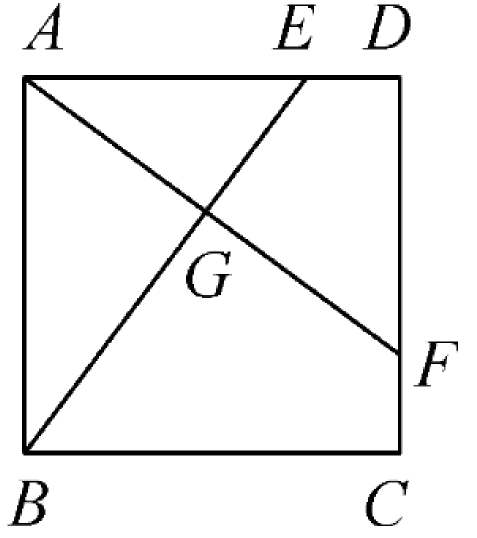
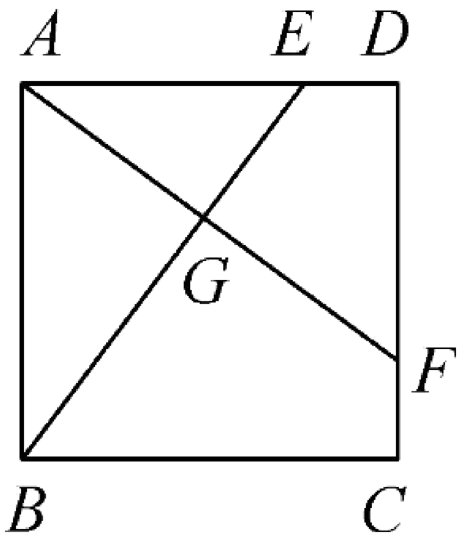
专题突破 正方形中的常见模型

模型1 十字模型——教材P68复习题T8

1.如图，$ABCD$ 是一个正方形花园，E,F 是它的两个门且 $DE=CF$.要修建两条路 BE 和 AF，这两条路等长吗它们有什么位置关系？为什么？



解：$BE = AF$ 且 $BE \perp AF$.理由:



$\because$ 四边形$ABCD$是正方形,

$\therefore AB = AD = CD, \angle BAD = \angle D = 90°$.

又$\because DE = CF, \therefore AE = DF$.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF(\mathrm{SAS})$.

$\therefore BE = AF, \angle ABE = \angle DAF$.

$\because \angle DAF + \angle BAF = 90°, \therefore \angle ABE + \angle BAF = 90°$.

$\therefore \angle AGB = 90°$,即$BE \perp AF$.

【探究】 若去掉“$DE = CF$”这一条件，将两个结论中的一个作为条件，能推出另一个结论成立吗？

（1）若已知$BE = AF$，则$BE \perp AF$成立吗？

解：成立.理由：

∵ 四边形$ABCD$是正方形，

∴ $AB=DA$，$\angle BAD=\angle D=90^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$和$\mathrm{Rt}\triangle DAF$中，$\begin{cases}BE=AF,\\AB=DA,\end{cases}$

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\cong\mathrm{Rt}\triangle DAF(\mathrm{HL})$.

∴ $\angle ABE=\angle DAF$.

∵ $\angle DAF+\angle BAF=90^\circ$,∴ $\angle ABE+\angle BAF=90^\circ$.

∴ $\angle AGB=90^\circ$,即$BE\perp AF$.

（2）若已知$BE \perp AF$,则$BE=AF$成立吗？

解：成立.理由：

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AB=AD,\angle BAD=\angle D=90^{\circ}$.

又$\because BE \perp AF,\therefore \angle AGB=90^{\circ}$.

$\therefore \angle ABE+\angle BAF=90^{\circ}$.

$\because \angle DAF+\angle BAF=90^{\circ}$,

$\therefore \angle ABE=\angle DAF.\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF(\text{ASA})$.

$\therefore BE=AF$.

模型归纳

分别连接正方形的两组对边上任意两点，得到的两条线段（如：图1中的线段AF与BE，图2中的线段AF与EG，图3中的线段HF与EG，图4中的线段AE与DF）满足：若相等，则垂直；若垂直，则相等.

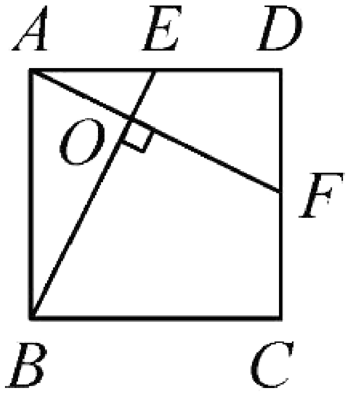


图1

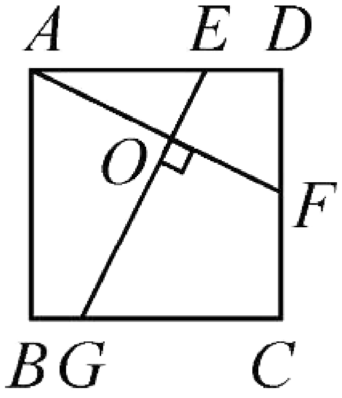


图2

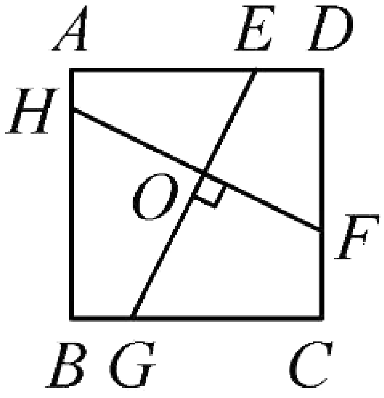


图3

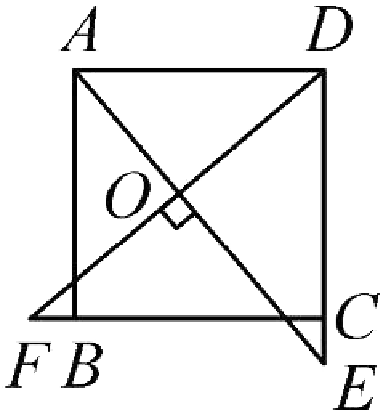
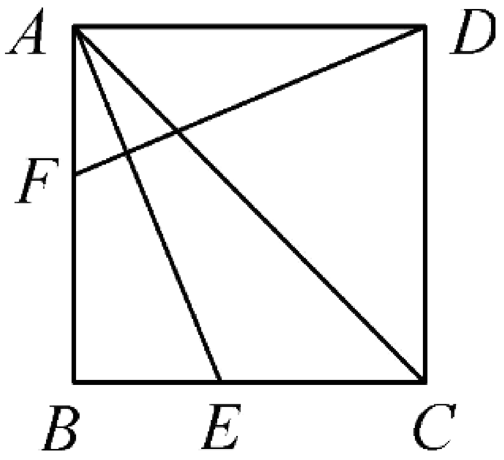


图4

变式训练

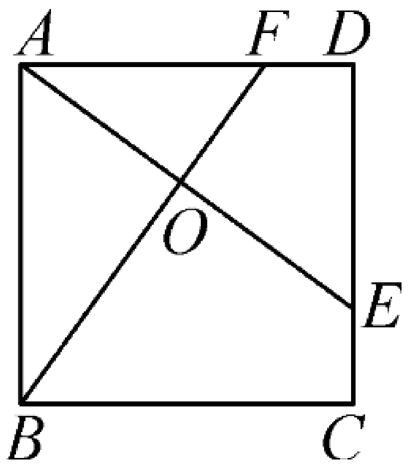
2.（2022·重庆）如图，在正方形$ABCD$中，AE平分$\angle BAC$交BC于点E，F是边AB上一点，连接DF.若$BE=AF$，则$\angle CDF$的度数为(　C　)

A. 45°　　B. 60°　　C. 67.5°　　D. 77.5°



第2题图

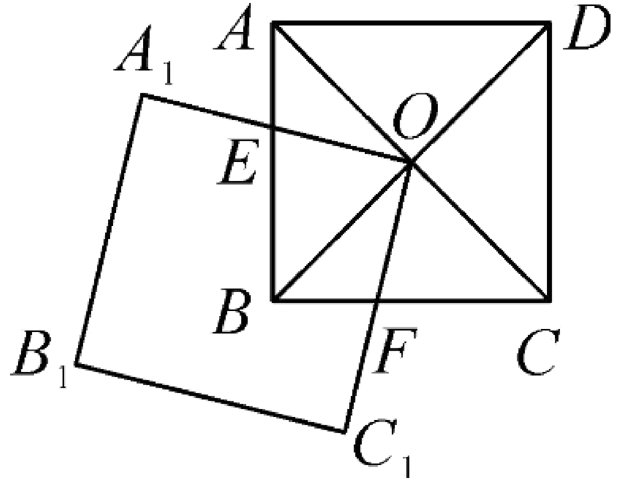
3.（2023·惠州惠阳区期末）如图，E，F分别是正方形$ABCD$的边CD，AD上的点，且$CE=DF$，AE，BF相交于点O，下列结论：①$AE=BF$；②$AE\perp BF$；③$AO=OE$；④$S_{\triangle AOB}=S_{\text{四边形}DEOF}$，其中正确的有（ D ）



第3题图

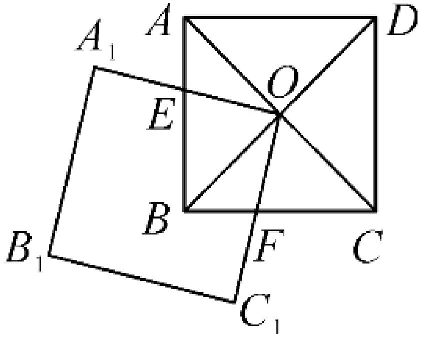
A. ①②③　　B. ②③④　　C. ①③④　　D. ①②④

模型2 正方形中过对角线交点的直角问题——教材P63“实验与探究”



4. 如图，正方形$ABCD$的对角线AC和BD相交于点O，同时O是正方形$A_1B_1C_1O$的一个顶点，OA_1交AB于点E，OC_1交BC于点F.

（1）求证：$\triangle AOE \cong \triangle BOF$.



证明：$\because$ 在正方形$ABCD$中，$AO=BO$，

$\angle OAB=\angle OBC=45^\circ$，$\angle AOB=\angle A_1OC_1=90^\circ$，

$\therefore \angle AOE+\angle EOB=90^\circ$，$\angle BOF+\angle EOB=90^\circ$.

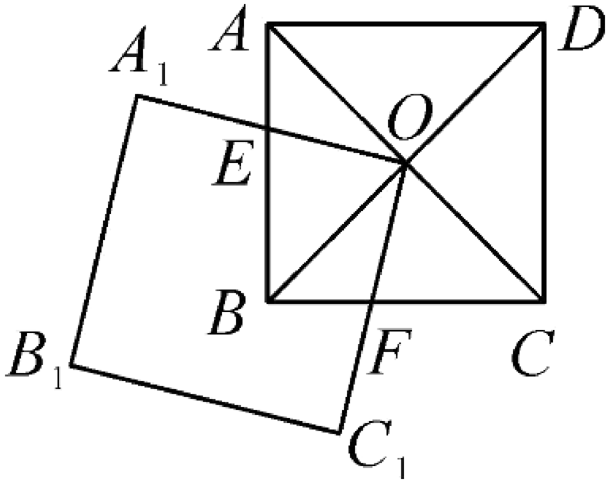
$\therefore \angle AOE=\angle BOF$.

在$\triangle AOE$和$\triangle BOF$中，

$$\begin{cases}\angle OAE=\angle OBF,\\ OA=OB,\\ \angle AOE=\angle BOF,\end{cases}$$

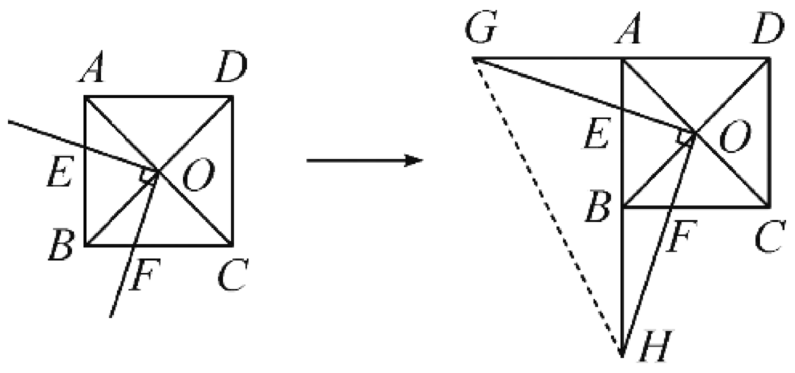
$\therefore \triangle AOE\cong\triangle BOF(\mathrm{ASA})$.

（2）如果两个正方形的边长都为a，那么这两个正方形重叠部分的面积等于$\underline{\frac{1}{4}a^2}$.



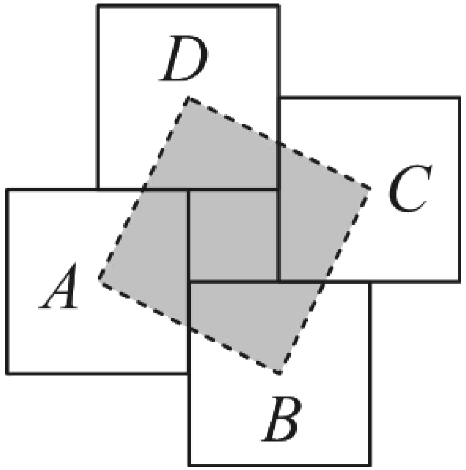
模型归纳

如图，在正方形$ABCD$中，O为两条对角线的交点，点E,F分别在AB，BC上.若$\angle EOF$为直角，OE，OF分别与DA，AB的延长线交于点G，H，则$\triangle AOE\cong\triangle BOF$，$\triangle AOG\cong\triangle BOH$，$\triangle OGH$是等腰直角三角形，且$S_{四边形OEBF}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$.



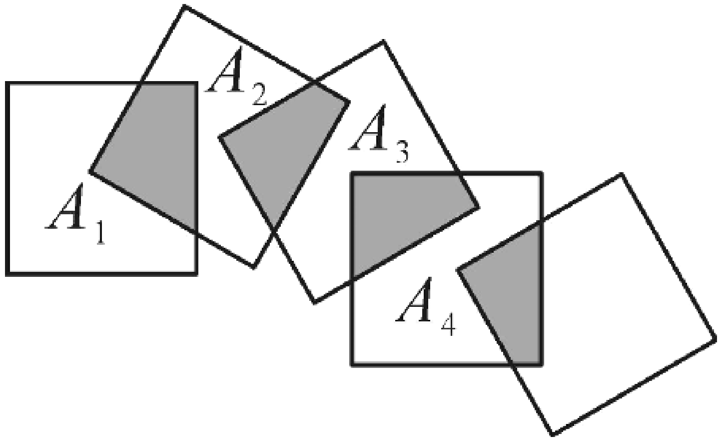
▶变式训练◀

5.用四块大正方形地砖和一块小正方形地砖拼成如图所示的实线图案，每块大正方形地砖面积为a，小正方形地砖面积为b，依次连接四块大正方形地砖的中心得到正方形$ABCD$,则正方形$ABCD$的面积为__$(a+b)$__（用含a，b的代数式表示）.



第5题图

6.如图，将n个边长都为1 cm的正方形按如图所示的方式摆放，点A_1，A_2，…，A_n分别是正方形的中心，则5个这样的正方形重叠部分的面积和为__1__,则n个这样的正方形重叠部分的面积和为__$\frac{n-1}{4}$__（用含n的代数式表示）.



第6题图

模型3 正方形中三垂直全等模型——教材P69复习题T14

7. 正方形$ABCD$的边长为6，点P在对角线BD上，E是线段AD上或AD的延长线上的一点，且$PE \perp PC$.

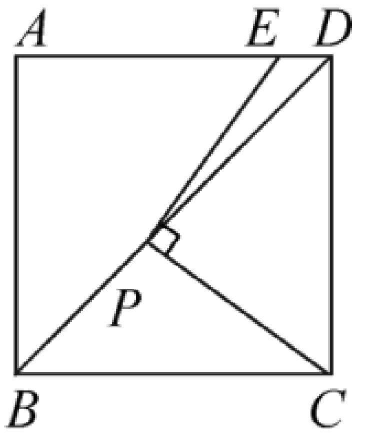


图1

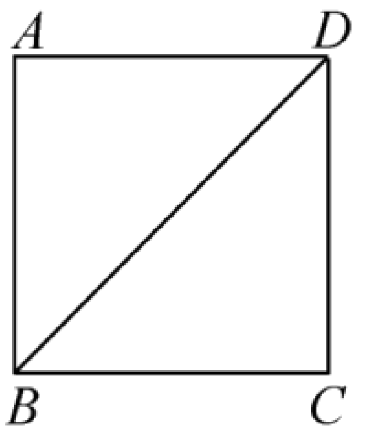


图2

（1）如图1，点E在线段AD上，求证：$PE = PC$.

解：证明：过点P作$FG//DC$分别交AD,BC于点F,G.$\because FG//DC$,$FD//GC$,$\angle ADC = 90°$，

$\therefore$ 四边形$FGCD$为矩形.

$\therefore DF = CG$,$\angle PFD = \angle CGP = 90°$.

$\because BD$为正方形$ABCD$的对角线,

$\therefore \angle BDF = \angle FPD = 45°$.$\therefore PF = FD$.$\therefore PF = CG$.

$\because PE \perp PC$,$\therefore \angle FPE + \angle GPC = 90°$.

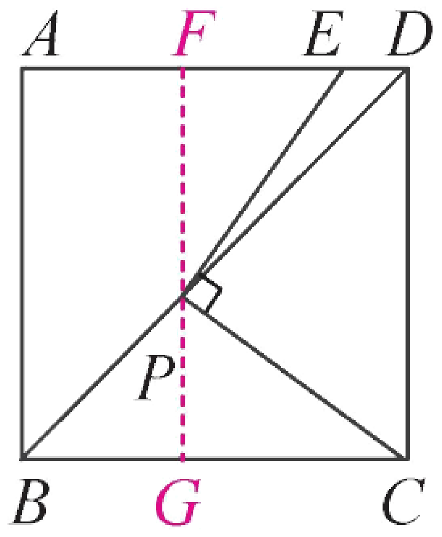


图1

$\because \angle FEP + \angle FPE = 90^\circ$,$\therefore \angle FEP = \angle GPC$.

$\therefore \triangle PFE \cong \triangle CGP(\mathrm{AAS})$.$\therefore PE = PC$.

（2）如图2，点E在线段AD的延长线上，请补全图形，并判断（1）中的结论是否仍然成立，请说明理由.

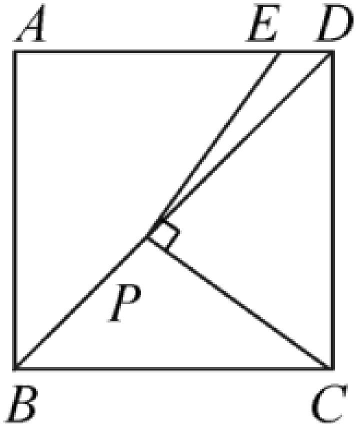


图1

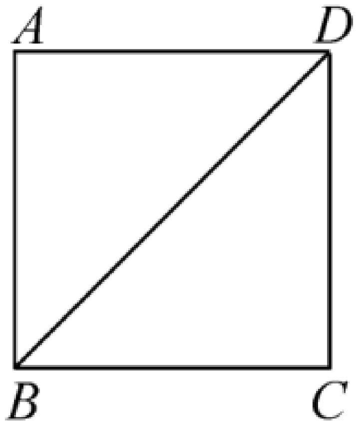


图2

[答案] **补全图形如图2.（1）中的结论仍成立.**

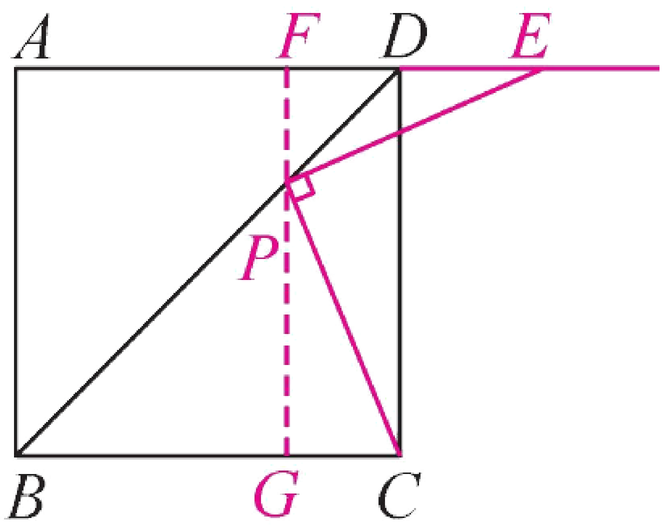


图2

理由：过点P作$FG//DC$分别交AD,BC于点F,G.

同理可证$\triangle PFE \cong \triangle CGP$(AAS).$\therefore PE = PC$.

模型归纳

如图，已知正方形$ABCD$，过B,D两点分别向过点C的直线作垂线，垂足分别为E,F，则$\triangle BCE \cong \triangle CDF$.