3）$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=EF:FD$，分$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=1:2$和$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=2:1$两种情况讨论求解即可得到答案.

【详解】（1）解：∵抛物线与 x 轴交于点$A\left(-4,0\right)$，$B\left(2,0\right)$

∴设抛物线的表达式为$y=a\left(x+4\right)\left(x-2\right)$，

将$C\left(0,-\frac{8}{3}\right)$代入表达式，解得$a=\frac{1}{3}$，

∴抛物线的表达式为：$y=\frac{1}{3}\left(x+4\right)\left(x-2\right)$，

即：$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$；

（2）解：设直线AC的表达式为：$y=kx-\frac{8}{3}$，

将$A(-4,0)$代入表达式，得$k=-\frac{2}{3}$，

∴直线AC的表达式为：$y=-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$；

设$F\left(x,-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)$，$D\left(x,\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)$.

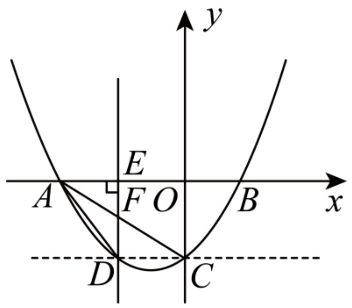
则$DF=-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\right)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x=-\frac{1}{3}\left(x+2\right)^2+\frac{4}{3}$；

当$x=-2$时，DF有最大值，为$DF=\frac{4}{3}$，

把$x=-2$代入$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}$，得：$y=-\frac{8}{3}$，

∴$D\left(-2,-\frac{8}{3}\right)$，

∴线段DF长度得最大值是$\frac{4}{3}$，此时D的坐标是$D\left(-2,-\frac{8}{3}\right)$；



（3）解：根据题意，$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=EF:FD$，

当$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=1:2$时，有：$\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x}=\dfrac{1}{2}$，

解得$x=-4$（舍去）；

当$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle AFD}=2:1$时，有：$\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}x}=2$，

解得：$x_1=-1$，$x_2=-4$（舍去）；

综上所述：当$E(-1,0)$时，满足条件．

【点睛】本题主要考查了二次函数与一次函数的综合，求二次函数解析式，二次函数的最值，求一次函数解析式，解题的关键在于能够熟练掌握二次函数的相关知识．

7．A

【详解】本题考查了抛物线图像的平移，熟练掌握抛物线图像的平移方法是解题的关键．根据抛物线平移的方法：自变量加减左右移，函数值加减上下移，即可得到平移后的表达式．先确定抛物线$y=x^2$的顶点坐标为$(0,0)$，再根据点平移的规律得到平移后对应点的坐标为$(-2,-3)$，然后根据顶点式写出平移后的抛物线解析式．

【解答】解：抛物线$y=x^2$的顶点坐标为$(0,0)$，把点$(0,0)$向左平移 2 个单位，再向上平移 3 个单位长度所得对应点的坐标为$(-2,-3)$，

所以平移后的抛物线解析式为$y=(x+2)^2+3$．

故选：A．

8．$y=3(x+2)^2+1$

【分析】本题考查了二次函数图象平移，掌握图形平移规律是解题的关键，根据函数图象平移规律“左加右减（横轴），上加下减（纵轴）”，由此即可求解．

【详解】解：抛物线 $y=3x^2$ 向左平移 2 个单位得，$y=3\left(x+2\right)^2$，再向上平移 1 个单位得，

$y=3\left(x+2\right)^2+1$，

故答案为：$y=3\left(x+2\right)^2+1$ ．

9．(1)4

(2)8

【分析】本题考查了二次函数的定义、图象和性质，平移变换，待定系数法求函数解析式，能结合题意确定 m 的取值范围是解题的关键．

（1）根据二次函数的宝座求解即可；

（2）利用平移的性质得到平移后的函数解析式为 $y=-6x^2-n$，再代入点 $\left(0,-8\right)$，解方程即可求解；

【详解】（1）解：根据题意得，$\begin{cases} m-2=2 \\ -\left(m+2\right)\neq 0 \end{cases}$，

解得，$m=4$,

（2）解：由（1）得，$y=-6x^2$，

所以，将该函数图象向下平移 n 个单位得，$y=-6x^2-n$，

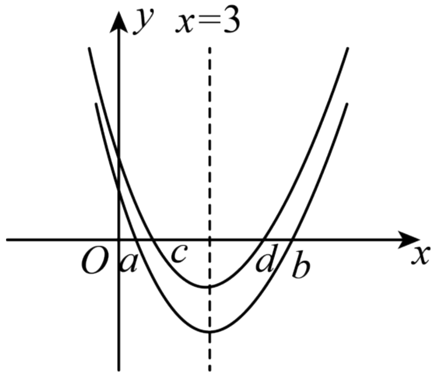
代入点 $\left(0,-8\right)$，得：$-n=-8$,

$\therefore n=8$

10．A

【分析】本题主要考查二次函数的性质和平移的性质，根据对称轴和抛物线与 x 轴交点的坐标位置，结合图象向上平移的特点，分 $m>0$ 和 $m<0$ 讨论即可．

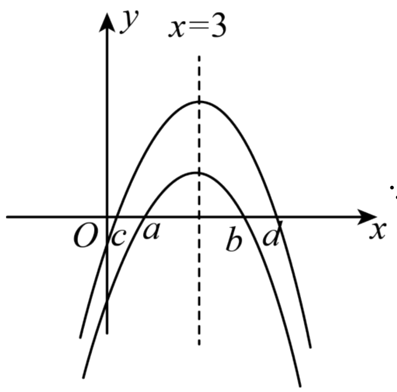
【详解】解：当 $m>0$ 时，如图所示：



$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$，

$\therefore a+b=c+d=6$，且 $b-a>d-c$；

当 $m<0$ 时，如图所示：



$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$，

$\therefore a+b=c+d=6$，且 $b-a<d-c$.

故选：A．

11．$y=x^2-3\sqrt{3}x+6$

【分析】本题考查了二次函数图像与几何变换，根据二次函数图像的对称性确定出顶点 C 的纵坐标是解题的关键，解题的关键是根据平移变换不改变图形的形状与大小确定二次项系数；先求出点A的坐标，再根据中位线定理可得顶点 C 的纵坐标，然后利用顶点坐标公式列式求出 b 的值，再求出点 D 的坐标，根据平移的性质设平移后的抛物线的解析式为 $y=x^2+mx+n$，把点A、D 的坐标代入进行计算即可得解.

【详解】解：令 $x=0$，则 $y=6$，

$\therefore$ 点 $A(0,6)$，$B(-b,6)$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=-\frac{b}{2}$，直线 OB 的解析式为 $y=-\frac{6}{b}x$，

$\because$ 抛物线的顶点 C 在直线 OB 上，

$\therefore y=3$，

$\therefore$ 顶点C的纵坐标为3，

即$\dfrac{4\times1\times6-b^2}{4\times1}=3$，

解得$b_1=2\sqrt{3}$，$b_2=-2\sqrt{3}$，

由图可知，$-\dfrac{b}{2}>0$，

$\therefore b<0$，

$\therefore b=-2\sqrt{3}$，

$\therefore$ 对称轴为直线$x=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 点D的坐标为$\left(\sqrt{3},0\right)$，

设平移后的抛物线的解析式为$y=x^2+mx+n$，

则$\begin{cases} n=6 \\ 3+\sqrt{3}m+n=0 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} m=-3\sqrt{3} \\ n=6 \end{cases}$，

所以$y=x^2-3\sqrt{3}x+6$.

故答案为：$y=x^2-3\sqrt{3}x+6$.

12．(1) $y=(x-1)^2-4$

(2)将二次函数$y=(x-1)^2-4$向左平移 3 个单位后所得图像经过坐标原点，则平移后的二次函数解析式为$y=\left(x+2\right)^2-4$，

【分析】本题主要考查了求二次函数解析式，二次函数图像的平移问题：

（1）把解析式设为顶点式，再利用待定系数法求解即可；

（2）设将二次函数$y=(x-1)^2-4$向左平移m个单位后所得图像经过坐标原点，则平移后的二次函数解析式为$y=\left(x-1+m\right)^2-4$，再代入原点坐标求解即可.

【详解】（1）解：设二次函数解析式为$y=a\left(x-1\right)^2-4$，

把$(2,-3)$代入$y=a\left(x-1\right)^2-4$中得：$a\left(2-1\right)^2-4=-3$，

解得$a=1$，

∴二次函数解析式为$y=(x-1)^2-4$；

（2）解：设将二次函数$y=(x-1)^2-4$向左平移m个单位后所得图像经过坐标原点，则平移后的二次函数解析式为$y=\left(x-1+m\right)^2-4$，

∴$\left(0-1+m\right)^2-4=0$，

解得$m=3$或$m=-1$（舍去），

∴将二次函数$y=(x-1)^2-4$向左平移3个单位后所得图像经过坐标原点，则平移后的二次函数解析式为$y=\left(x-1+3\right)^2-4=\left(x+2\right)^2-4$；

13．C

【分析】此题考查了二次函数的顶点式，根据顶点式写出顶点坐标即可得到答案．

【详解】解：∵抛物线$y=-\left(x-1\right)^2+2$，

∴该抛物线的顶点坐标是$\left(1,2\right)$，

故选：C．

14．　$\left(1,-4\right)$　$1\le k<3$

【分析】本题考查了二次函数的图象与性质，根据二次函数的性质进行求解即可，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键．

【详解】解：∵当$x=0$和$x=2$时，$y=-3$，

∴抛物线的对称轴为直线$x=1$，

∴由表格可知：该抛物线的顶点坐标是$\left(1,-4\right)$，

由表格可知抛物线与x轴的一个交点为$\left(-1,0\right)$，

∴抛物线与x轴的另一个交点为$\left(3,0\right)$，

当$-1<x\le k$时，总有$-4\le y<0$，

∴$1\le k<3$，

故答案为：$\left(1,-4\right)$，$1\le k<3$．

15．$a=-1$