考试备考资料

（习题试卷、考点）

第一章 向量和坐标

一、向量的概念★★

既有大小又有方向的量叫做向量，或称为矢量，简称矢.

向量的大小叫做向量的模，也称向量的长度. 向量 $\mathbf{AB}$ 与 $\vec{a}$ 的模分别记做 $|\mathbf{AB}|$ 与 $|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量，模等于 0 的向量叫做零向量。

如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫做相等向量，记做 $\vec{a}=\vec{b}$.

二、 向量的运算★★★★★

1、已知空间中任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ，则向量

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

2、已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 、 $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ ，则

（1）向量 $\vec{a}$ 的模为 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}$

（2） $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$

（3） $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$

3、向量的数量积（内积） $\vec{a}\cdot\vec{b}$

（1） $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$

（2） $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

其中 $<\vec{a},\vec{b}>$ 为向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角，且 $0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$

注意：利用向量的内积可求直线与直线的夹角、直线与平面的夹角、平面与平面的夹角。

4、（1） $\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

（2） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

（3）三个非零向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ ， $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ 和 $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ ，共面的充

要条件是$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$.

例 1. $\vec{a}=(6,x,-4)$，$\vec{b}=(y,-2,-2)$，已知$\vec{a}//\vec{b}$，求x,y的值分别是（　）

A. 4，-3　　　　B. -3，-4

C. -3，4　　　　D. -4，3

解析：由于$\vec{a}//\vec{b}$，即$\dfrac{6}{y}=\dfrac{x}{-2}=\dfrac{-4}{-2}$，故$x=-4,y=3$，故选 D.

例 2. 已知向量$\vec{a}$与向量$\vec{b}=\{-1,2,1\}$平行，与向量$\vec{c}=\{1,2,-1\}$的数量积为 6，则向量$\vec{a}$为（　）

A. $\{-3,6,-3\}$　　　　B. $\{3,6,3\}$

C. $\{3,6,-3\}$　　　　D. $\{-3,6,3\}$

【解析】由$\vec{a}$与$\vec{b}=\{-1,2,1\}$平行，故设$\vec{a}=\{-\lambda,2\lambda,\lambda\}$，且

$\vec{a}\ \vec{c}=-\lambda\times1+2\lambda\times2+\lambda\times(-1)=2\lambda=6$，故$\lambda=3$，即$\vec{a}=\{-3,6,3\}$，故选 D.

例 3 已知矢量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$的分量如下：

(1) $\vec{a}=\{0,-1,2\}$，$\vec{b}=\{0,2,-4\}$，$\vec{c}=\{1,2,-1\}$;

(2) $\vec{a}=\{1,2,3\}$，$\vec{b}=\{2,-1,0\}$，$\vec{c}=\{0,5,6\}$.

试判别它们是否共面？能否将$\vec{c}$表成$\vec{a}$，$\vec{b}$的线性组合？若能表示，写出表示式.

解：(1) 因为$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$,所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$三矢量共面,

又因为$\vec{a}$, $\vec{b}$的对应坐标成比例，即$\vec{a}//\vec{b}$，但$\vec{c}\not\parallel\vec{a}$，

故不能将$\vec{c}$表成$\vec{a}$, $\vec{b}$的线性组合.

(2) 因为$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}=0$,所以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$三矢量共面.

又因为$\vec{a}$, $\vec{b}$的对应坐标不成比例，即$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$，

故可以将$\vec{c}$表成$\vec{a}$, $\vec{b}$的线性组合.

设 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，亦即{0, 5, 6}＝$\lambda${1, 2, 3}+$\mu${2, －1, 0}

从而

$$\begin{cases}\lambda+2\mu=0,\\ 2\lambda-\mu=0,\\ 3\lambda=6.\end{cases}$$

解得　　λ＝2，μ＝－1,

所以　　$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$

5、向量的向量积（外积）$\vec{a}\times\vec{b}$（遵循右手原则，且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$、$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$）

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&a_2&a_3\\ b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

例 4. 设 $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=$（ D ）

A. $(1,1,1)$　　B. $(1,2,3)$　　C. $(5,1,6)$　　D. $(5,1,7)$

解析: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 3&-1&-2\\ 1&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-2\\ 2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}3&-2\\ 1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}3&-1\\ 1&2\end{vmatrix}\vec{k}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}=\{5,1,7\}$.

例 5. 设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,-1,2)$，则 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解析:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&1&-1\\ 1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1\\ -1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\ 1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&1\\ 1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}=\{1,-5,-3\}\ .$$

例 6. 已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解析: 根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$，由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&2&2\\ 1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\ 2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&2\\ 1&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\ 1&2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\ ,$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\frac{1}{2}\sqrt{56}=\sqrt{14}.$$

6、混合积：给定空间的三个向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 如果先作前两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的向量积，再作所得的向量与第三个向量$\vec{c}$的数量积，最后得到的这个数叫做三向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$的混合积，记做$(\vec{a}\times\vec{b})\ \vec{c}$或$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$或$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

轮换混合积的三个因子，并不改变它的值，对调任何两个因子要改变乘积符号，即

$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{b}\vec{c}\vec{a})=(\vec{c}\vec{a}\vec{b})=-(\vec{b}\vec{a}\vec{c})=-(\vec{c}\vec{b}\vec{a})=-(\vec{a}\vec{c}\vec{b})$.

例 7. 已知四面体 ABCD 的顶点坐标$A(0,0,0)$、$B(6,0,6)$，$C(4,3,0)$和$C(2,-1,3)$，求它的体积.

解：由初等几何知道，四面体 ABCD 的体积V等于以 AB, AC 和 AD 为棱的平行六面体的体积的六分之一，因此$V=\frac{1}{6}\left|(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})\right|$,

由于$\mathbf{AB}=\{6,0,6\}$，$\mathbf{AC}=\{4,3,0\}$，$\mathbf{AD}=\{2,-1,3\}$，

故$(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})=\begin{vmatrix}6&0&6\\4&3&0\\2&-1&3\end{vmatrix}=-6$，从而$V=\frac{1}{6}\left|(\mathbf{AB},\mathbf{AC},\mathbf{AD})\right|=1$.

三、 向量在轴上的射影★★★

（1）设向量$\mathbf{AB}$的始点 A 和终点 B 在轴$\vec{l}$上的射影分别为点A'和B'，那么向量$\mathbf{A'B'}$叫做向量$\mathbf{AB}$在轴$\vec{l}$上的射影向量，记做射影向量$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\mathbf{AB}$. 向量$\mathbf{AB}$在轴$\vec{l}$上的射影等于向量的模乘轴与该向量的夹角的余弦：

$$\mathrm{Prj}_{\vec{l}}\mathbf{AB}=\left|\mathbf{AB}\right|\cos\theta，\ \theta=\angle(\vec{l},\mathbf{AB}).$$

（2）非零向量$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$的方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},$$