2024-2025 学年天津市高三上学期期中考试数学质量检测试卷

一、选择题

1. 已知集合 $A=\left\{x \mid \dfrac{x-2}{x+2} \leq 0\right\}$，$B=\{x \in \mathrm{Z} \mid -1 \leq x \leq 5\}$，则 $A \cap B=$（　　）

A. $[-1,2]$

B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $[-1,2)$

D. $\{-1,0,1\}$

2. 设 $a, b \in \mathbf{R}$，则“$2^a=2^b$”是“$a^2=b^2$”的（　　）

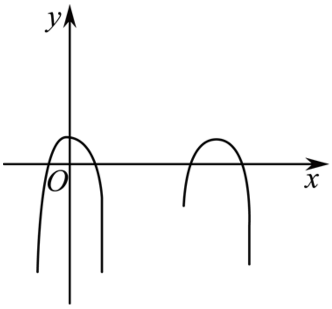
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

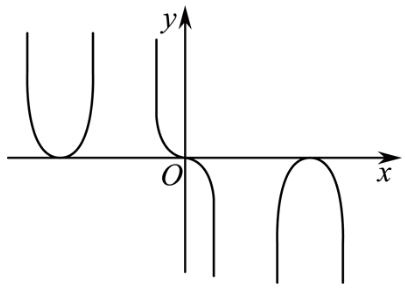
C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

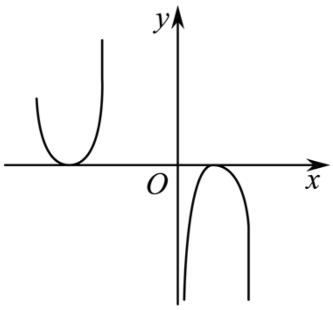
3. 函数 $y=\dfrac{\left(3^x-1\right)\ln(\cos x)}{3^x+1}$ 的部分图象大致为（　　）



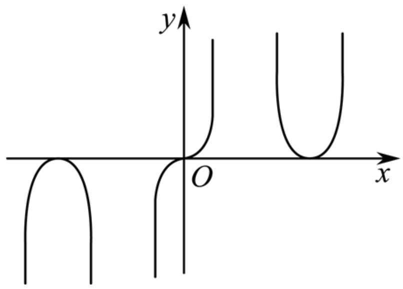
A.



B.



C.



D.

4. 已知平面 α, β，直线 $l \subset \alpha$，直线 m 不在平面 α 内，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\alpha // \beta, m \quad l$，则 $m \parallel \beta$

B. 若 $l \perp \beta, m \perp \alpha$，则 $m \parallel \beta$

C. 若 $l \perp m, \alpha \perp \beta$，则 $m \perp \alpha$

D. 若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \beta$，则 $m \perp l$

5. 设 $a=2^{0.3}$，$b=\sin\dfrac{\pi}{12}$，$c=\ln 2$，则（　　）

A. $c<b<a$　　　　B. $b<c<a$　　　　C. $a<b<c$　　　　D. $b<a<c$

6. 已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，其前n项和分别为S_n，T_n，满足

$(2n+3)S_n=(3n-1)T_n$，则$\dfrac{a_7+a_8+a_9}{b_6+b_{10}}=$（　　）

A. 2　　　　B. 3　　　　C. 5　　　　D. 6

7. 灯笼起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围.如图1，某球形灯笼的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面的一部分（除去两个球缺）.如图2,“球缺”是指一个球被平面所截后剩下的部分，截得的圆面叫做球缺的底，垂直于截面的直径被截得的一段叫做球缺的高.

已知球缺的体积公式为$V=\dfrac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，其中$R$是球的半径，$h$是球缺的高.已知该灯笼的高为40cm，圆柱的高为4cm，圆柱的底面圆直径为24cm，则该灯笼的体积为（取$\pi=3$）（

）

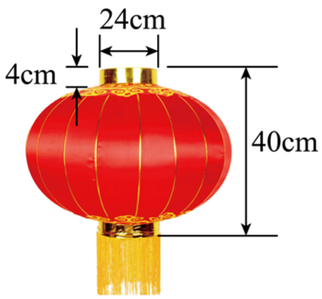


图1

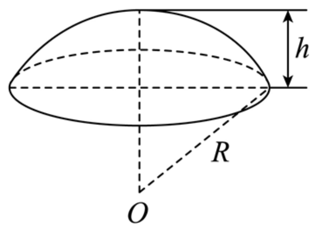


图2

A. 33664cm^3　　　　B. 33792cm^3　　　　C. 34674cm^3　　　　D.

35456cm^3

8. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,0<\varphi<\pi)$，其图象的一个最低点是$P\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$，距离$P$点最近的对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，则（　　）

A. $\omega=3$

B. $x=\dfrac{13\pi}{12}$是函数$f(x)$图象的一条对称轴

C. $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$时，函数$f\left(x\right)$单调递增

D. $f\left(x\right)$的图象向右平移$\phi\left(\phi>0\right)$个单位后得到$g\left(x\right)$的图象，若$g\left(x\right)$是奇函数，则ϕ的最小值是$\dfrac{\pi}{6}$

9. 设函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，满足$f\left(x+2\right)=\dfrac{1}{2}f\left(x\right)$，且当$x\in(0,2]$时，$f\left(x\right)=x\left(x-2\right)$，若对任意$x\in\left[m,+\infty\right)$，都有$f\left(x\right)\geq-\dfrac{3}{16}$，则$m$的取值范围是（　）

A. $\left[5,+\infty\right)$　　B. $\left[\dfrac{9}{2},+\infty\right)$

C. $\left[\dfrac{21}{4},+\infty\right)$　　D. $\left[\dfrac{11}{2},+\infty\right)$

第II卷（非选择题）

二、填空题

10. i为虚数单位，若复数$z=\dfrac{2\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-2}$，则$\left|z\right|=$______

11. $\mathrm{e}^{\ln 3}+\log_{\sqrt{2}}8+\left(0.25\right)^{-\frac{1}{2}}$的值为______.

12. 已知函数$f\left(x\right)$为偶函数，其图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$x-2y+1=0$，记$f\left(x\right)$的导函数为$f'(x)$，则$f'\left(-1\right)=$______.

13. 已知正数a，b满足$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}$，则$4a^2+ab+b^2$的最小值为______.

14. 折扇又名"撒扇"、"纸扇"，是一种用竹木或象牙做扇骨，韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子，如图1．其展开几何图是如图2的扇形AOB，其中$\angle AOB=120^\circ$，$OC=2$，$OA=4$，点E在$\overset{\frown}{CD}$上（包含端点），则$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DA}=$__________；$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$的取值范围是__________.

图1

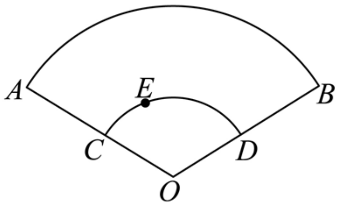


图2

15. 已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, 0<x\le 2\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{15}{4}\right), x>2\end{cases}$，且满足$f(-x)=-f(x)$，函数$g(x)=kx$，若函数$h(x)=f(x)-g(x)$有 7 个零点，则 k 的取值范围为__________；若方程$f(x)=m$（$m>0$）的解为x_1、x_2、x_3、x_4，则$x_1+x_2+x_3+x_4$的取值范围为__________

三、解答题

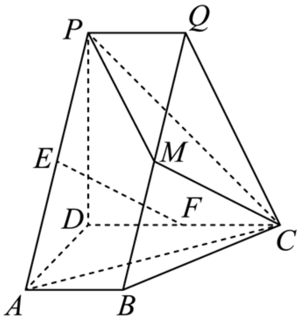
16. 在ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c．已知$a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$．

（1）求角C的大小；

（2）求$\sin A$的值；

（3）求$\sin(2A+\frac{\pi}{6})$的值．

17. 如图，$PD\perp$平面$ABCD, AD\perp CD, AB//CD, PQ//CD$，$AD=CD=DP=2PQ=2AB=2$，点$E,F,M$分别为$AP,CD,BQ$的中点．



（1）求证：$EF//$平面CPM；

（2）求平面QPM与平面CPM夹角的正弦值；

（3）若 N 为线段 CQ 上的点，且直线 DN 与平面 QPM 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，求 N 到平面 CPM 的距离.

18. 记 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且满足 $a_3=5$，$S_3=9$，$a_1+b_1=0$，$a_2+b_2=a_3+b_3=a_4-3b_4$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=\frac{nb_n}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和；

（3）求证：对于 $\forall n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geq 2$，$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{7}{4}$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{3}(1-a_n)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$. 若 $2+b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n$，且数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_n\cdot b_n$.

（1）求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（2）求证：数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n<\frac{2}{3}$；

（3）若 $c_n\leq\frac{1}{4}\left(t^2+t-1\right)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-xe^{x+1}$.

（1）当 $a<0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f(x)$ 存在正零点 x_0，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）记 x_1 为 $f(x)$ 的极值点，证明. $x_0<3x_1$

2024-2025学年天津市高三上学期期中考试数学质量检测试卷

一、选择题

1. 已知集合$A=\left\{x\mid \frac{x-2}{x+2}\le 0\right\}$，$B=\left\{x\in \mathrm{Z}\mid -1\le x\le 5\right\}$，则$A\bigcap B=$（　　）

A. $\left[-1,2\right]$

B. $\left\{-1,0,1,2\right\}$

C. $\left[-1,2\right)$

D. $\left\{-1,0,1\right\}$

【正确答案】B

【分析】根据条件，求出集合A,B，再利用集合的运算，即可求解.

【详解】由$\frac{x-2}{x+2}\le 0$，得到$-2<x\le 2$，即$A=\left\{x\mid -2<x\le 2\right\}$，

又 $B=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1,2\}$，

故选：B.

2. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$2^a=2^b$”是“$a^2=b^2$”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【正确答案】A

【分析】分别得出 $2^a=2^b$ 及 $a^2=b^2$ 时的 a 与 b 的关系，结合充分条件与必要条件定义即可判断.

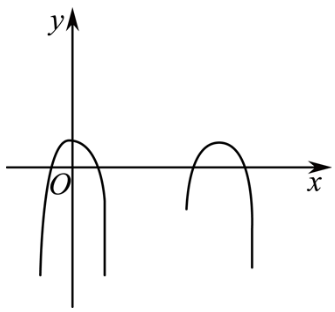
【详解】由函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故当 $2^a=2^b$ 时，有 $a=b$，

若 $a^2=b^2$，则 $a=\pm b$，

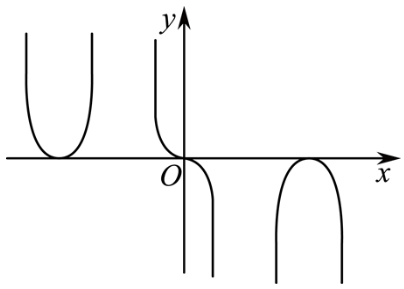
故“$2^a=2^b$”是“$a^2=b^2$”的充分不必要条件.

故选：A.

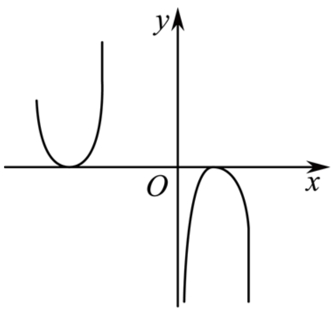
3. 函数 $y=\dfrac{\left(3^x-1\right)\ln\left(\cos x\right)}{3^x+1}$ 的部分图象大致为（　　）



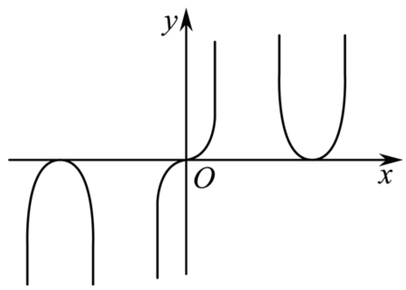
A.



B.



C.



D.

【正确答案】B

【分析】通过函数的奇偶性可排除 AC，通过$x \to 0^{+}$时函数值的符号可排除 D，进而可得结果.

【详解】令$f\left(x\right)=\dfrac{\left(3^{x}-1\right)\ln\left(\cos x\right)}{3^{x}+1}$，其定义域为$\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in \mathrm{Z}$关于原点对称，

$f\left(-x\right)=\dfrac{\left(3^{-x}-1\right)\ln\left(\cos -x\right)}{3^{-x}+1}=\dfrac{\left(1-3^{x}\right)\ln\cos x}{1+3^{x}}=-f\left(x\right)$，

所以函数$f\left(x\right)$为奇函数，即图像关于原点对称，故排除 AC，

当$x\to 0^{+}$时，$3^{x}-1>0$，$3^{x}+1>0$，$\ln\cos x<0$，即$f\left(x\right)<0$，故排除 D，

故选：B.

4. 已知平面α,β，直线$l\subset\alpha$，直线m不在平面α内，下列说法正确的是（　　）

A. 若$\alpha // \beta, m \quad l$，则$m \parallel \beta$　　B. 若$l\perp\beta, m\perp\alpha$，则$m\parallel\beta$

C. 若$l\perp m,\alpha\perp\beta$，则$m\perp\alpha$　　D. 若$\alpha\parallel\beta, m\perp\beta$，则$m\perp l$

【正确答案】D

【分析】由空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系逐一分析四个选项得答案.

【详解】因为$l\subset\alpha$，

对于 A，若$\alpha // \beta, m \quad l$，则$m$有可能在平面$\beta$内，故 A 错误；

对于 B，若$l\perp\beta$，又$l\subset\alpha$，则$\alpha\perp\beta$，又$m\perp\alpha$，所以$m\parallel\beta$或m在平面β内，故 B 错误；

对于 C，若$l\perp m,\alpha\perp\beta$，则$m$有可能与平$\alpha$交但不垂直，故 C 错误；

对于 D，若$\alpha\parallel\beta, m\perp\beta$，则$m\perp\alpha$，又$l\subset\alpha$，则$m\perp l$，故 D 正确.

故选：D

5. 设$a=2^{0.3}$，$b=\sin\dfrac{\pi}{12}$，$c=\ln 2$，则（　　）

A. $c<b<a$ B. $b<c<a$ C. $a<b<c$ D. $b<a<c$

【正确答案】B

【分析】根据给定的条件，利用指数、对数函数、正弦函数的性质，借助$1,\frac{1}{2}$进行比较判断选项.

【详解】$a=2^{0.3}>2^{0}=1$，$b=\sin\frac{\pi}{12}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

而$\sqrt{e}<2<e$，则$\frac{1}{2}<\ln 2<1$，即$\frac{1}{2}<c<1$，所以$b<c<a$.

故选：B

6. 已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，其前n项和分别为S_n，T_n，满足$(2n+3)S_n=(3n-1)T_n$，则$\frac{a_7+a_8+a_9}{b_6+b_{10}}=$（ ）

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

【正确答案】A

【分析】根据题意，利用得出数列的性质和得出数列的求和公式，准确计算，即可求解.

【详解】因为数列$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，可得$a_7+a_8+a_9=3a_8=\frac{1}{5}\times 15a_8=\frac{1}{5}S_{15}$，

且$b_6+b_{10}=b_1+b_{15}$，又由$T_{15}=\frac{15\left(b_1+b_{15}\right)}{2}$，可得$b_6+b_{10}=\frac{2}{15}T_{15}$.

因此$\frac{a_7+a_8+a_9}{b_6+b_{10}}=\frac{\frac{1}{5}S_{15}}{\frac{2}{15}T_{15}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{S_{15}}{T_{15}}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$.

故选：A.

7. 灯笼起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围.如图 1，某球形灯笼的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面的一部分（除去两个球缺）.如图 2,“球缺”是指一个球被平面所

截后剩下的部分，截得的圆面叫做球缺的底，垂直于截面的直径被截得的一段叫做球缺的高.

已知球缺的体积公式为 $V=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，其中 R 是球的半径，h 是球缺的高.已知该灯笼的高为 40cm，圆柱的高为 4cm，圆柱的底面圆直径为 24cm，则该灯笼的体积为（取 $\pi=3$）（ ）

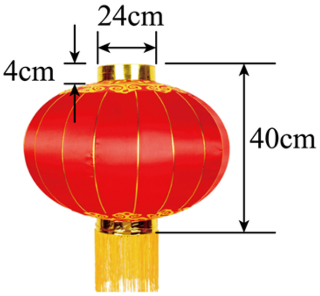


图1

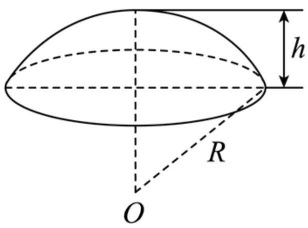


图2

A. 33664cm^3　　B. 33792cm^3　　C. 34674cm^3　　D. 35456cm^3

【正确答案】A

【分析】由勾股定理求出 R，则可得 h，分别求出两个圆柱的体积、灯笼中间完整的球的体积与球缺的体积即可得..

【详解】该灯笼去掉圆柱部分的高为 $40-8=32\text{cm}$，则 $R-h=\frac{32}{2}=16\text{cm}$，

由圆柱的底面圆直径为 24cm，则有 $(R-h)^2+12^2=R^2$，

即 $16^2+12^2=R^2$，可得 $R=20$，则 $h=4$，

$V=2V_{圆柱}+V_{球}-2V_{球缺}=2\times4\times12^2\times\pi+\frac{4}{3}\times\pi\times20^3-2\times\frac{\pi}{3}(60-4)\times4^2$

$=3456+32000-1792=33664$.

故选：A.

8. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\,(\omega>0,0<\varphi<\pi)$，其图象的一个最低点是 $P\left(\frac{\pi}{6},-2\right)$，距离 P 点最近的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，则（　　）

A. $\omega=3$

B. $x=\dfrac{13\pi}{12}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴

C. $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 单调递增

D. $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\phi\left(\phi>0\right)$ 个单位后得到 $g\left(x\right)$ 的图象，若 $g\left(x\right)$ 是奇函数，则 ϕ 的最小值是 $\dfrac{\pi}{6}$

【正确答案】C

【分析】由函数的图像的顶点坐标求出 A，由周期求出 ω，由最低点求出 φ 的值，可得函数的解析式，再利用三角函数的图像和性质，得出结论.

【详解】解：∵ 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0$，$0<\varphi<\pi)$ 的图象的一个最低点是

$P\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$，

距离 P 点最近的对称中心为 $\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，

$\therefore A=2$，$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore\omega=6$，

$\therefore 6\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{3\pi}{2}$，$k\in Z$，因为 $0<\varphi<\pi$，

令 $k=1$，可得 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，

所以函数 $f(x)=2\sin(6x+\dfrac{\pi}{2})=2\cos 6x$，故 A 错误；

$f\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)=2\cos\left(6\times\dfrac{13\pi}{12}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，故函数关于 $\left(\dfrac{13\pi}{12},0\right)$ 对称，故 B 错误；

当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$ 时，$6x\in\left(-\pi,0\right)$，函数 $f(x)$ 单调递增，故 C 正确；

把 $f(x)$ 的图象向右平移 $\phi(\phi>0)$ 个单位后得到 $g(x)=2\cos(6x-6\phi)$ 的图象，

若$g(x)$是奇函数，则$6\phi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in \mathrm{N}$，即$\phi = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$，$k \in \mathrm{N}$，

令$k = 0$，可得ϕ的最小值是$\frac{\pi}{12}$，故D错误，

故选：C

9. 设函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，满足$f\left(x+2\right)=\frac{1}{2}f\left(x\right)$，且当$x \in (0,2]$时，

$f\left(x\right)=x\left(x-2\right)$，若对任意$x \in \left[m,+\infty\right)$，都有$f\left(x\right) \geq -\frac{3}{16}$，则$m$的取值范围是（　）

A. $\left[5,+\infty\right)$

B. $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{21}{4},+\infty\right)$

D. $\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$

【正确答案】D

【分析】由题设条件画出函数$f\left(x\right)$的简图，由图象分析得出m的取值范围.

【详解】当$x \in \left(0,2\right]$时，$x+2 \in \left(2,4\right]$，

则$f\left(x+2\right)=\frac{1}{2}f\left(x\right)=\frac{1}{2}x\left(x-2\right)=\frac{1}{2}\left(x+2-2\right)\left(x+2-4\right) \in \left[-1,0\right]$，

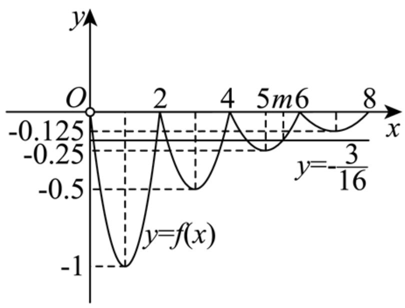
即当$x \in \left(2,4\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x-2\right)\left(x-4\right) \in \left[-\frac{1}{2},0\right]$，

同理当$x \in \left(4,6\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(x-4\right)\left(x-6\right) \in \left[-\frac{1}{4},0\right]$；

当$x \in \left(6,8\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(x-6\right)\left(x-8\right) \in \left[-\frac{1}{8},0\right]$.

以此类推，当$x > 6$时，都有$f\left(x\right) > -\frac{3}{16}$.

函数$f\left(x\right)$和函数$y = -\frac{3}{16}$在$\left(0,8\right]$上的图象如下图所示：



由图可知，$f\left(m\right)=\frac{1}{4}\left(m-4\right)\left(m-6\right)=-\frac{3}{16}$，$m\in\left(5,6\right)$，解得$m=\frac{11}{2}$，

即对任意$x\in\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$，都有$f\left(x\right)\geq-\frac{3}{16}$，即$m$的取值范围是$\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$.

故选：D.

第II卷（非选择题）

二、填空题

10. i 为虚数单位，若复数$z=\frac{2\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-2}$，则$\left|z\right|=$______

【正确答案】1

【分析】先利用复数除法运算化简复数，然后代入模的运算求解即可.

【详解】因为$z=\frac{2\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-2}=\frac{\left(2\mathrm{i}+1\right)\left(-2-\mathrm{i}\right)}{\left(\mathrm{i}-2\right)\left(-2-\mathrm{i}\right)}=\frac{-5\mathrm{i}}{5}=-\mathrm{i}$，所以$\left|z\right|=1$.

故1

11. $\mathrm{e}^{\ln 3}+\log_{\sqrt{2}}8+\left(0.25\right)^{-\frac{1}{2}}$的值为______.

【正确答案】11

【分析】进行对数和分数指数幂的运算即可.

【详解】原式$=3+log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{6}+2=3+6+2=11$.

故 11.

12. 已知函数$f\left(x\right)$为偶函数，其图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为$x-2y+1=0$，记$f\left(x\right)$的导函数为$f'(x)$，则$f'\left(-1\right)=$______.