# 无穷级数练习题

无穷级数习题

一、填空题

,,nn1 ，1、设幂级数的收敛半径为3，则幂级数的收敛区间为 。

axnax(1),,,nnn0,n1,

,n2 、幂级数的收敛域为 。(21)nx ，,0n,

,n21n,R,3 、幂级数的收敛半径 。x,nn(3)2, ，n1,

n,x4 、幂级数的收敛域是 。 ,，1n0n,

2n,(2)x,5 、级数的收敛域为 。,nn4n,1

n,(ln3)6 、级数的和为 。,n20n,

,1n1,7 、 。n,(),2n1,

28、设函数 fxxx(), ，，的傅里叶级数展开式为(),,,,,x

,a0，，(cossin) ，则其系数b的值为 。anxbnx,nn321n,

,,,,x0,,1,,2,9 、设函数 则其以为周期的傅里叶级数在点处的

fx(),x,,,20,,,x1, ，x,,

敛于 。

,110、级数的和 。,nnn ，，(1)(2)n1,

2n,(2)x,11 、级数的收敛域为 。,nn,4n,1

,1,1)R,3 参考答案:1、 2、 3、 4、 5、 (2,4),(1,1),(0,4),

21212,,46、 7、 8、 9、 10、 11、(0,4)422ln3,3

二、选择题

1

,,an2n1 、设常数，而级数收敛，则级数是( )。 ,,0a(1),,,n21n1n,,, ，n(A)

发散 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 收敛与,有关

aa，aa,nnnn ，，n,1.2 ，则下列命题中正确的是( )。 2、设 q,p,nn22

, , ,

(A)若条件收敛，则与都收敛。 apq,,,nnn,n1n1n1,,

, , ,

(B)若绝对收敛，则与都收敛。 apq,,,nnn,n1n1n1,,

, , ,

(C)若条件收敛，则与的敛散性都不一定。 apq,,,nnn,n1n1n1,,

, , ,

(D)若绝对收敛，则与的敛散性都不定。 apq,,,nnn,n1n1n1,,

,,n1,an,,0,1,23 、设，若发散，收敛，则下列结论正确的是( )。

a(1),a,,nnnn1,n1,

,,,,(A) 收敛，发散. (B) 收敛，发散. aaaa,,,,21n2n2n21n,,N1,n1n1n1,,,

, ,

(C)收敛. (D) 收敛. ()aa ，()aa,,,212nn212nn,,n1n1,,

,sin()1n,4 、设为常数，则级数,是( ) (),,2nnn1,

(A)绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 收敛性与取值有关. ，

,,n,05 、级数(1)(1cos),,( 常数)是( ) ,n1n,

(A)发散. (B) 条件收敛. (C) 绝对收敛. (D) 收敛性与有关. ，

1n6、设，则级数 u,, ，(1)ln(1)nn

,,,,22uuuu(A) 与都收敛. (B) 与都发散. ,,,,nnnnn1n1n1n1,,,,

,,,,22uuuu(C) 收敛而发散. (D) 发散而收敛. ,,,,nnnnn1n1n0n1,,,,

2

,,,n1,7 、已知级数，则级数等于( )。 (1)2,5,,,aaa,,,nnn21,n1,nn11,,

(A)3. (B)7. (C)8. (D)9.

28、设函数，而 fxxx()(01),,,

,

, Sxbnx()sin,,,,,,,x,n1n,

• • •

11 其中 bfxnxdx,2()sin, , , 则 S(), 等于( )。 n,1,2,3n,02

1111,,(A). (B). (C). (D). 2442

10,,x,ax,,20()cos, , ,9、设 , Sxanxfx(),,,,, , ,x,,n22,,x211n,,,,x12

• • •

15afxnxdx,2()cos,S(), 其中 则等于( )。 (0,1,2,)n,n,02

1133,,(A). (B). (C). (D). 2244

,

10、设级数收敛，则必收敛的级数为 ,,nn1,

,,,,,un2n(A)(1),. (B)u. (C)()uu,.

(D)()uu , . ,,,,,n212nnnn1 , ,n1n,n1n1,n1,n,,

,,,n1,11 、已知级数， ，则级数等于( )。 (1)2,,aaa,,,215nnn,,n1n1,n1,,

(A)3. (B)7. (C)8. (D)9.

,

12、若级数 a 收敛，则级数( ) ,nn1,

,,,,aa ，，1nnn(A)a 收敛. (B)(1),a 收敛. (C)aa 收敛.(D) 收敛. ,,,,nnn1n ，2n111nn1,n,,,

,nx,1x,2ax(1),13 、若在处收敛，则此级数在处( )。 ,n0n,

(A) 条件收敛. (B) 绝对收敛. (C) 发散. (D) 敛散性不能确定.

3

2,,,1a5nnnn14 、设幂级数与的收敛半径分别为与，则幂级数的收敛半径为( ) axbxx,,,nn23b3n,1n0n1,,n

115..(A)5. (B) (C) (D) .353

参考答案：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

C B D C C C B C D C D B A

三、解答题

fx(),1 、设在点 x,0 的某一邻域内具有二阶连续导数，且，证明级数 lim0fx()x,0x,1f 绝对收敛。 (),nn1,

fx(),x,0 【分析一】lim0 表明时是比高阶的无穷小，若能进一步确定 fx()xx,0x

11pppp 是的阶或高于阶的无穷小，，从而也是的阶或高于阶的 f()fx()xp,1nn

,1 无穷小，这就证明了 f 绝对收敛。 (),nn1,

fx(),, 【证明一】由 lim0 及的连续性。再由在,fx()ff(0)0,(0)0,,fx()x,0x

x,0 邻域有二阶连续导数及洛必达法则

,,,fxfxfx()()()1,,,,,,limlimlim(0)f 2xxx,,,000xx222

fx()1,, , ,lim(0).f2x,0x2

1f()1n,, 由函数极限与数列极限的关系 ,,flim(0)x, ，,122n

,,,111,ff 因收敛收敛，即绝对收敛。 ()(),,,2nnnnn1n11,,,

,,1nna(1),a2 、设正项数列单调减小，且发散，试问级数是否收敛，

(),n,na ，111nn,,n

4

a【分析与求解】因单调下降有下界 0,，极限。若 a,0 ，由莱布

lim0aa,,,,nn, ，,x

,n 尼兹法则，并错级数收敛，与假设矛盾，于是。a,0(1),a,n1n,

,1n 现在对正项级数可用根值判别法: 因为 (),a ，11n,n

111nn lim()lim1,,, ， ,， ,，, ,nnaaa ，，，111nn

所以原级数收敛。

n,1x3 、求幂级数收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性。,nn ，,3(2)n1n,

【分析与求解】 直接用求收敛半径的公式，先求

11111n ,,,limlim.1nnn, ，,,， ,nnn，,3(2)32nnn ，,3(1())3

R,3 于是收敛半径，收敛区间为 (3,3).,

n,31x,3, 当时是正项级数: .,nnn ，,3(2)1n,

n,3111,, ，,n，而发散， (),nnn ，,nn3(2),n1

n,31x,3 发散，即时原幂级数发散。,,nnn ，,3(2)1n,

x,,3 当时是变号级数，我们用分解法讨论它的敛发散。

nnnnn,， ,,,31(1)(3(2)(2)1,, nnnn ，,， ,nn3(2)3(2)

nn,(1)21,,, nnnn ，,3(2)

n21

nnn,312，,n3(2)n 因 收敛， ,,,limlim0,(),nnn, ，,,， ,nn2，,n3(2)31n,n3

5

nnn,,,21(1),31,,　　收敛，又收敛,收敛，即 x,,3

时,,,nnnnnnn　，，,，,3(2)3(2)111n,n,n,

原幂级数收敛。

3693nxxxx4、(1)验证函数()1()满足微分方程

yxx,，，，，，，，，,，,，,，,3!6!9(3)!n

x,,,; yyye　，，，

3n,x (2)　利用(1)的结果求幂级数的和函数。,(3)!nn,0

【分析与求解】

3(1)首先验证该幂级数的收敛区间是这是缺项幂级数，令，则（,）.，,，，,tx,

3nn,,xt,,　　原级数 ,,(3)!(3)!nnnn,,00

1

1n，(3(1))!由 ,,limlim0nn,　，，,，，,1nnn，，，(33)(32)(31)

n(3)!

，从而时原级数收敛。,，,，,，,t(,)x,,,　　，，(,)

其次，在收敛区间内对幂级数可以逐项求导任意次，这里要求逐项求导两次:

31n,32n,,,xx,,,(),(),　　　　，　，　yxyxx,,,　，,(,).,,(31)!(32)!,,nnn,1n,1

,，,于是 yxyxyx()()()　，，

32313nnn,,,,,xxx,　　，，　,,,(32)!(31)!(3)!,,nnnnnn,,,110

32313nnn,,,xxx1()　，，，　级数的线性性质 ,(32)!(31)!(3)!,,nnnn,1

23456n,xxxxxx,，，，，，，，，,1()() x ,2!3!4!5!6!!nn,0

x ( 收敛级数与它任意添加括号后的级数有相同的和) ().,,,,,x,e

6

3n,x(2) 因为幂级数的和函数满足微分方程 yx(),(3)!nn,0

x,,, ? yyye ， ， ，.

, 又知 ? yy(0)1,(0)0.,,

所以为求只须解二阶线性常系数微分方程的初值问题?+? yx()

2 该方程相应的齐次方程的特征方程为 , , ， ， , 10.

13 特征根为 相应齐次方程的通解为 ,,,,,i1,222

1,x332 yecxcx, ， (cossin).1222

x 设非齐次方程的一个特解为，代入方程?得 yAe,,

xx,,, yyyAee, ， , ， , , , 3.

1 A,. ,3

x,331x2 非齐次方程?的通解为 ,yecxcxe, ， ， (cossin).12223

x,0 令，由初始条件? ，

1,yc(0)1,, ， ,1,23,cc,,,0. ,,123131,,ycc(0)0.,, ， ， , 12, 223,

x3n,,x231x2,, ， yxexe()cos 因此 () , , , , ， ,x,(3)!323nn,0

,1nn12,5 、求幂级数, ， x 的收敛区间与和函数 (1)(1)fx().,nn,(21)n1,

,2nat 【分析与求解】 这是缺项幂级数，令考察，其中 tx,,,n,n1

1n,1 a,, ， (1)(1).nnn,(21)

7

nnn 由 12a,lim1.a,,nn, ， ,n

,n 的收敛半径为 1 原幂级数收敛半径为 1，收敛区间为。 ,at,(1,1),,nn1,

下面求和函数:

2,,,xnnnnnn,,,12212(1)22()(1)(1)(1),,,,,,,, fxxxxxx,,,121 ,

xnnn,,,110

,1nn12, ， fxx,,()(1),2nn,(21)n1,

21n,,xn,1,()2(1),,, fx,,221,nn,1

,2nn12(1),,,,(1)x, fxx,,,()2(1),22 ， x1n1,

, 注意 ff(0)0,(0)0,, ， 积分两次得 22

xx1,,,fxftdtdtx,,, , ()()22arctan222,,00 ， t1

xxxt,()()2arctan2arctan2 fxftdttdtxxdt,,,,222,,,0001 ， t

2(1).x, ,, ， 2arctan1(1)xxnx

2x2 因此， fxfxfxxxnx()()()2arctan1(1)., ， ,， ,， 1221， x

,1n26 、求级数的和。 ,,， nn(1)(1),n2n0,

【分析与求解】先将级数分解:

,,,111nnn2 Annnn,,, ， ,,,,, ,(1)(1)(1)(1)().,,,nn222nnn000,,,

第二个级数是几何级数，它的和已知

,112n ,,,().,1230n,,,1()2

求第一个级数的和转化为幂级数求和，考察

,1nn(1)x,,,x (1), ， x10n,

8

, , , , 12， ， nnnn2,,, ,Sxnnxx()(1)(1)(1)(),,,,,,,,,3,,xx1(1) ， ，

nn00,, ， ，

,111124n ,,,,,,nnS(1)(1)().,2n122242730n, ， (1)2

4222 因此原级数的和 A,， ,. 27327

, 17、求级数的和。 ,n2n,2(1)n2,

【分析与求解】 先用分解法将原级数分解。

, , , 11111 记 AA,. A,,,,(),,,12nnn111 ， ， ， nnnn, ， ,,

2112(1)2(1)nnn222,,,

要熟记五个简单函数的幂级数展开式，与此级数和有关的是，即 1(1)nx ，

n,1,(1),nnxx 1(1) ，,(11).,,,x,nn,1

, , 11 于是 A,,,,1nn12 ， ， nn,2(1)2nn21,,

n,1,1(1)1111,,nnn ， ,,,,,,()1(1)12,n42424n,1

,,11 A,, ,,2nn1 ， nn，2(1)2nn23,,

nn,,11,,(1)1(1)1111,,nn2 ,,,,,,,,,()()(),,nn22222nn,,31

1115 ,,,,,,,1(1)12,nn 2288

53AAAn,,,,12. 因此 1284

1，xfx()arctan,8 、将函数展为的幂级数。 x1,x

,【分析与求解】容易展开。 fx()

1(1)(1)(1)2, , , ,,xx, fx(),,2221 ， x(1)(1)(1),, ， ， xxx21() ， 1,x

9

1 ， ,21， x

,12nnnn(1)t, 由 ，得 , , , , , , , , ,,tttt1(1)(1), ， t1n0,

,1nn2, ? fxxx,,,,()(1)(1).,2 ， x1n0,

在幂级数的收敛区间内可逐项积分得

,xx2nn, ftdttdt()(1),,,,,,000n,

nn,,(1)(1),,,2121nn ， ， fxfxx ? ()(0)(, ， , , ,,nn21421 ， ， 00nn,,

1，xx,,1x,,1 且收敛区间不变，当时，?式右端级数均收敛，而左端

fx()arctan, 在 1,x

x,1 连续，在无定义，因此

n,1(1) ， ,x,21n ， arctan,1,1), ， ,,xx,,1421, ， xn0n,

111，x9、将函数 展开成的幂级数。 fxnxx()1arctan, ， ,x412,x

【分析与求解】，先求的展开式

fxnxnxxx()1(1)1(1)arctan, ，, , , ,fx()442

111111, fx()1, ，，，2414121，, ，xxx

,,1111144nn(1)x, , ，,,,,,,xx 111,,224, ，,xxx21211nn01,,

41n，,,xxx4n,()(0)()(1)., ，, , , 积分得 fxffxdxtdtx,,,,0041 ，nnn,,11

2, 1，xarctan,0xx,,10 、设 试将展开成的幂级数，并求级数 fx()xfx(),2,

,1,0x,,

n,(1), 的和。 ,2n14,1n,

2【分析与求解】 关键是将展成幂级数，然后约去因子，再乘上并化简即

arctanxx1 ，x

10

, 可。直接将展开办不到，且易展开，即 arctanx(arctan)x

,1nn2, ? xxx,,,,(arctan)(1),1,,2 ，x1n0,

积分得

xn,,xn(1),,221nn ，0,x,,1,1.xtdttdtx ?

arctan(arctan)(1),,,,,,,,0n21 ，00nn,,

因为右端级数在 x,,1 时均收敛，又在 x,,1 连续，所以展开式在收敛区间端点

arctanxx,,1 成立。

21，x 现将?式两边同乘得

x

222nnnn，, , , 1 (1) (1) (1)，,,,xx222nn

arctan(1)xxxx, ，, , ,,,xnnn212121 ，，，nnn,,,000

nn,1,,(1)(1),,22nnxx , ，,,nn2121 ，,nn,,01

,11nn2 , ，,,x1(1)[],nn ，,2121n1,

，,,,1,[1,1],0.,2n14,1n,

x,0 上式右端当时取值为 1，于是

n,(1)2,2nfxxx ()1,[1,1].,　　　，,,,2n14,1n,

n,(1)111,,,xf　　上式中令 ,,,,,,，,,,1[(1)1][21].,2n1422442,1n,

,1fxxx()2(11),　，,,,211、将函数展成以为周期的傅里叶级数，并由此求级数,n21n,

的和。

ab【分析与求解】 按傅氏系数公式，先求的傅氏系数与。 fx()nn

bn,,0(1,2,3).　　因为偶函数 fx()n

l12n,,l1,　，afxxdxxndx()cos2(2)cos ,n,,00ll

11

1111222,，,,,,,,,4cossinsincosnxdxxdnxnxdxnx22,,,0000nnn,,,

,4,,nk,,21,2,22n,k(21), n,,,,,[(1)1](1,2,),22n,nk,2.,0,,

1axdx,，,2(2)5. 0,0

注意到在分段单调，连续且，于是有傅氏展开式 fx()[1,1],ff(1)(1),,

,541 fxxnxx,　，,,,,,,()2cos(21),1,1.,,2,22,n,(21)n1,

,1 为了求的值，上式中令 x,0 得 ,2nn1,

2,,5411,，即 ,,.2,,,222nn,,(21)8,2(21)nn,11,

,,,,,，111111 现

由 ,，,，,,,,,,,22222nnnnn(21)(2)(21)4,,nnnn1111,,,,　　　　　，，

22,,311,,,, ,.,,,22nn486nn,,11

12、将函数展开成周期为 4 的余弦级数。 fxxx()1(02),,,,

4的周期延拓，于是得的傅

fx()fx()

氏系数：

• • •

bn,,0(1,2,3). n

l22nxn,,,l2,,afxdxxxdx()cos(1)cos n,,00ll2

2222nn,,,,,,(1)sinsinxdxxdx ,,00nn22,,

244n,n,,,,cos((1)1)x 2222nn2,,0

,8,,nk,,21,,22,(21)k,k,1,2,3 = ,nk,2,,0,,

• • •

12

222212 afxdxxdxx,,,,,,()(1)(1)0.0,,00220

,2,2 由于(延拓后)在分段单调、连续且于是有展开式 fx()ff(1)(1).,,fx(),,

,81(21)n,, fxxx()cos,0,2.,,,,,,22(21)2n,,n1,

,1nx13 、求幂级数的收敛区间，并讨论该区间端关处的收敛

性。 ,nn ，，，，n3(2)1n, ，，

• • •

1an,,, 解：设 0,1,2,,nnn ，，，,n3(2) ，，

2nnn1() ，，，，，,n3(2)a11 ，，，13n ,,,limlimlim ，，

11nn,,,,,,xxx2a33 ，，，1nn，，，3(1)(1)n ，，，，1()3

？,R3 收敛区间 ,(3,3).,

n3111x,3 当时， a,,,,nnn2nn2 ，，n，,n3(2) ，，，,1()3,1x,3 而发散原级

数在处发散。,,n2n1,

nnn,,(3)(1)21x,,3 当时， a,,,,nnnnnnn ，,3(2)，，，,n3(2) ，，

• • •

1Vn,,,0,1,2,, 记 nnn，，，,n3(2) ，，

2n1()，，，1nnnV, ,n23(2)23 ，1nn，，，，，，，11nnn2Vn, ，，3(2)231，

1nN, ，1()3

nn,,221(1),,,,,,,,1 收敛，又收敛。,,n,,nnnn3 ，,3(2)11n,n,

,3,3).x,,3 故原级数在处收敛收敛域内 ,,

13

x14、将函数 fx(), 展开成的幂级数。x22，,xx

分析 先将分解成部分分式，再利用等比级数间接展开。fx()

n2111111 解: fx()(),,,,,,x(2)(1)323131, ，，，，xxxxx1,2

,11n ,,,,xx,22,,nx20n,,12

,1nn ,,,,,xx(1),11., ，x10n,

，，，1111，，，，nnnnn fxxxxx ？,,,,,,,,,()(1)(1),11.,,,nn,,,,3232 ，，

000nnn，，，，，

n,12,x(1),15 、将函数展开成的幂级数，并求级数的和。

fx()arctan,x,n12 ，x21，0n,

,分析 直接展开较困难，先将展开，再递项积分得出的展开式 fx()fx()

12(12)2(12)2,，,,,xx, 解 fx(),,,2212,x(12)14 ，，xx21()，12，x

,,11nnnnn22,,,,,,,,,xxx 2(1)(4)2(1)4,,,22nn00,,

,xx,2nnn, fxfftdttdt()(0)()2(1)4, ，,,,,,,0040n,

n,,(1),21nn ，x,,,24 ,n421 ，0n,

nn,,1(1)11(1),,nx, 当时，，，，4 收敛（莱布尼兹判别法）,,21n ，

2nn212221，，00nn,,