§4.3.1 齐次线性方程组的解

回顾：线性方程组的解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = R(A, b)$，并且
   - 当 $R(A) = R(A, b) = n$ 时，方程组有唯一解；
   - 当 $R(A) = R(A, b) < n$ 时，方程组有无限多个解.

引言

问题： 什么是线性方程组的解的结构？

答： 所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系.

备注：

- 当方程组存在唯一解或无解时，无须讨论解的结构.
- 下面的讨论都是假设线性方程组有无限多个解.

一、解向量的定义

定义1　设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，如果

$$x_1=\xi_{11},\ x_2=\xi_{21},\ \ldots,\ x_n=\xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi=\begin{pmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{n1}\end{pmatrix}$$

称为方程组的解向量.

二、齐次线性方程组的解的性质

性质1：若 $x=\xi_1$，$x=\xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，

则 $x=\xi_1+\xi_2$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明：$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0.$

性质2：若 $x=\xi_1$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，k 为实数，

则 $x=k\xi_1$ 还是 $Ax=0$ 的解.

证明：$A(k\xi_1)=k(A\xi_1)=k\,0=0.$

结论：若 $x=\xi_1$, $x=\xi_2$, ..., $x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$

的解，则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

结论：若 $x = \xi_1,\ x = \xi_2, \dots,\ x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解， 则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

- 已知齐次方程组 $Ax = 0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解.
- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax = 0$ 的解全部表示出来？
- 把 $Ax = 0$ 的全体解组成的集合记作 S，若求得 S 的一个最大无关组 S_0： $x = \xi_1,\ x = \xi_2, \dots,\ x = \xi_t$，那么 $Ax = 0$ 的通解可表示为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$.
- 齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的**基础解系**（不唯一）.

回顾：向量组的最大线性无关组的概念

定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量 $a_1, a_2, \cdots, a_r$，满足

① 向量组 A_0 ：$a_1, a_2, \cdots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有 $r+1$个向量的话）都线性相关；

②' 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

三、基础解系的概念

定义2　齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的一组解向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$

如果满足

① $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 线性无关;

② 方程组中任意一个解都可以表示 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 的线性组合,

那么称这组解是齐次线性方程组的一个基础解系.

注:　齐次线性方程组的基础解系不唯一.

问:　如何求齐次线性方程组的基础解系?

用初等变换法求方程组的基础解系.

设 $R(A)=r$，为叙述方便，

不妨设 A 行最简形矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

法一：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$， 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r}\begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_{n-r}\xi_{n-r}$. （满足基础解系②）

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/896035035114010145