

无穷级数练习题

无穷级数习题

一、填空题

1、设幂级数的收敛半径为 3，则幂级数的收敛区间为。

axnax(1),,,nnn0,n1,

2、幂级数的收敛域为。(21)nx, ,0n,

3、幂级数的收敛半径。x,nn(3)2, , n1,

4、幂级数的收敛域是。,, 1n0n,

5、级数的收敛域为。 ,nn4n,1

6、级数的和为。 ,n20n,

7、。 n,(0),2n1,

28、设函数 fxxx(), , , 的傅里叶级数展开式为 (),,,,,,x

a0, , (cossin) , 则其系数 b 的值为。 anxbnx,nn321n,

9、设函数 则其以为周期的傅里叶级数在点处的

fx(),x,,,20,,,x1, , x,,

敛于。

10、级数的和。 ,nnn , , (1)(2)n1,

11、级数的收敛域为。 ,nn,4n,1

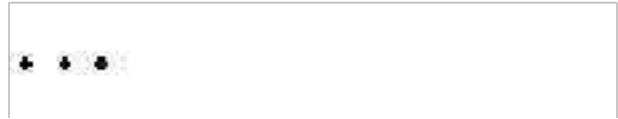
1)R,3 参考答案:1、 2、 3、 4、 5、 (2,4), (1,1), (0,4),

21212,,46、 7、 8、 9、 10、 11、 (0,4)422ln3,3

二、选择题

设常数 $a > 0$ ，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n-1}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}$ 是 ()。

(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 a 有关



2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则下列命题中正确的是 ()。

...

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 都收敛。

...

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 都收敛。

...

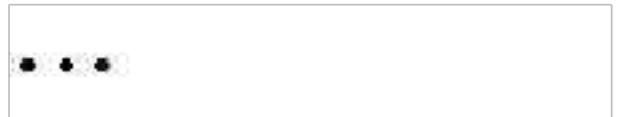
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的敛散性都不一定。

...

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 的敛散性都不一定。

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则下列结论正确的是 ()。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 收敛



(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

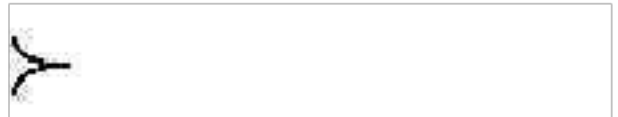
...

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n (\cos x)^n$ 是 ()。

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与取值有关

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cos^n x)^n$ (常数) 是 ()。



(A) 发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛性与 x 有关

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n)$

22. (A) 与都收敛. (B) 与都发散.

(C) 收敛而发散. (D) 发散而收敛.

2

7. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2)$ 等于 ().

(A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

28. 设函数 $f(x) = \sin x$, 则 $\int_0^{\pi} f(x) dx$ 等于 ().

,

$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$



11. 其中 $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$, 则 $S(0)$ 等于 ().

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2)$ 等于 ().



15. 其中 $\int_0^{\pi} \cos x dx = 0$, 则 $S(0)$ 等于 ().

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

,

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必收敛的级数为 ().

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4$.

11. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2)$ 等于 ().

(A) 3. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

,

12. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2)$ 等于 ().

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 收敛. (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛. (C) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ 收敛. (D) 收敛.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ 若在 $x=1$ 处收敛, 则此级数在 $x=3$ 处 ().
 (A) 条件收敛. (B) 绝对收敛. (C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

3

4. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2 , 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 的收敛半径为 ()

(A) 5. (B) (C) (D) .353

参考答案:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

C B D C C C B C D C D B A

三、解答题

1. 设在点 x_0 的某一邻域内具有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = f''(x_0)/2 > 0$, 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 绝对收敛。

【分析一】 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = f''(x_0)/2 > 0$ 表明 $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$ 是比 $(x-x_0)^2$ 高阶的无穷小, 若能进一步确定 $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o((x-x_0)^2)$

是 $(x-x_0)^p$ 的阶或高于 $(x-x_0)^2$ 的阶的无穷小, 从而也是 $(x-x_0)^n$ 的阶或高于 $(x-x_0)^n$ 的阶的无穷小, 这就证明了 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 绝对收敛。

【证明一】由 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = f''(x_0)/2 > 0$ 及 $f(x)$ 的连续性。再由在 x_0 邻域有二阶连续导数及洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o((x-x_0)^2)$$

由函数极限与数列极限的关系 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = 0$, 故

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ 因收敛收敛, 即绝对收敛。

1. 设正项数列单调减小，且发散，试问级数是否收敛，

解：设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为所给级数，由题设知 $a_n > 0$ 且 a_n 单调减小，又 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ，故级数发散。

4.

【分析与求解】因单调下降有下界 0，故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ 。若 $a > 0$ ，由莱布

尼兹法则，并错级数收敛，与假设矛盾，于是 $a = 0$ 。

现在对正项级数可用根值判别法：因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1} - a_n} = 1$ ，

所以原级数收敛。

2. 求幂级数收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性。

解：直接用求收敛半径的公式，先求

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2/3)^n} = 2/3$ ，于是收敛半径为 $R = 3/2$ ，收敛区间为 $(-3/2, 3/2)$ 。

【分析与求解】直接用求收敛半径的公式，先求

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(2/3)^n} = 2/3$ ，于是收敛半径为 $R = 3/2$ ，收敛区间为 $(-3/2, 3/2)$ 。

于是收敛半径，收敛区间为 $(-3/2, 3/2)$ 。

当 $x = 3/2$ 时，当时是正项级数： $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$ ，

收敛，而当 $x = -3/2$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} (-2/3)^n$ ，



收敛，即时原幂级数收敛。



当 $x = 3/2$ 时，当时是变号级数，我们用分解法讨论它的敛发散。

$\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n$ ，

收敛，故原级数收敛。

2.

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n x^n$ 的收敛区间，并讨论端点处的收敛性。

5.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{21(1)^{n+1} + 31^n}{3^n}$ 收敛，又收敛，收敛，即 $x > 3$

时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2)^{3(2)^{11n}}}{n}$

原幂级数收敛。

3693nxxxx4、(1) 验证函数 $y(x)$ 满足微分方程

$y'' + y' + y = e^{-x} - 3x$



$y(x) = e^{-x} - 3x$

(2) 利用(1)的结果求幂级数的和函数。

【分析与求解】

(1) 首先验证该幂级数的收敛区间是 $x > 3$ 。这是缺项幂级数，令 $t = x - 3$ ，

原级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(3!)^n} t^{3n}$

1

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3(n+1))!}{(3n)!} t^{3(n+1)}$ (33) (32) (31)

$n(3)!$

，从而时原级数收敛。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3(n+1))!}{(3n)!} t^{3(n+1)}$ ，

其次，在收敛区间内对幂级数可以逐项求导任意次，这里要求逐项求导两次：

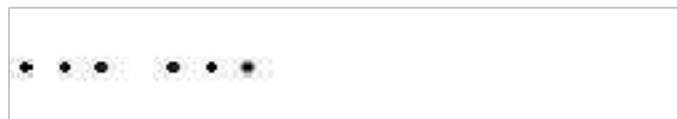
$y'' + y' + y = e^{-x} - 3x$ ， $y(x) = e^{-x} - 3x$

，于是 $y(x) = e^{-x} - 3x$

$y(x) = e^{-x} - 3x$ ， $y'' + y' + y = e^{-x} - 3x$

级数的线性性质 $y(x) = e^{-x} - 3x$

$y(x) = e^{-x} - 3x$



x (收敛级数与它任意添加括号后的级数有相同的和) $y(x) = e^{-x} - 3x$

3n,x(2) 因为幂级数的和函数满足微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 0$

$y(0) = 1, y'(0) = 0$

, 又知 $y(0) = 1, y'(0) = 0$

所以为求只须解二阶线性常系数微分方程的初值问题 $y'' + 3y' + 2y = 0$

2 该方程相应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

13 特征根为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 相应齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

1,x332 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

x 设非齐次方程的一个特解为 $y = Ae^{3x}$, 代入方程得 $9Ae^{3x} + 9Ae^{3x} + 6Ae^{3x} = 3e^{3x}$

$24A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$

1 A = 1/8

x,331x2 非齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{8} e^{3x}$

x,0 令, 由初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$

1,y(0)1, y'(0)0, $C_1 + C_2 + \frac{1}{8} = 1, -C_1 - 2C_2 + \frac{3}{8} = 0$

x3n,x231x2, $y = \frac{1}{8} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{8} e^{-2x}$ 因此 $y = \frac{1}{8} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{1}{8} e^{-2x}$

,1nn12,5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛区间与和函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$

,2nat 【分析与求解】 这是缺项幂级数, 令考察 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ 其中 $x = t^2$

1n,1 a, $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$

7



nnn 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

,n 的收敛半径为 1 原幂级数收敛半径为 1, 收敛区间为 $(-1, 1)$

下面求和函数:

2,,xnnnnnn,,12212(1)22(1)(1)(1),,,,,, fxxxxx,,121

xnnn,,110

, $1/n^2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^{n-1}$,

$2/n^2$, x^n , $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2$, $n=1$

, $2/n^2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$, x^{n-1} ,

, 注意 $f(0) = 0$, 积分两次得 $2 \int \int x^{n-1} dx dx$

x^{n-1} , $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x^{n-1}$, $t = 1$

x^{n-1} , $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x^{n-1}$, $t = 1$

$2/n^2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x^{n-1}$

$2/n^2$ 因此, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x^{n-1}$, $x = 1$, $1/2^2, x$

, $1/n^2$, 求级数的和。 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$,

【分析与求解】 先将级数分解:

$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$,

第二个级数是几何级数, 它的和已知

, $1/2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) = 1$

求第一个级数的和转化为幂级数求和, 考察

, $1/n^2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) x^{n-1}$,

8

, $1/2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$

$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$, $\pi^2/6$

, $1/2^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n) = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$

因此原级数的和 $A = \pi^2/6$

, 17、求级数的和。 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$,

【分析与求解】 先用分解法将原级数分解。

, $1/n^2$ 记 $A = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$

$\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$

要熟记五个简单函数的幂级数展开式，与此级数和有关的是，即 $\ln(1+x)$ ，

$\ln(1-x)$ ， $\ln(1+x^2)$ ， $\arctan x$ ， $\arctan x^2$ 。

于是 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} - \dots$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{12}}{6} + \frac{x^{14}}{7} - \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} - \frac{x^{20}}{10} + \dots$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13} - \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{17}}{17} - \frac{x^{19}}{19} + \dots$

$\arctan x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \frac{x^{18}}{9} - \frac{x^{22}}{11} + \frac{x^{26}}{13} - \frac{x^{30}}{15} + \frac{x^{34}}{17} - \frac{x^{38}}{19} + \dots$

因此 $\ln(1+x) + \ln(1-x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{2} + \frac{2x^6}{3} - \frac{2x^8}{4} + \frac{2x^{10}}{5} - \frac{2x^{12}}{6} + \frac{2x^{14}}{7} - \frac{2x^{16}}{8} + \frac{2x^{18}}{9} - \frac{2x^{20}}{10} + \dots$

将函数展为的幂级数。 $\ln(1+x)$

【分析与求解】容易展开。 $\ln(1+x)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$

9

1, 21, x

$\ln(1+x) + \ln(1-x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{2} + \frac{2x^6}{3} - \frac{2x^8}{4} + \frac{2x^{10}}{5} - \frac{2x^{12}}{6} + \frac{2x^{14}}{7} - \frac{2x^{16}}{8} + \frac{2x^{18}}{9} - \frac{2x^{20}}{10} + \dots$

$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{12}}{6} + \frac{x^{14}}{7} - \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} - \frac{x^{20}}{10} + \dots$

在幂级数的收敛区间内可逐项积分得

$\int \ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \arctan x + C$

$\ln(1+x^2) = 2x^2 - \frac{2x^4}{2} + \frac{2x^6}{3} - \frac{2x^8}{4} + \frac{2x^{10}}{5} - \frac{2x^{12}}{6} + \frac{2x^{14}}{7} - \frac{2x^{16}}{8} + \frac{2x^{18}}{9} - \frac{2x^{20}}{10} + \dots$

且收敛区间不变，当时，?式右端级数均收敛，而左端

$\ln(1+x)$ 在 $1, x$

$x, 1$ 连续，在无定义，因此

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$

111, x^9 、将函数 展开成的幂级数。 $\ln(1+x)$

【分析与求解】，先求的展开式

$f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

积分得 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ，试将展开成的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

的和。

【分析与求解】

关键是将展成幂级数，然后约去因子，再乘上并化简即

$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

10

可。直接将展开办不到，且易展开，即 $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$

积分得

$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

$\arctan(\arctan x) = \int_0^{\arctan x} \frac{1}{1+t^2} dt$

因为右端级数在 $x=1$ 时均收敛，又在 $x=1$ 连续，所以展开式在收敛区间端点 $\arctan x=1$ 成立。

21, x 现将?式两边同乘得

x

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$\arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$

$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

上式右端当时取值为 1，于是

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)$$

上式中令 $x=0$ ，得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2}$

将函数展成以为周期的傅里叶级数，并由此求级

数

的和。

【分析与求解】 按傅氏系数公式，先求的傅氏系数与 $f(x)$

$$a_n = \int_0^1 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

因为偶函数 $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

11

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \dots \right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$$

注意到在分段单调，连续且，于是有傅氏展开式 $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right)$$

为了求的值，上式中令 $x=0$ 得 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

111111 现

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ ，得 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

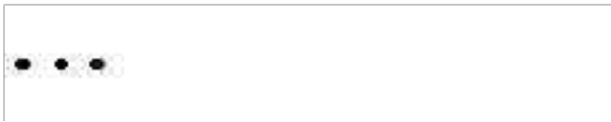
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

12、将函数展开成周期为 4 的余弦级数。 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

4 的周期延拓，于是得的傅

$f(x)$

氏系数:



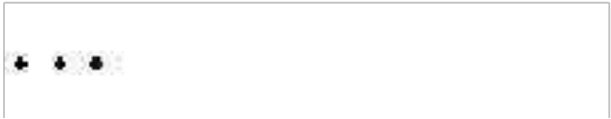
$b_n, 0(1,2,3). n$

$122nxn,,12,,afxdxxx dx() \cos(1) \cos n,,00112$

$2222nn,,,,,(1) \sin \sin x dx dx ,,00nn22,,$

$244n,n,,,, \cos((1)1)x 2222nn2,,0$

$,8,,nk,,21,,22,(21)k,k,1,2,3 = ,nk,2,,0,,$



12

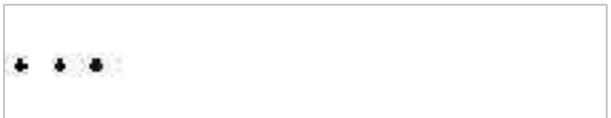
$222212 afxdxxx dx,,,,,(1)(1)0.0,,00220$

,2,2 由于(延拓后)在分段单调、连续且于是有展开式 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\pi x)$

,81(21)n,, fxxx()cos,0,2,,,,,22(21)2n,,n1,

,1nx13、求幂级数的收敛区间，并讨论该区间端关处的收敛

性。 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, , , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, , ,



1an,,, 解: 设 $0,1,2,,nnn$, , , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, ,

$2nnn1()$, , , , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, , , $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 3} \lim_{x \rightarrow 3}$, ,

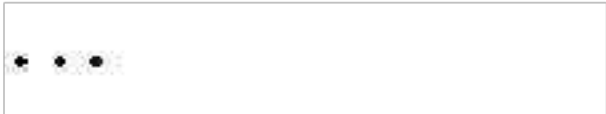
$11nn,,,,,xxx2a33$, , , $1nn$, , $3(1)(1)n$, , , $1()$ 3

? \mathbb{R}^3 收敛区间 $(3,3)$. ,

$n3111x,3$ 当时, $a,,,,,nnn2nn2$, , n , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, , , $1()3,1x,3$ 而发散原级

数在处发散。 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$,

$nnn,,(3)(1)21x,,3$ 当时, $a,,,,,nnnnnnn$, , $3(2)$, , , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$, ,



记 $u_n = \frac{1}{n^3}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\frac{n+1}{n})^3} = \frac{1}{8} < 1$

故原级数收敛

收敛，又收敛。

故原级数在收敛域内收敛

13

14、将函数 $f(x)$ 展开成幂级数。

分析 先将 $f(x)$ 分解成部分分式，再利用等比级数间接展开。

解: $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$

$= \frac{1}{-1(1-x)} - \frac{1}{-2(1-\frac{x}{2})}$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$

、将函数展开成幂级数，并求级数的和。

$f(x) = \arctan x$

分析 直接展开较困难，先将 $f(x)$ 求导，再逐项积分

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+i^2 x^2}$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+ix} + \frac{1}{1-ix} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-ix)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ix)^n \right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{n+1}}$

当时，收敛 (莱布尼兹判别法)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{n+1}}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/895233113211011222>