行列式的计算方法

摘要：行列式计算的技巧性很强．理论上，任何一个行列式都可以按照定义进行计算，但是直接按照定义计算而不借助于计算机有时是不可能的．本文在总结已有常规行列式计算方法的根底上，对行列式的计算方法和一些技巧进行了更深入的探讨．总结出“定义法”、“化三角形法”、“滚动消去法”、“拆分法”、“加边法”、“归纳法”、“降级法”、“特征值法”等十几种计算技巧和途径．
关键词： 行列式 计算方法

行列式是研究某些数的“有规”乘积的代数和的性质及其计算方法.它起源于解线性方程，以后逐步地应用到数学的其它领域.行列式的计算通常要根据行列式的具体特点,采用相应的计算方法.这里介绍几种常见的,也是行之有效的计算方法.

1. 对角线法那么

对角线法那么是行列式计算方法中最为简单的一种，记忆起来很方便，但它只适用于二阶和三阶行列式，四阶及以上的行列式就不能采用此方法．

2. 定义法

根据行列式定义可知，如果所求的行列式中含的非零元素特别少(一般不多于$2n$个)，可以直接利用行列式的定义求解，或者行列式的阶数比拟低(一般是2阶或者3阶）．如果对于一些行列式的零元素(假设有)分布比拟有规律，如上(下）三角形行列式以及含零块形式的行列式可以考虑用定义法求解．

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

这是一个四级行列式，在展开式中应该有$4!=24$项．但是由于出现很多的零，所以不等于零的项数就大大减少了．我们具体地来看一下．展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然，如果$j_1\neq 4$，那么$a_{1j_1}=0$，从而这个项就等于零．因此只须考虑$j_1=4$的那些项;同理，只需考虑$j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$这些列指标的项．这就是说，行列式中不为零的项只有$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$这一项，而$\tau(4321)=6$，这一项前面的符号应该是正的．

所以

$$原式=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

3. 化为三角形计算法

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 26 & -39 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & -13 & 25 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = -312$$

这个例子尽管简单，但化三角形这一方法，在计算行列式中占有十分重要的地位,而化为三角形的方法又有很多种，下面介绍的 1、2、3、4 这三种都可以作为化三角形的几种手段，当然它们除化为三角形外，还有其它的作用.

3.1 各行(或列)加减同一行(或列)的倍数

适用于加减后某一行〔列〕诸元素有公共因子或者三角形的情形

例 3 计算行列式

$$d = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

解：当 $n \geq 3$ 时，各列减去第一列

得：

$$d = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1(y_2-y_1) & \cdots & x_1(y_n-y_1) \\ 1+x_2y_1 & x_2(y_2-y_1) & \cdots & x_2(y_n-y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & x_n(y_2-y_1) & \cdots & x_n(y_n-y_1) \end{vmatrix} = 0$$

之所以等于零，是因为有两列成比例.

另外，当 $n=2$ 时，

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

这个例子还附带说明，有时题目并没有指定级数，而行列式之值与级数有关时，还需进行讨论说明.

3.2 各行(或列)加到同一行(或列)上去

适用于各列(行)诸元素之和相等的情况.

例 4 计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：把所有各列都加到第一列上去，
得：

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

3.3 逐行(或列)相加减

有一些行列式能通过逐行相加、减得到很多的零。这样就使得行列式计算变得简便的多.

例 5 计算行列式

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：从第一列开始，每列乘以 2 加到后一列，
得：

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1}+1 & 2^n+3 & 2^{n+1}+6 \\ 0 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}+1 & 2^n+3 \end{vmatrix}$$

再将最后一行乘以〔-2〕，加到倒数第二行，其余行都不变，得：

$$D_{n+2}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} & 2^{n-1}+1 & 2^n+3 \end{vmatrix}$$

按最后一列展开，得

$$D_{n+2}=(2^n+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3(2^n+3)$$

3.4 行(列)归一法

先把某一行(列)全部化为 1，再利用该行(列)以及行列式的性质将原行列式化为三角形行列式，从而求出行列式的值.

例 6 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解：它的特点是各列元素之和为$(n-1)a+x$，因此把各行都加到第一行，然后第一行再提出$(n-1)a+x$，得

$$D=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

将第一行乘$-a$分别加到其余各行，化为三角形行列式，那么

$$D=[(n-1)a+x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}$$

4. 特殊行列式

4.1 爪型行列式

形如：

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_n & \cdots & b_2 & b_1 & a_0 \\ & & & a_1 & c_1 \\ & & a_2 & & c_2 \\ & \iddots & & & \vdots \\ a_n & & & & c_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_n & & & & a_n \\ \vdots & & & \iddots & \\ c_2 & & a_2 & & \\ c_1 & a_1 & & & \\ a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_2 & & b_2 \\ & & & a_1 & b_1 \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

的行列式，称为爪型行列式．这种形式的行列式主要是利用对角线上的元素消去“横线”或“竖线”，化为三角形行列式再计算．

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & & & \\ c_2 & & a_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix}(a_i \neq 0(i=1,2,\cdots n))$$

解 当 $a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$ 时，将第 i+1 列乘以 $-(\frac{c_i}{a_i})(i=1,2,\cdots n)$ 后都加到第 1 列，得三角型行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i} & b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{n}a_j(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i})$$

例 8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+y & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}$$

分析：一般除主对角线上的元素，其余元素全部相同的行列式都可以化为爪型行列式，利用例 6 结论计算其值．

解

$$\text{D} \xlongequal{c_i+(-1)c_1} \begin{vmatrix} 2+x & -x & -x & -x \\ 2 & -x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & y & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$$

$$=\{(2+x)-[2\cdot\frac{(-x)}{(-x)}+2\cdot\frac{(-x)}{y}+2\cdot\frac{(-x)}{(-y)}]\}\cdot(-x)\cdot y\cdot(-y)=x^2y^2$$

4.2 三对角线型行列式

形如：$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ c_1 & b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & b_3 & a_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$ 的 n 阶行列式，是指主对角线上元素与主对角线上方和下方第一条次对角线上元素不全为零而其余元素全为零的行列式， 称为三对角线型行列式．这类行列式的计算可以直接展开得到两项递推关系式，然后变形进行两次递推，或利用第二数学归纳法证明．

例 9 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & & & \\ 1 & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} (a \neq b)$$

解 按第一行展开得

$$D_n = (a+b)D_{n-1} + ab(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & ab & & & \\ & a+b & ab & & \\ & 1 & a+b & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & ab \\ & & & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

变形 $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$, 由于

$$D_1 = a+b, D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2,$$

从而利用上述递推公式得

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1) = b^n$$

故有

$$\begin{aligned} D_n &= aD_{n-1} + b^n = a(aD_{n-2} + b^{n-1}) + b^n = a^2 D_{n-2} + ab^{n-1} + b^n \\ &= \cdots = a^{n-1}D_1 + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n = a^n + a^{n-1}b + \cdots ab^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

例 10 证明

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos a & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos a & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos a & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos a \end{vmatrix} = \cos na$$

解 按第 n 行展开得

$$D_n = 2\cos a D_{n-1} + (-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} \cos a & 1 & & & \\ 1 & 2\cos a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2\cos a & 0 \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cos a D_{n-1} - D_{n-2}$$

采用第二数学归纳法证明

$n=1$ 时，$D_1 = \cos a$，结论成立．设 $n \le k$ 时，结论成立．那么当 $n = k+1$ 时，有

$$D_{k+1} = 2\cos a D_k - D_{k-1} = 2\cos a \cos ka - \cos(k-1)a = \cos(k+1)a,$$

故有归纳假设知 $D_n = \cos na$

4.3 Hessenberg 型行列式

形如：

$$\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ b_1 & a_1 & & & \\ & b_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b_n & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_n & b_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_2 & b_2 & \\ & & & a_1 & b_1 \\ c_n & \cdots & c_2 & c_1 & a_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_2 & c_1 & a_0 \\ & & & a_1 & b_1 \\ & & a_2 & b_2 & \\ & \ddots & \ddots & & \\ a_n & b_n & & & \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} & & & b_n & a_n \\ & & \ddots & \ddots & \\ & b_2 & a_2 & & \\ b_1 & a_1 & & & \\ a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

的行列式，即除一对角线及其相邻的一直线和最边上的一行或一列这三条直线外, 其余元素全为零的三线型行列式，称为 Hessenberg 型行列式．这一类行列式可以直接展开得到递推公式，也可利用行列式性质化简并降阶．

例 11 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & & & \\ & x & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

解 按第一列展开得

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & & & \\ x & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n$$

于是

$$\begin{aligned} & D_n = xD_{n-1} + a_n = (xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2 D_{n-2} + a_{n-1}x + a_n \\ & = \cdots = x^{n-1}D_1 + a_2 x^{n-2} + \cdots \; a_{n-1}x + a_n = x_n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \end{aligned}$$

例 12 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&-1&&&&\\&2&-2&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&n-2&-(n-2)&\\&&&&n-1&-(n-1)\end{vmatrix}$$

解 将第$1,2,\cdots,n-1$列加到第n列，得

$$\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&\frac{n(n+1)}{2}\\1&-1&&&&\\&2&-2&&&\\&&\ddots&\ddots&&\\&&&n-2&-(n-2)&\\&&&&n-1&0\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}1&-1&&\\&2&\ddots&\\&&\ddots&-(n-2)\\&&&n-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\frac{(n+1)!}{2}$$

4.4 两线形行列式

例 13　计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\0&a_2&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}\\b_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

解：

按第 1 列展开得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b_{n-1}\\0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}+b_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}b_1&0&\cdots&0\\a_2&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b_{n-1}\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$$

结论对于形如：

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\0&a_2&b_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}\\b_n&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0&b_n\\b_1&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\0&0&\cdots&b_{n-1}&a_n\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}a_1&0&\cdots&0&b_1\\0&a_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\b_2&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&0&\cdots&b_1&a_1\\0&0&\cdots&a_2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b_{n-1}&a_{n-1}&\cdots&0&0\\a_n&0&\cdots&0&b_n\end{vmatrix}$$

等的“两线形的行列式”可以直接展开降阶.

4.5 利用范德蒙行列式计算

范德蒙行列式是一类特殊的行列式，利用范德蒙行列式公式计算某些行列式时，要求行列式必须具有范德蒙行列式的特点，或类似于范德蒙行列式的特点，这样也可以将所给的行列式化为范德蒙行列式，然后再利用公式计算出结果.

例 14 设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$.用线性方程组的理论证明，假设是 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根，那么 $f(x)$ 为零多项式.

证明：设 $a_1,a_2,\cdots a_{n+1}$ 为 $f(x)$ 的根，且 $a_i\neq a_j(i\neq j)$.

那么将根代入多项式得到如下线性方程组：

$$\begin{cases} c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_na_1^n=0 \\ c_0+c_1a_2+c_2a_2^2+\cdots+c_na_2^n=0 \\ \\ c_0+c_1a_{n+1}+c_2a_{n+1}^2+\cdots+c_na_{n+1}^n=0 \end{cases}$$

以 $c_0,c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为未知量，那么线性方程组的系数矩阵为：

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n+1}(a_i-a_j)\neq 0$$

因为齐次线性方程组的系数矩阵不为 0，故系数矩阵只有零解，即：

$$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$$

所以 $f(x)$ 为零多项式.

5. 降阶法

5.1 一般降阶法

根据行列式理论中的拉普拉斯定理, 行列式的计算可转化为 k 阶子式及其相应的代数余子式的乘积之和.但此方法计算量偏大, 仅适用于行列式中元素为 0 较多的情形. 同时, 涉及一些比拟复杂的、元素含文字或未知量的行列式, 仅用此方法是不够的.

例 15 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解：观察行列式，可以选择第二行展开，但是第二行有两个非零元素，先用性质将 -3 也化为零，即

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & 3 \\ -4 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -8 & -7 \\ 1 & -9 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 19 & -16 \\ 1 & -9 & 3 \\ 0 & -39 & 14 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 19 & -16 \\ -39 & 14 \end{vmatrix} = -358$$

5.2 利用公式降阶

公式 1 设 A，B 都是 n 阶方阵，那么有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |\ A \ + \ B\ |\cdot|\ A \ - \ B\ |$$

证明：由于

$$\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{bmatrix}$$

两边去行列式，得

$$\begin{vmatrix} E_n & 0 \\ -E_n & E_n \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} E_n & 0 \\ E_n & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |\ A+B\ |\cdot|\ A-B\ |$$

例 16 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

解 利用公式 1

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 2a \\ 2a & b \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -b & 0 \\ 0 & -b \end{vmatrix} = (b^2-4a^2)b^2$$

公式 2 设 A，B，C 均为 n 阶方阵，那么

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n^2}\cdot|\ C\ |\cdot|\ B\ |$$

证明：把拉普拉斯定理用于上式的后 r 行，在它的所有 n 阶子式中，除 $|\ C\ |$ 外，其余至少包含一列零向量，从而值为零．而 $|\ C\ |$ 的余子式为 $|\ B\ |$，且 C 位于整个矩阵的第 $n+1,n+2,\cdots,n+n$ 行，第 $1,2,\cdots,n$ 列，因此

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} = |\ C\ |\cdot(-1)^{s}\cdot|\ B\ |$$

其中
$$\begin{aligned} s &= (n+1)+(n+2)+\cdots(n+n)+(1+2+\cdots+n) \\ &= n^2+2(1+2+\cdots+n)=n^2+\text{偶数} \end{aligned}$$