2023年高考数学模拟试卷

注意事项

1．考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．

2．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用0．5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置．

3．请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符．

4．作答选择题，必须用2B铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．作答非选择题，必须用05毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效．

5．如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗．

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知抛物线$C:x^2=4y$,过抛物线C上两点A,B分别作抛物线的两条切线PA,PB,P为两切线的交点O为坐标原点若$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}=0$,则直线$OA$与$OB$的斜率之积为（　　）

A．$-\frac{1}{4}$ B．-3 C．$-\frac{1}{8}$ D．-4

2．已知点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$是函数$f\left(x\right)=a\sqrt{x}+bx^2$的函数图像上的任意两点，且$y=f\left(x\right)$在点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$处的切线与直线AB平行，则(　　)

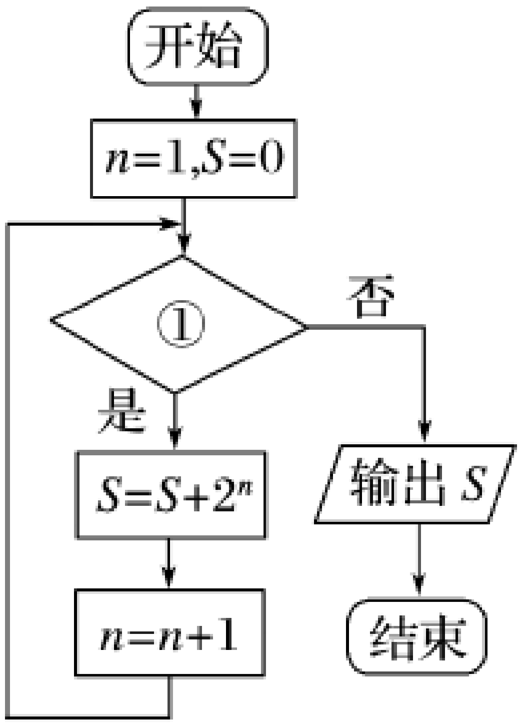
A．$a=0$，b为任意非零实数　B．$b=0$，a为任意非零实数

C．a、b均为任意实数D．不存在满足条件的实数a，b

3．关于圆周率π，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的浦丰实验和查理斯实验．受其启发，我们也可以通过设计下面的实验来估计π的值：先请全校m名同学每人随机写下一个都小于1的正实数对(x,y)；再统计两数能与1构成钝角三角形三边的数对(x,y)的个数a；最后再根据统计数a估计π的值，那么可以估计π的值约为（　　）

A．$\frac{4a}{m}$ B．$\frac{a+2}{m}$ C．$\frac{a+2m}{m}$ D．$\frac{4a+2m}{m}$

4．如图所示的程序框图输出的S是126，则①应为（　）



A．$n\le 5?$ B．$n\le 6?$ C．$n\le 7?$ D．$n\le 8?$

5．若函数$f(x)=\sin 2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数$g(x)$的图象，若函数$g(x)$在区间$[0,a]$上单调递增，则a的最大值为（　　）.

A．$\frac{\pi}{2}$ B．$\frac{\pi}{3}$ C．$\frac{5\pi}{12}$ D．$\frac{7\pi}{12}$

6．已知集合A＝{y|y$=\sqrt{x^2-1}$}，B＝{x|y＝lg（x﹣2x2）}，则∁R（A∩B）＝（　　）

A．[0，$\frac{1}{2}$） B．（﹣∞，0）∪[$\frac{1}{2}$，+∞）

C．（0，$\frac{1}{2}$） D．（﹣∞，0]∪[$\frac{1}{2}$，+∞）

7．已知命题p:若$a<1$，则$a^2<1$，则下列说法正确的是（　　）

A．命题p是真命题

B．命题p的逆命题是真命题

C．命题p的否命题是“若$a<1$，则$a^2\ge 1$”

D．命题p的逆否命题是“若$a^2\ge 1$，则$a<1$”

8．已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\frac{\cos 2\beta}{1-\sin 2\beta}$，则（　　）

A．$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ B．$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

C．$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ D．$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$

9．一辆邮车从A地往B地运送邮件，沿途共有n地，依次记为A_1，A_2，…A_n（A_1为A地，A_n为B地）．从A_1地出

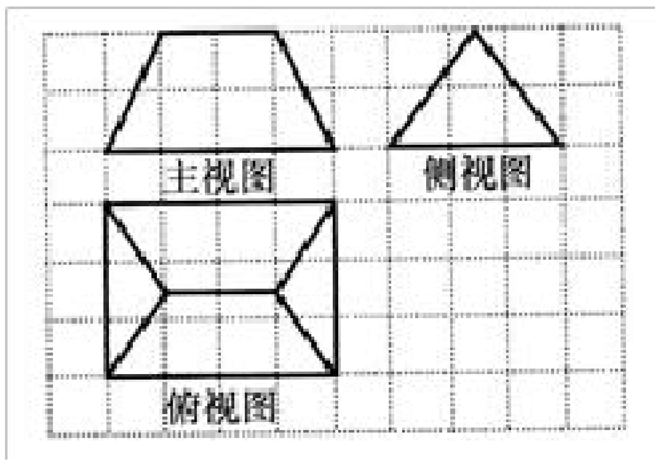
发时，装上发往后面$n-1$地的邮件各 1 件，到达后面各地后卸下前面各地发往该地的邮件，同时装上该地发往后面各地的邮件各 1 件，记该邮车到达A_1，A_2，…A_n各地装卸完毕后剩余的邮件数记为$a_k(k=1,2,\quad,n)$．则a_k的表达式为（　　）.

A．$k(n-k+1)$　B．$k(n-k-1)$　C．$n(n-k)$　D．$k(n-k)$

10. 已知直线l：$kx-y-3k+1=0$与椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$A$、$B$两点，与圆$C_2$：$(x-3)^2+(y-1)^2=1$交于$C$、$D$两点.若存在$k\in[-2,-1]$，使得$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，则椭圆$C_1$的离心率的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$　B．$[\frac{\sqrt{3}}{3},1)$　C．$(0,\frac{\sqrt{3}}{3}]$　D．$[\frac{\sqrt{6}}{3},1)$

11.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高二丈，问：积几何?”其意思为：“今有底面为矩形的屋脊状的楔体，下底面宽 3 丈，长 4 丈，上棱长 2 丈，高 2 丈，问：它的体积是多少?”已知1丈为 10 尺，该楔体的三视图如图所示，其中网格纸上小正方形边长为 1，则该楔体的体积为（　）



A．10000 立方尺　　B．11000 立方尺
C．12000 立方尺　　D．13000 立方尺

12．已知$\triangle ABC$的面积是$\frac{1}{2}$,$AB=1$,$BC=\sqrt{2}$,则$AC=$（　）

A．5　B．$\sqrt{5}$或 1　C．5 或 1　D．$\sqrt{5}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．设函数$f(x)=\begin{cases}e^x+2019,x\le 0\\2020,x>0\end{cases}$，则满足$f(x^2-4)>f(-3x)$的$x$的取值范围为________.

14. 已知抛物线$C:y^2=16x$的对称轴与准线的交点为M,直线$l:y=kx-4k$与C交于A,B两点,若$|AM|=4|BM|$,则实数$k=$__________.

15．在平面直角坐标系xOy中，已知圆$C:x^2+(y-1)^2=1$，圆$C':(x+2\sqrt{3})^2+y^2=6$．直线$l:y=kx+3$与圆C相切，且与圆C'相交于A，B两点，则弦AB的长为_________

16．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且$2a\cos C=b\cos C+c\cos B$，则$C=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{ax^2+x}{x+1}-\ln(x+1)(a>0)$，且曲线$y=f\left(x\right)$在$x=1$处的切线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+b$.

（1）求$f\left(x\right)$的极值点与极值.

（2）当$k\ge\dfrac{1}{2}$，$x\in\left[0,+\infty\right)$时，证明：$f\left(x\right)\le kx^2$.

18．（12 分）已知关于x的不等式$|x+1|-|x-3|\ge|m-2|+m$有解.

（1）求实数m的最大值t；

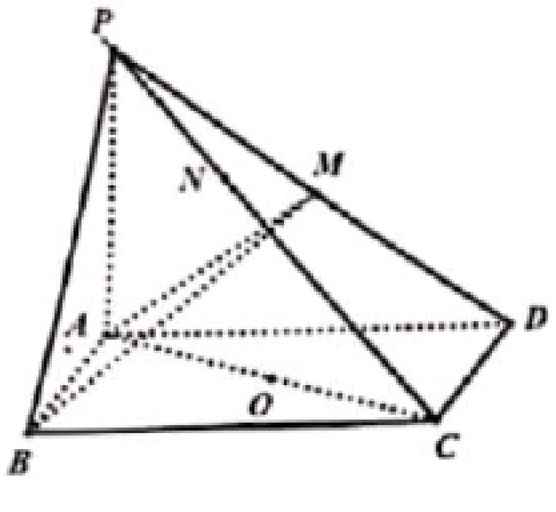
（2）若a，b，c均为正实数，且满足$a+b+c=t$.证明：$a^3b+b^3c+c^3a\ge 3abc$.

19．（12 分）设函数$f(x)=6\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x$.

（1）求$f(\dfrac{\pi}{12})$的值；

（2）若$x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$，求函数$f(x)$的单调递减区间.

20．（12 分）中国古代数学经典《数书九章》中，将底面为矩形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为“阳马”，将四个面都为直角三角形的四面体称之为“鳖臑”.在如图所示的阳马$P-ABCD$中，底面 ABCD 是矩形.$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AD=2$，$AB=\sqrt{2}$，以AC的中点 O 为球心，AC 为直径的球面交 PD 于 M（异于点 D），交 PC 于 N（异于点 C）.



（1）证明：$AM\perp$平面PCD，并判断四面体 MCDA 是否是鳖臑，若是，写出它每个面的直角（只需写出结论）；若不是，请说明理由；

（2）求直线ON与平面ACM所成角的正弦值.

21．(12 分)在平面直角坐标系xOy中，以O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线C：$\rho\cos^2\theta=4a\sin\theta\ (a>0)$，

直线l的参数方程为$\begin{cases} x=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数）.直线$l$与曲线$C$交于$M$，$N$两点.

（I）写出曲线C的直角坐标方程和直线l的普通方程（不要求具体过程）；

（II）设$P(-2,-1)$，若$|PM|$，$|MN|$，$|PN|$成等比数列，求a的值.

22.（10 分）已知$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x+2\sin(\dfrac{3\pi}{2}+x)\sin(\pi-x)$，$x\in\mathbf{R}$，

（1）求$f(x)$的最小正周期及单调递增区间；

（2）已知锐角ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$f(A)=-\sqrt{3}$，$a=3$，求BC边上的高的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

设出 A，B 的坐标，利用导数求出过 A，B 的切线的斜率，结合$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，可得 x1x2＝－1．再写出 OA，OB 所在直线的斜率，作积得答案．

【详解】

解：设 A（$x_1,\dfrac{x_1^2}{4}$），B（$x_2,\dfrac{x_2^2}{4}$），

由抛物线 C：x2＝1y，得$y=\dfrac{1}{4}x^2$，则 y′$=\dfrac{1}{2}x$．

∴$k_{AP}=\dfrac{1}{2}x_1$，$k_{PB}=\dfrac{1}{2}x_2$，

由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，可得$\dfrac{1}{4}x_1x_2=-1$，即 x1x2＝－1．

又$k_{OA}=\dfrac{x_1}{4}$，$k_{OB}=\dfrac{x_2}{4}$，

∴$k_{OA}\cdot k_{OB}=\dfrac{x_1x_2}{16}=\dfrac{-4}{16}=-\dfrac{1}{4}$．

故选：A．

点睛：（1）本题主要考查抛物线的简单几何性质，考查直线和抛物线的位置关系，意在考查学生对这些基础知识的掌握能力和分析推理能力.(2)解答本题的关键是解题的思路，由于与切线有关，所以一般先设切点，先设A$(2a,a^2)$,B$(2b,b^2)$, $a\neq b$,再求切线PA,PB方程，

求点P坐标，再根据$\overline{PA}.\overline{PB}=0$得到$ab=-1,$最后求直线$OA$与$OB$的斜率之积.如果先设点P的坐标，计算量就大一些.

2、A

【解析】

求得$f\left(x\right)$的导函数，结合两点斜率公式和两直线平行的条件：斜率相等，化简可得$a=0$，b为任意非零实数.

【详解】

依题意$f'\left(x\right)=\frac{a}{2\sqrt{x}}+2bx$，$y=f\left(x\right)$在点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$处的切线与直线AB平行，即有

$$\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}}+b\left(x_1+x_2\right)=\frac{a\sqrt{x_2}+bx_2^2-a\sqrt{x_1}-bx_1^2}{x_2-x_1}$$

$=\frac{a\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{x_2-x_1}+b\left(x_1+x_2\right)$，所以$\frac{a}{\sqrt{2\left(x_1+x_2\right)}}=\frac{a}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$，由于对任意$x_1,x_2$上式都成立，可得$a=0$，$b$为非零实数.

故选：A

【点睛】

本题考查导数的运用，求切线的斜率，考查两点的斜率公式，以及化简运算能力，属于中档题.

3、D

【解析】

由试验结果知m对0～1之间的均匀随机数x,y，满足$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$,面积为1,再计算构成钝角三角形三边的数对$(x,y)$，满足条件的面积，由几何概型概率计算公式，得出所取的点在圆内的概率是圆的面积比正方形的面积，即可估计π的值.

【详解】

解：根据题意知，m名同学取m对都小于1的正实数对$\left(x,y\right)$，即$\begin{cases}0<x<1\\0<y<1\end{cases}$,

对应区域为边长为1的正方形，其面积为1,

若两个正实数x,y能与1构成钝角三角形三边，则有$\begin{cases}x^2+y^2<1\\x+y>1\\0<x<1\\0<y<1\end{cases}$，

其面积 $S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$；则有 $\frac{a}{m}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$，解得 $\pi=\frac{4a+2m}{m}$

故选：D.

【点睛】

本题考查线性规划可行域问题及随机模拟法求圆周率的几何概型应用问题．线性规划可行域是一个封闭的图形，可以直接解出可行域的面积；求解与面积有关的几何概型时，关键是弄清某事件对应的面积，必要时可根据题意构造两个变量，把变量看成点的坐标，找到试验全部结果构成的平面图形，以便求解．

4、B

【解析】

试题分析：分析程序中各变量、各语句的作用，再根据流程图所示的顺序，可知：该程序的作用是累加 S=2+22+…+2n 的值，并输出满足循环的条件．

解：分析程序中各变量、各语句的作用，

再根据流程图所示的顺序，可知：

该程序的作用是累加 S=2+22+…+2n 的值，

并输出满足循环的条件．

∵S=2+22+…+21=121，

故①中应填 n≤1．

故选 B

点评：算法是新课程中的新增加的内容，也必然是新高考中的一个热点，应高度重视．程序填空也是重要的考试题型，这种题考试的重点有：①分支的条件②循环的条件③变量的赋值④变量的输出．其中前两点考试的概率更大．此种题型的易忽略点是：不能准确理解流程图的含义而导致错误．

5、C

【解析】

由题意利用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的单调性，求出 a 的最大值．

【详解】

解：把函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，

若函数 $g(x)$ 在区间 $[0$，$a]$ 上单调递增，

在区间 $[0$，$a]$ 上，$2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3}$，$2a-\frac{\pi}{3}]$，

则当 a 最大时，$2a-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，求得 $a=\frac{5\pi}{12}$，

故选：C．

【点睛】

本题主要考查函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换规律，正弦函数的单调性，属于基础题．

6、D

【解析】

求函数的值域得集合 A，求定义域得集合 B，根据交集和补集的定义写出运算结果．

【详解】

集合 A＝{y|y$=\sqrt{x^2-1}$}＝{y|y≥0}＝[0，+∞)；

B＝{x|y＝lg（x－2x2）}＝{x|x－2x2＞0}＝{x|0＜x$<\frac{1}{2}$}＝（0，$\frac{1}{2}$），

∴A∩B＝（0，$\frac{1}{2}$），

∴∁R（A∩B）＝（－∞，0]∪[$\frac{1}{2}$，+∞）.

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关集合的问题，涉及到的知识点有函数的定义域，函数的值域，集合的运算，属于基础题目.

7、B

【解析】

解不等式，可判断 A 选项的正误；写出原命题的逆命题并判断其真假，可判断 B 选项的正误；利用原命题与否命题、逆否命题的关系可判断 C、D 选项的正误.综合可得出结论.

【详解】

解不等式$a^2<1$，解得$-1<a<1$，则命题p为假命题，A 选项错误；

命题p的逆命题是“若$a^2<1$，则$a<1$”，该命题为真命题，B 选项正确；

命题p的否命题是“若$a\geq 1$，则$a^2\geq 1$”，C 选项错误；

命题p的逆否命题是“若$a^2\geq 1$，则$a\geq 1$”，D 选项错误.

故选：B.

【点睛】

本题考查四种命题的关系，考查推理能力，属于基础题.

8、C

【解析】

利用二倍角公式,和同角三角函数的商数关系式,化简可得$\tan\alpha=\frac{\cos 2\beta}{1-\sin 2\beta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$,即可求得结果.

【详解】

$$\tan\alpha=\frac{\cos 2\beta}{1-\sin 2\beta}=\frac{\cos^2\beta-\sin^2\beta}{\cos^2\beta+\sin^2\beta-2\sin\beta\cos\beta}=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right),$$

所以$\alpha=\frac{\pi}{4}+\beta$，即$\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$.

故选:C.

【点睛】

本题考查三角恒等变换中二倍角公式的应用和弦化切化简三角函数,难度较易.

9、D

【解析】

根据题意，分析该邮车到第k站时，一共装上的邮件和卸下的邮件数目，进而计算可得答案.

【详解】

解：根据题意，该邮车到第k站时，一共装上了$(n-1)+(n-2)+\ldots\ldots(n-k)=\dfrac{(2n-1-k)\times k}{2}$件邮件，

需要卸下$1+2+3+\ldots\ldots(k-1)=\dfrac{k\times(k-1)}{2}$件邮件，

则$a_k=\dfrac{(2n-1-k)\times k}{2}-\dfrac{k\times(k-1)}{2}=k(n-k)$，

故选：D.

【点睛】

本题主要考查数列递推公式的应用，属于中档题.

10、A

【解析】

由题意可知直线过定点即为圆心，由此得到A,B坐标的关系，再根据点差法得到直线的斜率k与A,B坐标的关系，由此化简并求解出离心率的取值范围.

【详解】

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，且线$l:kx-y-3k+1=0$过定点$(3,1)$即为C_2的圆心，

因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$，所以$\begin{cases}x_1+x_2=x_C+x_D=2\times3=6\\y_1+y_2=y_C+y_D=2\times1=2\end{cases}$，

又因为$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$，所以$b^2\left(x_1^2-x_2^2\right)=-a^2\left(y_1^2-y_2^2\right)$，

所以$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$，所以$k=-\dfrac{3b^2}{a^2}\in[-2,-1]$，

所以$\dfrac{b^2}{a^2}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，所以$\dfrac{a^2-c^2}{a^2}\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，所以$\left(1-e^2\right)\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，

所以$e\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$.

故选：A.

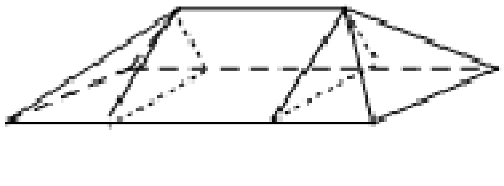
【点睛】

本题考查椭圆与圆的综合应用，着重考查了椭圆离心率求解以及点差法的运用，难度一般.通过运用点差法达到“设而不求”的目的，大大简化运算.

11、A

【解析】

由题意，将楔体分割为三棱柱与两个四棱锥的组合体，作出几何体的直观图如图所示：



沿上棱两端向底面作垂面，且使垂面与上棱垂直，
则将几何体分成两个四棱锥和 1 个直三棱柱，

则三棱柱的体积$V_1=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times 2=6$，

四棱锥的体积$V_2=\frac{1}{3}\times 1\times 3\times 2=2$，

由三视图可知两个四棱锥大小相等，$\therefore V=V_1+2V_2=10$立方丈$=10000$立方尺.

故选 A.

【点睛】本题考查三视图及几何体体积的计算，其中正确还原几何体，利用方格数据分割与计算是解题的关键.

12、B

【解析】

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin B=\frac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$

$\therefore \sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

①若B为钝角，则$\cos B=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，由余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2\cos B\cdot AB\cdot BC$，

解得$AC=\sqrt{5}$；

②若B为锐角，则$\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，同理得$AC=1$.

故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、$(1,+\infty)$

【解析】

当$x\le 0$时，函数单调递增，当$x>0$时，函数为常数，故需满足$x^2-4>-3x$，且$-3x<0$，解得答案.

【详解】

$f(x)=\begin{cases}e^x+2019, x\le 0\\ 2020, x>0\end{cases}$，当$x\le 0$时，函数单调递增，当$x>0$时，函数为常数，

$f\left(x^2-4\right)>f(-3x)$需满足$x^2-4>-3x$，且$-3x<0$，解得$x>1$.

故答案为：$(1,+\infty)$.

【点睛】

本题考查了根据函数单调性解不等式，意在考查学生对于函数性质的灵活运用.