几何最值模型之费马点模型

皮耶·德·费马，17世纪法国数学家，有“业余数学家之王”的美誉，之所以叫业余并非段位不够，而是因为其主职是律师，兼职搞搞数学．费马在解析几何、微积分等领域都有卓越的贡献，除此之外，费马广为人知的是以其名字命名的“费马小定理”、“费马大定理”等．**费马点：**三角形内的点到三个顶点距离之和最小的点。

费马点问题是由全等三角形中的手拉手模型衍生而来，主要考查转化与化归等的数学思想，在各类考试中都以中高档题为主。本专题就最值模型中的费马点问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型分析

模型：费马点模型

1. 费马点模型概念：数学上称，到三角形3个顶点距离之和最小的点为费马点。
2. 解题依据：旋转变换。
3. 解题策略：构造等边三角形共顶点旋转，通过旋转把三条线段凑在一起顺次相连。
4. 解题思路：化折为直，共线时求最值。
5. 费马点的作法：分别以$\triangle ABC$的AB、AC为一边向外作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACF$，连接CE、BF，设交点为M，则点M即为$\triangle ABC$的费马点。

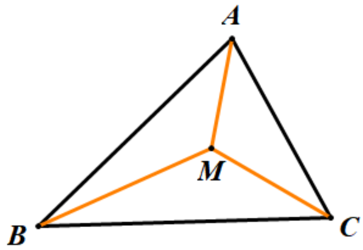
模型展示

模型①：费马点模型

【模型解读】

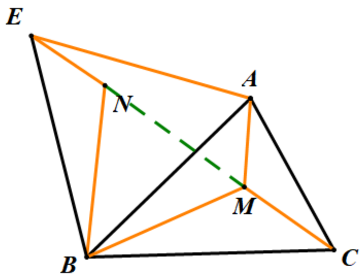
结论1：如图，点M为$\triangle ABC$内任意一点，连接AM、BM、CM，当M与三个顶点连线的夹角为$120°$时，$MA+MB+MC$的值最小。

注意：上述结论成立的条件是$\triangle ABC$的最大的角要小于$120°$，若最大的角大于或等于$120°$，此时费马点就是最大角的顶点A。(这种情况一般不考，通常三角形的最大顶角都小于$120°$)



【模型解析①】构造等边三角形共顶点旋转

以AB为一边向外作等边三角形$\triangle ABE$，将BM绕点B逆时针旋转$60°$得到BN，连接EN.



$\because \triangle ABE$为等边三角形，$\therefore AB=BE$，$\angle ABE=60°$．而$\angle MBN=60°$，$\therefore \angle ABM=\angle EBN$．

在$\triangle AMB$与$\triangle ENB$中，$\because \begin{cases} AB=BE \\ \angle ABM=\angle EBN \\ BM=BN \end{cases}$，$\therefore \triangle AMB \cong \triangle ENB(SAS)$．

连接MN．由$\triangle AMB \cong \triangle ENB$知，$AM=EN$．$\because \angle MBN=60°$，$BM=BN$，$\therefore \triangle BMN$为等边三角形．

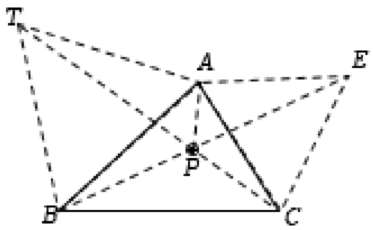
$\therefore BM=MN$．$\therefore AM+BM+CM=EN+MN+CM$．$\therefore$当$E$、$N$、$M$、$C$四点共线时，$AM+BM+CM$的值最小．

此时，$\angle BMC=180°-\angle NMB=120°$；$\angle AMB=\angle ENB=180°-\angle BNM=120°$；

$\angle AMC=360°-\angle BMC-\angle AMB=120°$．

【模型解析②】“手拉手模型”原理

在$\triangle ABC$的外侧，分别作等边$\triangle ABT$、等边$\triangle ACE$，连接CT、BE相交于点P，



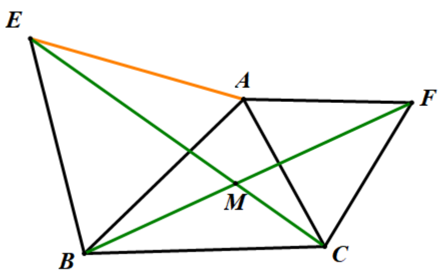
此时$\angle BPT=60°$，

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$(参见“手拉手模型－全等”)，

点P就是$\triangle ABC$的费马点，

费马距离等于CT或BE．

【模型解析③】费马点的作法



如图，分别以$\triangle ABC$的AB、AC为一边向外作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACF$，连接CE、BF，设交点为M，则点M即为$\triangle ABC$的费马点。

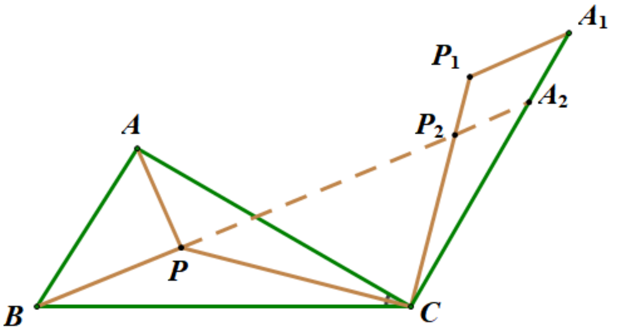
【最值原理】两点之间，线段最短。

模型②:加权费马点模型

结论2: 点 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内任意一点,连接 AP、BP、CP,求 $xAP+yBP+zCP$ 最小值。

【模型解析】第一步,选定固定不变线段;第二步,对剩余线段进行缩小或者放大。

如:保持 BP 不变,$xAP+yBP+zCP=y\left(\dfrac{x}{y}AP+BP+\dfrac{z}{y}CP\right)$,如图,$B$、$P$、$P_2$、$A_2$ 四点共线时,取得最小值。



模型特征:$PA+PB+PC$(P 为动点)

①一动点,三定点;

②以三角形的三边向外作等边三角形的,再分别将所作等边三角形最外的顶点与已知三角形且与所作等边三角形相对的顶点相连,连线的交点即为费马点;

③同时线段前可以有不为1的系数出现,即:加权费马点。

经典例题精析

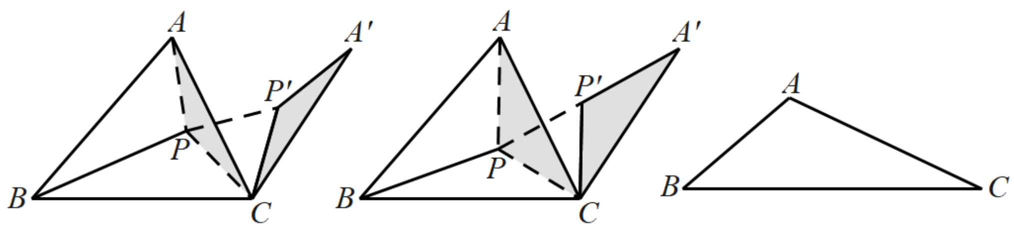
【经典例题】

例1 1643年,法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题:给定不在同一条直线上的三个点 A,B,C,求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置,意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明,该点也被称为"费马点"或"托里拆利点",该问题也被称为"将军巡营"问题.

(1)下面是该问题的一种常见的解决方法,请补充以下推理过程:(其中①处从"直角"和"等边"中选择填空,②处从"两点之间线段最短"和"三角形两边之和大于第三边"中选择填空,③处填写角度数,④处填写该三角形的某个顶点)

当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$ 时,

如图1,将 $\triangle APC$ 绕,点 C 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'P'C$,连接 PP',



由 $PC=P'C$,$\angle PCP'=60°$,可知 $\triangle PCP'$ 为__①__三角形,故 $PP'=PC$,又 $P'A'=PA$,故 $PA+PB+PC=PA'+PB+PP'\geqslant A'B$,

由__②__可知,当 B,P,P',A 在同一条直线上时,$PA+PB+PC$ 取最小值,如图2,最小值为 $A'B$,此时的 P 点为该三角形的"费马点",且有 $\angle APC=\angle BPC=\angle APB=$__③__;

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$ 时,"费马点"为该三角形的某个顶点. 如图3,若 $\angle BAC\geqslant$

120°,则该三角形的“费马点”为 ④ 点.

(2) 如图 4,在 $\triangle ABC$ 中,三个内角均小于 120°,且 $AC=3$,$BC=4$,$\angle ACB=30°$,已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”,求 $PA+PB+PC$ 的值;

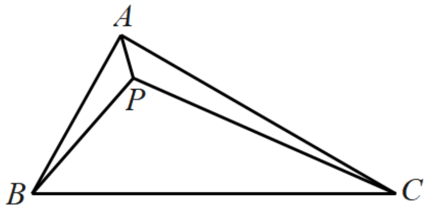


图4

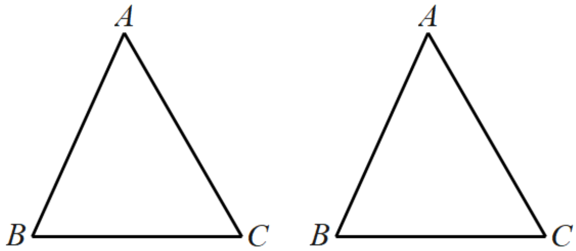
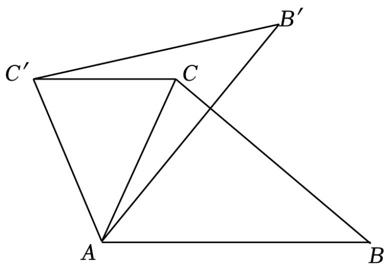


图5

(3) 如图 5,设村庄 A,B,C 的连线构成一个三角形,且已知 $AC=4\text{km}$,$BC=2\sqrt{3}\text{km}$,$\angle ACB=60°$. 现欲建一中转站 P 沿直线向 A,B,C 三个村庄铺设电缆,已知由中转站 P 到村庄 A,B,C 的铺设成本分别为 a 元/km,a 元/km,$\sqrt{2}a$ 元/km,选取合适的 P 的位置,可以使总的铺设成本最低为________________元. (结果用含 a 的式子表示)

典型例题

题目 6 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle CAB=65°$,将 $\triangle ABC$ 在平面内绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置,使 $CC' \parallel AB$,则旋转角的度数为 (　　)

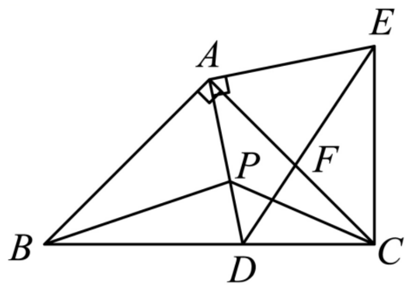


A. 40°　　B. 30°　　C. 50°　　D. 65°

题目 7 已知点 P 是 ΔABC 内一点,且它到三角形的三个顶点距离之和最小,则 P 点叫 ΔABC 的费马点 (*Fermatpoint*). 已经证明:在三个内角均小于 120° 的 ΔABC 中,当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120°$ 时,P 就是 ΔABC 的费马点. 若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点,则 $PD+PE+PF=$ (　　)

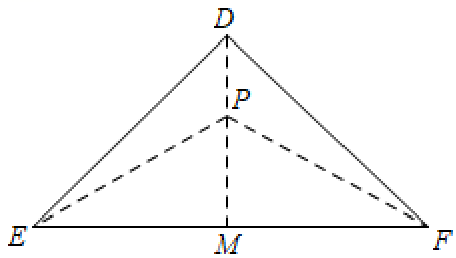
A. $2\sqrt{3}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $3\sqrt{3}$

题目 8 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，点 D 是 BC 边上的动点(不与点 B、C 重合)，DE 与 AC 交于点 F，连结 CE．下列结论：① $BD=CE$；② $\angle DAC=\angle CED$；③若 $BD=2CD$，则 $\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4}{5}$；④在 $\triangle ABC$ 内存在唯一一点 P，使得 $PA+PB+PC$ 的值最小，若点 D 在 AP 的延长线上，且 AP 的长为 2，则 $CE=2+\sqrt{3}$．其中含所有正确结论的选项是（　　）

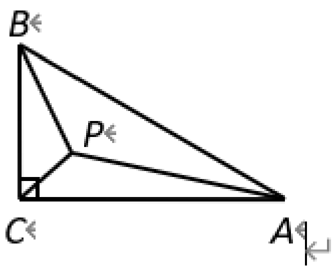


A. ①②④　　　B. ①②③　　　C. ①③④　　　D. ①②③④

题目 9 如果点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则 P 点叫 $\triangle ABC$ 的费马点．已经证明：在三个内角均小于 120° 的 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$ 时，P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点．若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点，则 $PD+PE+PF=$ ________

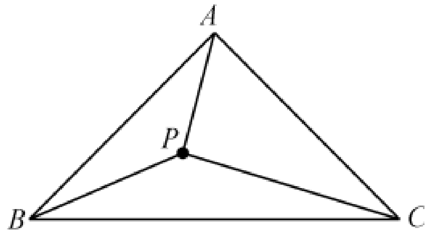


题目 10 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AB=2$，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为 ______．

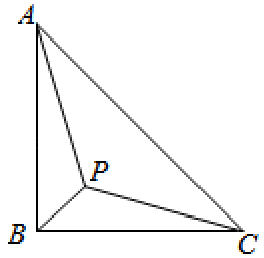


题目 11 已知：到三角形 3 个顶点距离之和最小的点称为该三角形的费马点．如果 $\triangle ABC$ 是锐角(或直角)三角形，则其费马点 P 是三角形内一点，且满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$．(例如：等边三角形的费马点是其三条高的交点)．若 $AB=AC=\sqrt{7}$，$BC=2\sqrt{3}$，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，则 $PA+PB+PC=$ ______；若 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$AC=4$，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，则 $PA+PB+PC=$ ______．

题目 12 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=90^\circ$，$AB=AC=1$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，求 $PA+PB+PC$ 的最小值为 ______．



题目 13 在 $\triangle ABC$ 中，若其内部的点 P 满足 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点．如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle BAC = 45°$，设 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，且满足 $\angle PBA = 45°$，$PA = 4$，则 $\triangle PAC$ 的面积为__________．



题目 14 数学上称“费马点”是位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点．现定义：菱形对角线上一点到该对角线同侧两条边上的两点距离最小的点称为类费马点．例如：菱形 $ABCD$，P 是对角线 BD 上一点，E、F 是边 BC 和 CD 上的两点，若点 P 满足 PE 与 PF 之和最小，则称点 P 为类费马点．

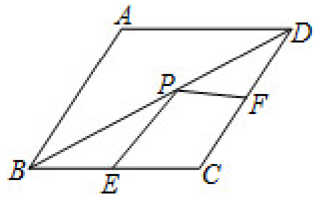


图 1

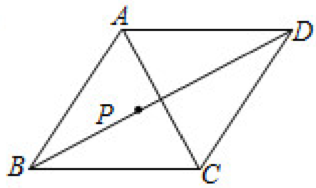


图 2

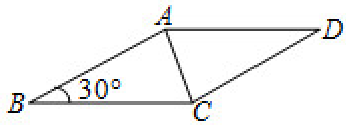


图 3

(1) 如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 4$，点 P 是 BD 上的类费马点

①E 为 BC 的中点，F 为 CD 的中点，则 $PE + PF =$______．

②E 为 BC 上一动点，F 为 CD 上一动点，且 $\angle ABC = 60°$，则 $PE + PF =$______．

(2) 如图 2，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = 4$，连接 AC，点 P 是 ΔABC 的费马点，(即 PA，PB，PC 之和最小)，①当 $\angle ABC = 60°$ 时，$BP =$______．

②当 $\angle ABC = 30°$ 时，你能找到 ΔABC 的费马点 P 吗？画图做简要说明，并求此时 $PA + PB + PC$ 的值．

题目 15 如图1，$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle ABC=90°$，点D为$\triangle ABC$外一点，连接AD，过点A作$AE\perp AD$，交BC于点E，过点D作$DH\perp AB$，垂足为H，$HD=BC$.

(1) 求证：$AE=AD$；

(2) 如图2，延长AB到点G，连接GD，使得$\angle HGD=\angle ADH$，F为AC上一点，连接FG、FE，若$FE\perp AE$. 求证：$EF+GF=GD$；

(3) 如图3，点K在$\triangle GHD$内，连接KG、KH、KD，当$KG+KH+KD$的值最小时，直接写出$\angle KGH+\angle KDH$的值.

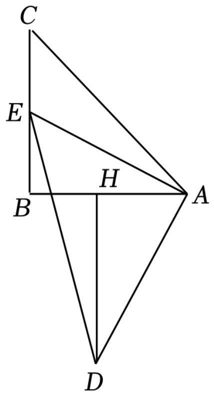


图1

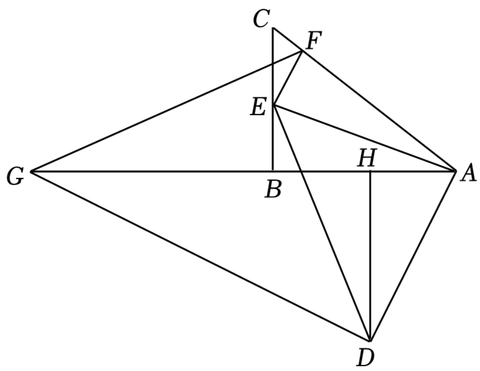


图2

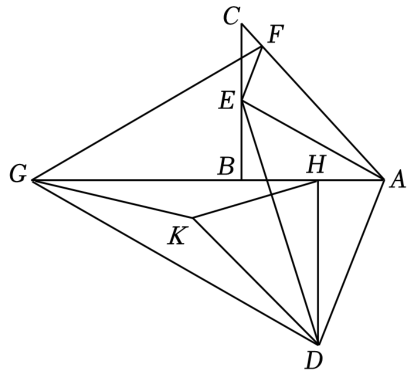


图3

题目 16 如图1，P是锐角$\triangle ABC$所在平面上一点. 如果$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，则点$P$就叫做$\triangle ABC$费马点.

(1) 当$\triangle ABC$是边长为4的等边三角形时，费马点P到BC边的距离为__________.

(2) 若点P是$\triangle ABC$的费马点，$\angle ABC=60°$，$PA=2$，$PC=3$，则PB的值为______.

(3) 如图2，在锐角$\triangle ABC$外侧作等边$\triangle ACB'$，连接BB'. 求证：BB'过$\triangle ABC$的费马点P.

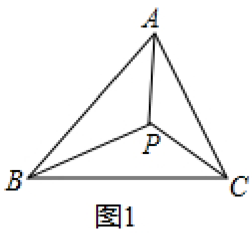


图1

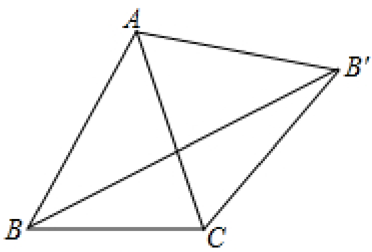
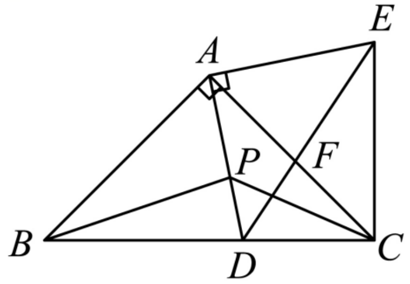


图2

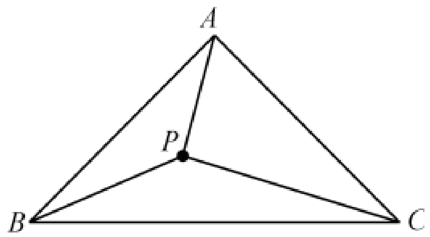
课后专题练

题目 1 如图，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90^\circ$，点$D$是$BC$边上的动点(不与点$B$、$C$重合)，$DE$与$AC$交于点$F$，连结$CE$．下列结论：①$BD=CE$；②$\angle DAC=\angle CED$；③若$BD=2CD$，则$\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4}{5}$；④在$\triangle ABC$内存在唯一一点$P$，使得$PA+PB+PC$的值最小，若点$D$在$AP$的延长线上，且$AP$的长为2，则$CE=2+\sqrt{3}$．其中含所有正确结论的选项是（　　）



A. ①②④　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ①②③④

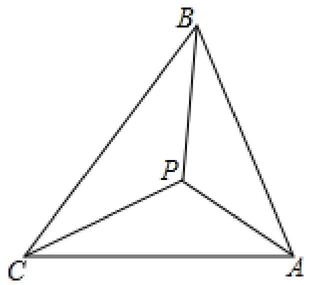
题目 2 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=90^\circ$，$AB=AC=1$，P是$\triangle ABC$内一点，求$PA+PB+PC$的最小值为______．



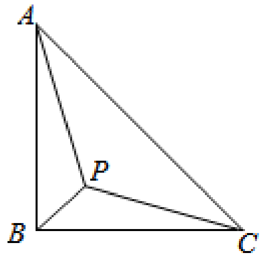
题目 3 已知点P是$\triangle ABC$内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则P点叫$\triangle ABC$的费马点($Fermat\ \ point$)．已经证明：在三个内角均小于120°的$\triangle ABC$中，当$\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$时，$P$就是$\triangle ABC$的费马点．若点$P$是腰长为6的等腰直角三角形$DEF$的费马点，则$PD+PE+PF=$（　　）

A. 6　　B. $3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. 9

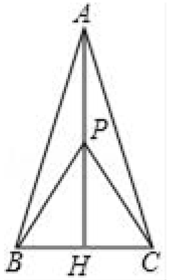
题目 4 法国数学家费马提出：在$\triangle ABC$内存在一点P，使它到三角形顶点的距离之和最小．人们称这个点为费马点，此时$PA+PB+PC$的值为费马距离．经研究发现：在锐角$\triangle ABC$中，费马点P满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$，如图，点$P$为锐角$\triangle ABC$的费马点，且$PA=3$，$PC=4$，$\angle ABC=60^\circ$，则费马距离为______．



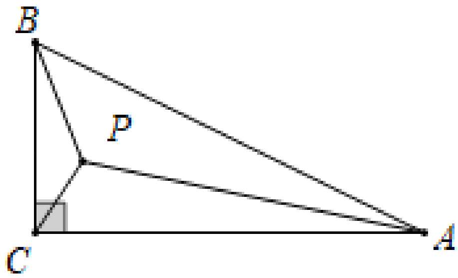
题目 5 在$\triangle ABC$中，若其内部的点P满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$，则称$P$为$\triangle ABC$的费马点．如图所示，在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=45^\circ$，设$P$为$\triangle ABC$的费马点，且满足$\angle PBA=45^\circ$，$PA=4$，则$\triangle PAC$的面积为________．



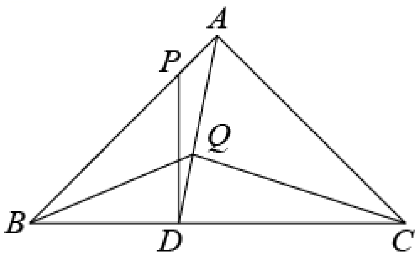
题目 6 如图，$\triangle ABC$中，$\angle BAC=30^\circ$且$AB=AC$，P是底边上的高AH上一点．若$AP+BP+CP$的最小值为$2\sqrt{2}$，则$BC=$ ______．



题目 7 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AB=2$．若点P是$\triangle ABC$内一点，则$PA+PB+PC$的最小值为 ______．



题目 8 如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC$，点P是AB边上一动点，作$PD\perp BC$于点D，线段AD上存在一点Q，当$QA+QB+QC$的值取得最小值，且$AQ=2$时，则$PD=$ ______．



题目 9 背景资料：在已知$\triangle ABC$所在平面上求一点P，使它到三角形的三个顶点的距离之和最小．这个问题是法国数学家费马1640年前后向意大利物理学家托里拆利提出的，所求的点被人们称为“费马点”．如图1，当$\triangle ABC$三个内角均小于120°时，费马点P在$\triangle ABC$内部，当$\angle APB=\angle APC=\angle CPB=120^\circ$时，则$PA+PB+PC$取得最小值．

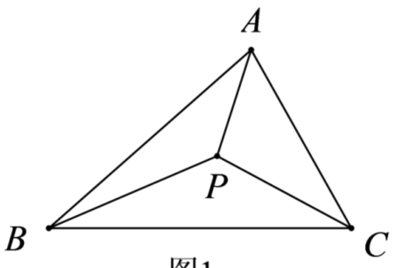


图1

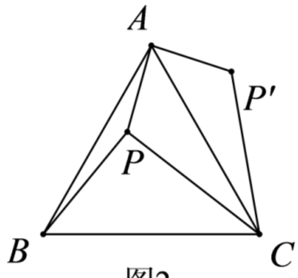


图2

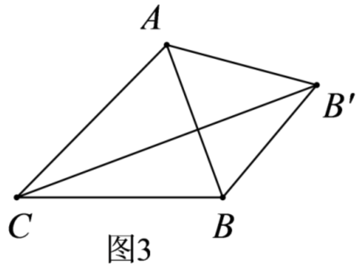


图3

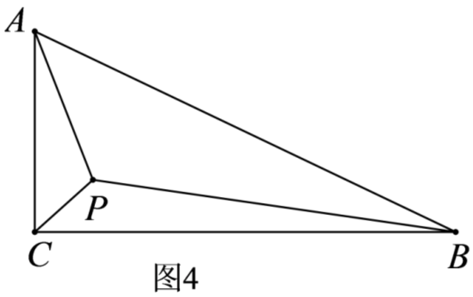


图4

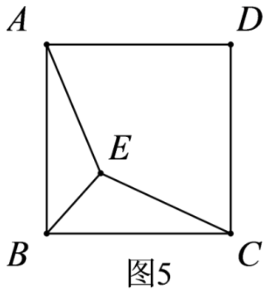


图5

(1) 如图2，等边$\triangle ABC$内有一点P，若点P到顶点A、B、C的距离分别为3，4，5，求$\angle APB$的度数，为了解决本题，我们可以将$\triangle ABP$绕顶点A旋转到$\triangle ACP'$处，此时$\triangle ACP' \cong \triangle ABP$这样就可以利用旋转变换，将三条线段$PA$、$PB$、$PC$转化到一个三角形中，从而求出$\angle APB=$______；

知识生成：怎样找三个内角均小于120°的三角形的费马点呢？为此我们只要以三角形一边在外侧作等边三角形并连接等边三角形的顶点与$\triangle ABC$的另一顶点，则连线通过三角形内部的费马点．请同学们探索以下问题．

(2) 如图3，$\triangle ABC$三个内角均小于120°，在$\triangle ABC$外侧作等边三角形$\triangle ABB'$，连接CB'，求证：CB'过$\triangle ABC$的费马点．

(3) 如图4，在$RT\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=1$，$\angle ABC=30°$，点P为$\triangle ABC$的费马点，连接AP、BP、CP，求$PA+PB+PC$的值．

(4) 如图5，在正方形$ABCD$中，点E为内部任意一点，连接AE、BE、CE，且边长$AB=2$；求$AE+BE+CE$的最小值．

题目 10 探究题

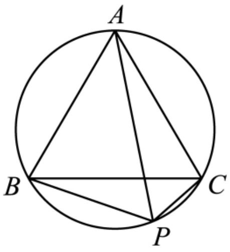


图1

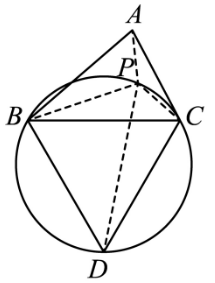


图2

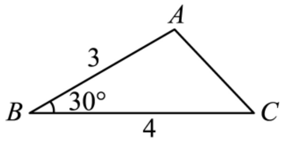


图3

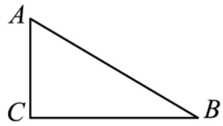


图4

(1) 知识储备:①如图1,已知点P为等边$\triangle ABC$外接圆的弧BC上任意一点.求证:$PB+PC=PA$.

②定义:在$\triangle ABC$所在平面上存在一点P,使它到三角形三顶点的距离之和最小,则称点P为$\triangle ABC$的费马点,此时$PA+PB+PC$的值为$\triangle ABC$的费马距离.

(2) 知识迁移:我们有如下探寻$\triangle ABC$(其中$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$均小于$120°$)的费马点和费马距离的方法:如图2,在$\triangle ABC$的外部以BC为边长作等边$\triangle BCD$及其外接圆,根据(1)的结论,易知线段______的长度即为$\triangle ABC$的费马距离.

(3) 知识应用:①如图3所示的$\triangle ABC$(其中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$均小于$120°$),$AB=3$,$BC=4$,$\angle ABC=30°$,现取一点P,使点P到A、B、C三点的距离之和最小,求最小值;

②如图4,若三个村庄A、B、C构成$Rt\triangle ABC$,其中$AC=6\text{km}$,$BC=4\sqrt{3}\text{km}$,$\angle C=90°$.现选取一点P打水井,使P点到三个村庄A、B、C铺设的输水管总长度最小,画出点P所对应的位置,输水管总长度的最小值为______.(直接写结果)

题目 11 如图(1),P为$\triangle ABC$所在平面上一点,且$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$,则点$P$叫做$\triangle ABC$的费马点.

(1) 如果点P为锐角$\triangle ABC$的费马点,且$\angle ABC=60°$.

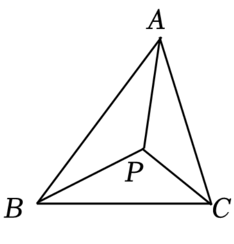
①求证:$\triangle ABP\backsim\triangle BCP$;

②若$PA=3$,$PC=4$,则$PB=$____________.

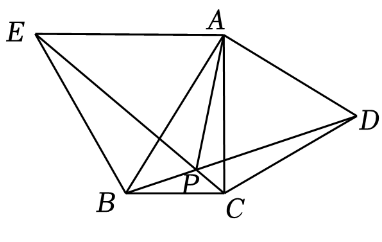
(2) 已知锐角$\triangle ABC$,分别以AB、AC为边向外作正$\triangle ABE$和正$\triangle ACD$,CE和BD相交于P点.如图(2)

①求$\angle CPD$的度数;

②求证:P点为$\triangle ABC$的费马点.



(1)



(2)

题目 12 定义:在一个等腰三角形底边的高线上所有点中,到三角形三个顶点距离之和最小的点叫做这个等腰三角形的"近点","近点"到三个顶点距离之和叫做这个等腰三角形的"最近值".

【基础巩固】

(1) 如图1,在等腰$Rt\triangle ABC$中,$\angle BAC=90°$,AD为BC边上的高,已知AD上一点E满足$\angle DEC=60°$,$AC=4\sqrt{6}$,求$AE+BE+CE=$____________;

【尝试应用】

(2) 如图2，等边三角形 ABC 边长为 $4\sqrt{3}$，E 为高线 AD 上的点，将三角形 AEC 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到三角形 AFG，连接 EF，请你在此基础上继续探究求出等边三角形 ABC 的“最近值”；

【拓展提高】

(3) 如图3，在菱形 $ABCD$ 中，过 AB 的中点 E 作 AB 垂线交 CD 的延长线于点 F，连接 AC、DB，已知 $\angle BDA=75^\circ$，$AB=6$，求三角形 AFB“最近值”的平方.

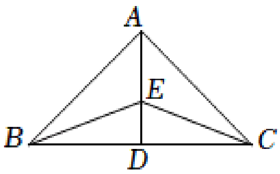


图1

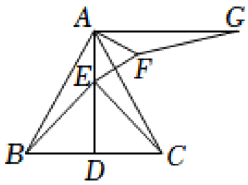


图2

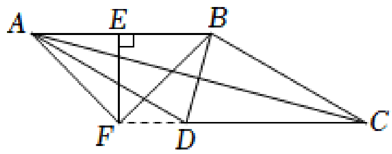


图3

题目 13 如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，点 E、F 分别是 AB、BC 上的动点，连接 DE、DF、EF.

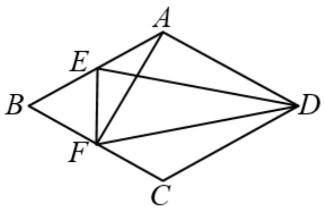


图 1

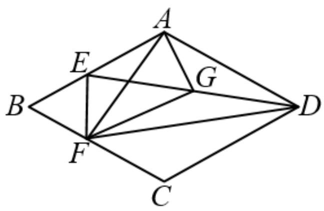


图 2

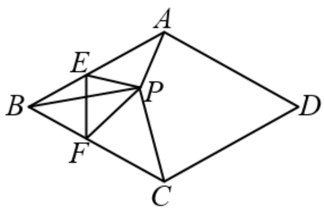


图 3

(1) 如图1，连接 AF，若 $AF\perp BC$，E 为 AB 的中点，且 $EF=5$，求 DF 的长；

(2) 如图2，若 $BE=BF$，G 为 DE 的中点，连接 AF、AG、FG，求证：$AG\perp FG$；

(3) 如图3，若 $AB=7$，将 $\triangle BEF$ 沿 EF 翻折得到 $\triangle EFP$（始终保持点 P 在菱形 $ABCD$ 的内部），连接 AP、BP 及 CP，请直接写出当 $PA+PB+PC$ 值最小时 PB 的长.

几何最值模型之费马点模型

皮耶·德·费马，17世纪法国数学家，有“业余数学家之王”的美誉，之所以叫业余并非段位不够，而是因为其主职是律师，兼职搞搞数学．费马在解析几何、微积分等领域都有卓越的贡献，除此之外，费马广为人知的是以其名字命名的“费马小定理”、“费马大定理”等．**费马点：**三角形内的点到三个顶点距离之和最小的点。

费马点问题是由全等三角形中的手拉手模型衍生而来，主要考查转化与化归等的数学思想，在各类考试中都以中高档题为主。本专题就最值模型中的费马点问题进行梳理及对应试题分析，方便掌握。

模型分析

模型：费马点模型

1. 费马点模型概念：数学上称，到三角形3个顶点距离之和最小的点为费马点。
2. 解题依据：旋转变换。
3. 解题策略：构造等边三角形共顶点旋转，通过旋转把三条线段凑在一起顺次相连。
4. 解题思路：化折为直，共线时求最值。
5. 费马点的作法：分别以$\triangle ABC$的AB、AC为一边向外作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACF$，连接CE、BF，设交点为M，则点M即为$\triangle ABC$的费马点。

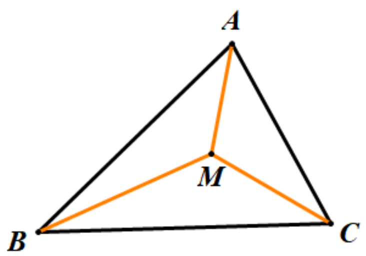
模型展示

模型①：费马点模型

【模型解读】

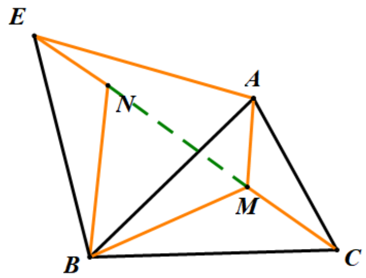
结论1：如图，点M为$\triangle ABC$内任意一点，连接AM、BM、CM，当M与三个顶点连线的夹角为120°时，$MA+MB+MC$的值最小。

注意：上述结论成立的条件是$\triangle ABC$的最大的角要小于120°，若最大的角大于或等于120°，此时费马点就是最大角的顶点A。(这种情况一般不考，通常三角形的最大顶角都小于120°)



【模型解析①】构造等边三角形共顶点旋转

以AB为一边向外作等边三角形$\triangle ABE$，将BM绕点B逆时针旋转60°得到BN，连接EN.



$\because \triangle ABE$为等边三角形，$\therefore AB=BE$，$\angle ABE=60^\circ$．而$\angle MBN=60^\circ$，$\therefore \angle ABM=\angle EBN$．

在$\triangle AMB$与$\triangle ENB$中，$\because \begin{cases} AB=BE \\ \angle ABM=\angle EBN \\ BM=BN \end{cases}$，$\therefore \triangle AMB\cong\triangle ENB(SAS)$．

连接MN．由$\triangle AMB\cong\triangle ENB$知，$AM=EN$．$\because \angle MBN=60^\circ$，$BM=BN$，$\therefore \triangle BMN$为等边三角形．

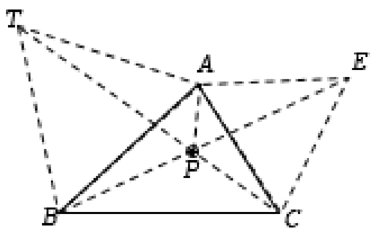
$\therefore BM=MN$．$\therefore AM+BM+CM=EN+MN+CM$．$\therefore$当$E$、$N$、$M$、$C$四点共线时，$AM+BM+CM$的值最小．

此时，$\angle BMC=180^\circ-\angle NMB=120^\circ$；$\angle AMB=\angle ENB=180^\circ-\angle BNM=120^\circ$；

$\angle AMC=360^\circ-\angle BMC-\angle AMB=120^\circ$．

【模型解析②】“手拉手模型”原理

在$\triangle ABC$的外侧，分别作等边$\triangle ABT$、等边$\triangle ACE$，连接CT、BE相交于点P，



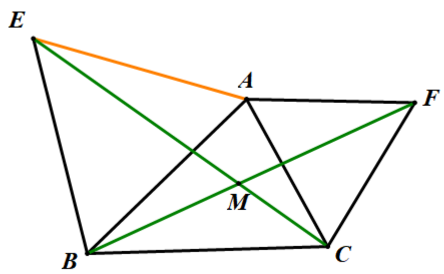
此时$\angle BPT=60^\circ$，

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$(参见“手拉手模型－全等”)，

点P就是$\triangle ABC$的费马点，

费马距离等于CT或BE．

【模型解析③】费马点的作法



如图，分别以$\triangle ABC$的AB、AC为一边向外作等边$\triangle ABE$和等边$\triangle ACF$，连接CE、BF，设交点为M，则点M即为$\triangle ABC$的费马点。

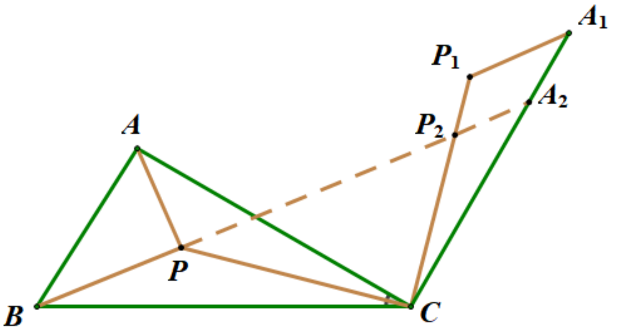
【最值原理】两点之间，线段最短。

模型②:加权费马点模型

结论2:点 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内任意一点,连接 AP、BP、CP,求 $xAP+yBP+zCP$ 最小值。

【模型解析】第一步,选定固定不变线段;第二步,对剩余线段进行缩小或者放大。

如:保持 BP 不变,$xAP+yBP+zCP=y\left(\frac{x}{y}AP+BP+\frac{z}{y}CP\right)$,如图,$B$、$P$、$P_2$、$A_2$ 四点共线时,取得最小值。



模型特征:$PA+PB+PC$(P 为动点)

①一动点,三定点;

②以三角形的三边向外作等边三角形的,再分别将所作等边三角形最外的顶点与已知三角形且与所作等边三角形相对的顶点相连,连线的交点即为费马点;

③同时线段前可以有不为1的系数出现,即:加权费马点。

经典例题精析

【经典例题】

例 1 1643年,法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题:给定不在同一条直线上的三个点 A,B,C,求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置,意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明,该点也被称为"费马点"或"托里拆利点",该问题也被称为"将军巡营"问题.

(1) 下面是该问题的一种常见的解决方法,请补充以下推理过程:(其中①处从"直角"和"等边"中选择填空,②处从"两点之间线段最短"和"三角形两边之和大于第三边"中选择填空,③处填写角度数,④处填写该三角形的某个顶点)

当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$ 时,

如图1,将 $\triangle APC$ 绕,点 C 顺时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'P'C$,连接 PP',

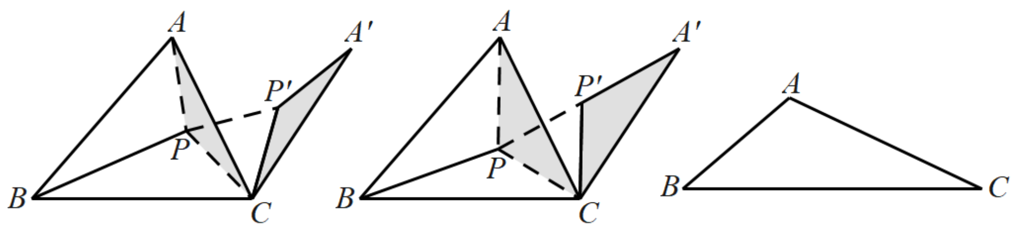


图1　　图2　　图3

由 $PC=P'C$,$\angle PCP'=60°$,可知 $\triangle PCP'$ 为<u> ① </u>三角形,故 $PP'=PC$,又 $P'A'=PA$,故 $PA+PB+PC=PA'+PB+PP'\geqslant A'B$,

由<u> ② </u>可知,当 B,P,P',A 在同一条直线上时,$PA+PB+PC$ 取最小值,如图2,最小值为 $A'B$,此时的 P 点为该三角形的"费马点",且有 $\angle APC=\angle BPC=\angle APB=$<u> ③ </u>;

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$ 时,"费马点"为该三角形的某个顶点. 如图3,若 $\angle BAC\geqslant$

120°，则该三角形的“费马点”为__④__点.

(2) 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，三个内角均小于 120°，且 $AC=3$，$BC=4$，$\angle ACB=30°$，已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”，求 $PA+PB+PC$ 的值；

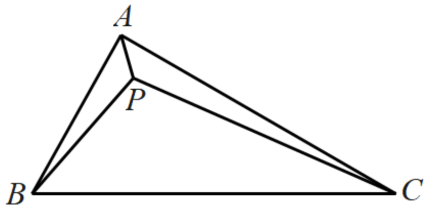


图4

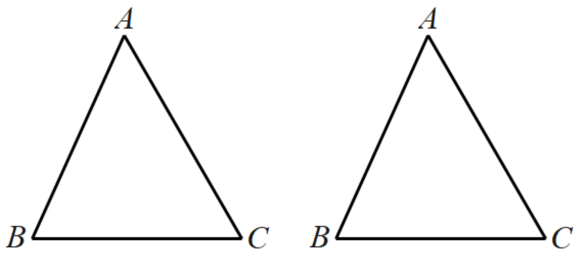


图5

(3) 如图 5，设村庄 A，B，C 的连线构成一个三角形，且已知 $AC=4\text{km}$，$BC=2\sqrt{3}\text{km}$，$\angle ACB=60°$．现欲建一中转站 P 沿直线向 A，B，C 三个村庄铺设电缆，已知由中转站 P 到村庄 A，B，C 的铺设成本分别为 a 元 /km，a 元 /km，$\sqrt{2}a$ 元 /km，选取合适的 P 的位置，可以使总的铺设成本最低为________________元．(结果用含 a 的式子表示)

【答案】(1) ①等边；②两点之间线段最短；③ 120°；④ A．(2)5(3)$2\sqrt{13}a$

【分析】(1) 根据旋转的性质和两点之间线段最短进行推理分析即可得出结论；

(2) 根据 (1) 的方法将 $\triangle APC$ 绕，点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$，即可得出可知当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$，在根据 $\angle ACB=30°$ 可证明 $\angle ACA'=\angle A'CP'+\angle BCP+\angle PCP'=90°$，由勾股定理求 $A'B$ 即可，

(3) 由总的铺设成本 $=a(PA+PB+\sqrt{2}PC)$，通过将 $\triangle APC$ 绕，点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$，得到等腰直角 $\triangle PP'C$，得到 $\sqrt{2}PC=PP'$，即可得出当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$P'A'+PB+PP'$ 取最小值，即 $PA+PB+\sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$，然后根据已知和旋转性质求出 $A'B$ 即可．

【详解】(1) 解：$\because PC=P'C$，$\angle PCP'=60°$，

$\therefore \triangle PCP'$ 为等边三角形；$\therefore PP'=PC$，$\angle P'PC=\angle PP'C=60°$，

又 $P'A'=PA$，故 $PA+PB+PC=PA'+PB+PP'\geqslant A'B$，

由两点之间线段最短可知，当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，

最小值为 $A'B$，此时的 P 点为该三角形的“费马点”，

$\therefore \angle BPC+\angle P'PC=180°$，$\angle A'P'C+\angle PP'C=180°$，$\therefore \angle BPC=120°$，$\angle A'P'C=120°$，

又 $\because \triangle APC\cong\triangle A'P'C$，$\therefore \angle APC=\angle AP'C=120°$，

$\therefore \angle APB=360°-\angle APC-\angle BPC=120°$，$\therefore \angle APC=\angle BPC=\angle APB=120°$；

$\because \angle BAC\geqslant 120°$，$\therefore BC>AC$，$BC>AB$，$\therefore BC+AB>AC+AB$，$BC+AC>AB+AC$，

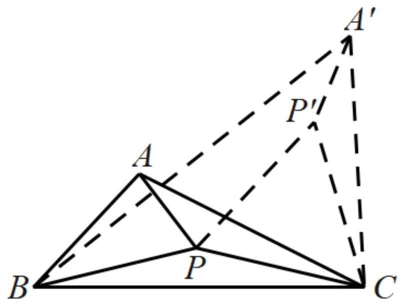
$\therefore$ 三个顶点中，顶点 A 到另外两个顶点的距离和最小．

又 $\because$ 已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时，“费马点”为该三角形的某个顶点．

$\therefore$ 该三角形的“费马点”为点 A，故答案为：①等边；②两点之间线段最短；③ 120°；④ A．

(2) 将 $\triangle APC$ 绕，点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$，连接 PP'，

由 (1) 可知当 B，P，P'，A 在同一条直线上时，$PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$，



$\because \angle ACP=\angle A'CP'$，$\therefore \angle ACP+\angle BCP=\angle A'CP'+\angle BCP=\angle ACB=30°$，

又$\because \angle PCP'=60°$ $\therefore \angle BCA'=\angle A'CP'+\angle BCP+\angle PCP'=90°$，

由旋转性质可知：$AC=A'C=3$，$\therefore A'B=\sqrt{BC^2+A'C^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore PA+PB+PC$最小值为5，

(3)$\because$总的铺设成本$=PA\cdot a+PB\cdot a+PC\cdot \sqrt{2}a=a(PA+PB+\sqrt{2}PC)$

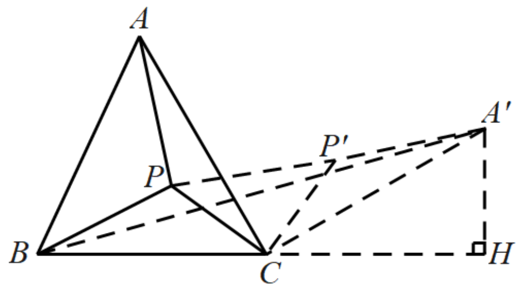
$\therefore$当$PA+PB+\sqrt{2}PC$最小时，总的铺设成本最低，

将$\triangle APC$绕，点C顺时针旋转$90°$得到$\triangle A'P'C$，连接PP'，$A'B$

由旋转性质可知：$P'C=PC$，$\angle PCP'=\angle ACA'=90°$，$P'A'=PA$，$A'C=AC=4\text{km}$，

$\therefore PP'=\sqrt{2}PC$，$\therefore PA+PB+\sqrt{2}PC=P'A'+PB+PP'$，

当B，P，P'，A在同一条直线上时，$P'A'+PB+PP'$取最小值，即$PA+PB+\sqrt{2}PC$取最小值为$A'B$，



过点A'作$A'H\perp BC$，垂足为H，$\because \angle ACB=60°$，$\angle ACA'=90°$，$\therefore \angle A'CH=30°$，

$\therefore A'H=\frac{1}{2}A'C=2\text{km}$，$\therefore HC=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}(\text{km})$，

$\therefore BH=BC+CH=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}(\text{km})$，$\therefore A'B=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+2^2}=2\sqrt{13}(\text{km})$

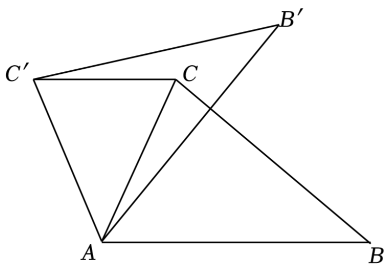
$PA+PB+\sqrt{2}PC$的最小值为$2\sqrt{13}\text{km}$

总的铺设成本$=PA\cdot a+PB\cdot a+PC\cdot \sqrt{2}a=a(PA+PB+\sqrt{2}PC)=2\sqrt{13}a$(元) 故答案为：$2\sqrt{13}a$

【点睛】本题考查了费马点求最值问题，涉及到的知识点有旋转的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理，以及两点之间线段最短等知识点，读懂题意，利用旋转作出正确的辅助线是解本题的关键.

典型例题

题目 6 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=65°$，将$\triangle ABC$在平面内绕点A旋转到$\triangle AB'C'$的位置，使$CC'\parallel AB$，则旋转角的度数为（　　）



A. 40°　　B. 30°　　C. 50°　　D. 65°

【答案】C.

【分析】根据两直线平行,内错角相等可得 $\angle ACC'=\angle CAB$,根据旋转的性质可得 $AC=AC'$,然后利用等腰三角形两底角相等求 $\angle CAC'$,再根据 $\angle CAC'$、$\angle BAB'$ 都是旋转角解答.

【详解】解:$\because CC' \parallel AB$,

$\therefore \angle ACC'=\angle CAB=65^\circ$,

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 旋转得到 $\triangle AB'C'$,

$\therefore AC=AC'$,

$\therefore \angle CAC'=180^\circ-2\angle ACC'=180^\circ-2\times65^\circ=50^\circ$,

$\therefore \angle CAC'=\angle BAB'=50^\circ$.

故选:C.

【点睛】本题考查了旋转的性质,等腰三角形两底角相等的性质,熟记性质并准确识图是解题的关键.

题目 7 已知点 P 是 ΔABC 内一点,且它到三角形的三个顶点距离之和最小,则 P 点叫 ΔABC 的费马点 ($Fermatpoint$). 已经证明:在三个内角均小于 120° 的 ΔABC 中,当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$ 时,P 就是 ΔABC 的费马点. 若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点,则 $PD+PE+PF=$ (　　)

A. $2\sqrt{3}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $3\sqrt{3}$

【答案】B.

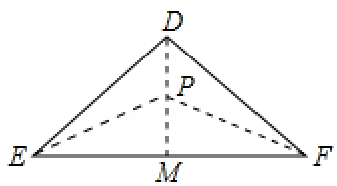
【分析】根据题意首先画出图形,过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 M,在 ΔBDE 内部过 E、F 分别作 $\angle MEP=\angle MFP=30^\circ$,则 $\angle EPF=\angle FPD=\angle EPD=120^\circ$,点 P 就是费马点,求出 PE,PF,DP 的长即可解决问题。

【详解】解:如图:过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 M,在 ΔBDE 内部过 E、F 分别作 $\angle MEP=\angle MFP=30^\circ$,则 $\angle EPF=\angle FPD=\angle EPD=120^\circ$,点 P 就是费马点,

在等腰 $Rt\Delta DEF$ 中,$DE=DF=\sqrt{2}$,$DM\perp EF$,

$\therefore EF=\sqrt{2}DE=2$

$\therefore EM=DM=1$,



故 $\cos30^\circ=\dfrac{EM}{PE}$,

解得:$PE=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,则 $PM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

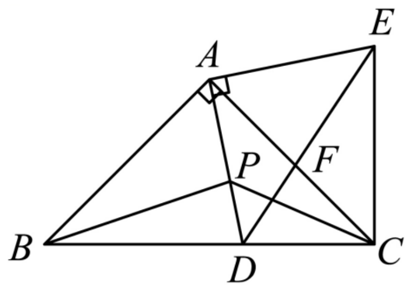
故 $DP=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,同法可得 $PF=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

则 $PD+PE+PF=2\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+1$.

故选:B.

【点睛】此题主要考查了解直角三角形,正确画出图形进而求出 PE 的长是解题关键。

题目 8 如图，$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，点$D$是$BC$边上的动点(不与点$B$、$C$重合)，$DE$与$AC$交于点$F$，连结$CE$. 下列结论：①$BD=CE$；②$\angle DAC=\angle CED$；③若$BD=2CD$，则$\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4}{5}$；④在$\triangle ABC$内存在唯一一点$P$，使得$PA+PB+PC$的值最小，若点$D$在$AP$的延长线上，且$AP$的长为2，则$CE=2+\sqrt{3}$. 其中含所有正确结论的选项是 (　　)



A. ①②④　　B. ①②③　　C. ①③④　　D. ①②③④

【答案】B

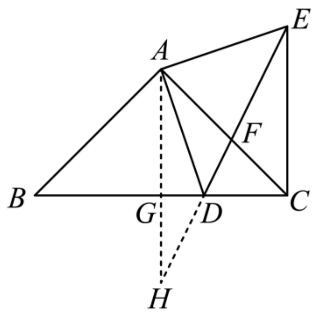
【分析】证明$\triangle BAD\cong\triangle CAE$，即可判断①，根据①可得$\angle ADB=\angle AEC$，由$\angle ADC+\angle AEC=180°$可得$A,D,C,E$四点共圆，进而可得$\angle DAC=\angle DEC$，即可判断②，过点$A$作$AG\perp BC$于$G$，交$ED$的延长线于点$H$，证明$\triangle FAH\backsim\triangle FCE$，根据相似三角形的性质可得$\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4}{5}$，即可判断③，将$\triangle APC$绕$A$点逆时针旋转60度，得到$\triangle AB'P'$，则$\triangle APP'$是等边三角形，根据当$B',P',P,C$共线时，$PA+PB+PC$取得最小值，可得四边形$ADCE$是正方形，勾股定理求得$DP$，根据$CE=AD=AP+PD$即可判断④.

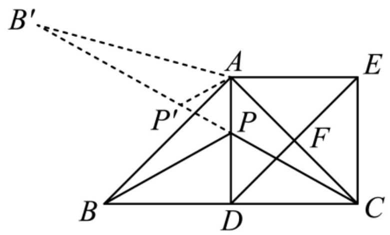
【详解】解：$\because\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle DAE=90°$，

$\therefore AB=AC,AD=AE,\angle BAD=\angle CAE\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE\therefore BD=CE$故①正确；

$\because\triangle BAD\cong\triangle CAE\therefore\angle ADB=\angle AEC\therefore\angle ADC+\angle AEC=180°\therefore A,D,C,E$四点共圆，

$\because CD=CD\therefore\angle DAC=\angle DEC$故②正确；如图，过点$A$作$AG\perp BC$于$G$，交$ED$的延长线于点$H$，





$\because\triangle BAD\cong\triangle CAE,\therefore\angle ACE=\angle ABD=45°,\angle ACB=45°\therefore\angle DCE=90°\therefore FC\,/\!/\,AH$

$\because BD=2CD,BD=CE\therefore\tan\angle DEC=\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{1}{2},\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{1}{3}$

设$BC=6a$，则$DC=2a$，$AG=\dfrac{1}{2}BC=3a$，$EC=2DC=4a$则$GD=GC-DC=3a-2a=a$

$\because FC\,/\!/\,AH\therefore\tan H=\dfrac{GD}{GH}=\dfrac{1}{2}\therefore GH=2GD=2a\therefore AH=AG+GH=3a+2a=5a$

$AH\,/\!/\,CE$，$\therefore\triangle FAH\backsim\triangle FCE\therefore\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{CE}{AH}\therefore\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4a}{5a}=\dfrac{4}{5}$则$\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{4}{5}$；故③正确

如图，将$\triangle ABP$绕A点逆时针旋转60度，得到$\triangle AB'P'$，则$\triangle APP'$是等边三角形，

$\therefore PA+PB+PC=PP'+P'B'+PC\geqslant B'C$，当$B',P',P,C$共线时，$PA+PB+PC$取得最小值，

此时$\angle CPA=180°-\angle APP'=180°-60°=120°$，$\angle APB=\angle AP'B'=180°-\angle AP'P=180°-60°=120°$，

$\angle BPC=360°-\angle BPA-\angle APC=360°-120°-120°=120°$，此时$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$，

$\because AC=AB=AB'$, $AP=AP'$, $\angle APC=\angle AP'B'$, $\therefore \triangle AP'B'\cong\triangle APC$, $\therefore PC=P'B'=PB$,

$\because \angle APP'=\angle DPC=60^\circ$, $\therefore DP$ 平分 $\angle BPC$, $\therefore PD\perp BC$,

$\because A,D,C,E$ 四点共圆，　　$\therefore \angle AEC=\angle ADC=90^\circ$,

又 $AD=DC=BD$,$\triangle BAD\cong\triangle CAE$, $\therefore AE=EC=AD=DC$,则四边形 $ADCE$ 是菱形，

又 $\angle ADC=90^\circ$, $\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是正方形，

$\because \angle B'AC=\angle B'AP'+\angle PAC+\angle P'AP=90^\circ+60^\circ=150^\circ$,

则 $B'A=BA=AC$, $\angle B'=\angle ACB'=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B'AC)=15^\circ$,

$\because \angle PCD=30^\circ$, $\therefore DC=\sqrt{3}PD$,

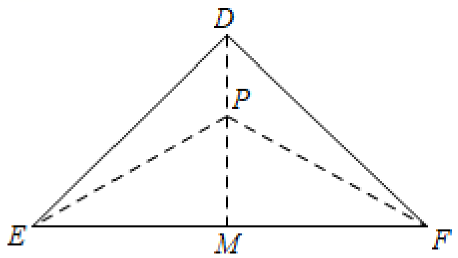
$\because DC=AD$, $AP=2$,则 $AP=AD-DP=(\sqrt{3}-1)DP=2$,

$\therefore DP=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$,

$\because AP=2$, $\therefore CE=AD=AP+PD=\sqrt{3}+3$,故④不正确，故选 B.

【点睛】本题考查了旋转的性质，费马点，圆内接四边形的性质，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，勾股定理，解直角三角形，正方形的性质与判定，掌握以上知识是解题的关键。

题目 9 如果点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且它到三角形的三个顶点距离之和最小，则 P 点叫 $\triangle ABC$ 的费马点．已经证明：在三个内角均小于 120° 的 $\triangle ABC$ 中，当 $\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$ 时，P 就是 $\triangle ABC$ 的费马点．若点 P 是腰长为 $\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形 DEF 的费马点，则 $PD+PE+PF=$ ____$\sqrt{3}+1$____．



【答案】$\sqrt{3}+1$

【分析】过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 M，在 $\triangle BDE$ 内部过 E、F 分别作 $\angle MEP=\angle MFP=30^\circ$，则 $\angle EPF=\angle FPD=\angle EPD=120^\circ$，点 P 就是费马点，求出 PE, PF, DP 的长即可解决问题；

【详解】解：如图：过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 M，在 $\triangle BDE$ 内部过 E、F 分别作 $\angle MEP=\angle MFP=30^\circ$，则 $\angle EPF=\angle FPD=\angle EPD=120^\circ$，点 P 就是费马点，

在等腰 $Rt\triangle DEF$ 中，$DE=DF=\sqrt{2}$, $DM\perp EF$,

$\therefore EF=\sqrt{2}DE=2$

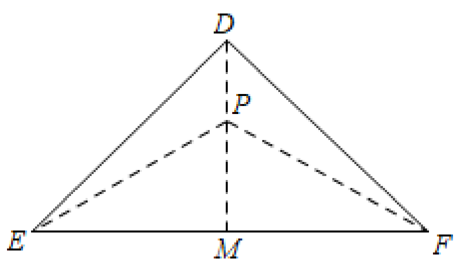
$\therefore EM=DM=1$,

故 $\cos30^\circ=\frac{EM}{PE}$,

解得：$PE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则 $PM=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故 $DP=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$,同法可得 $PF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

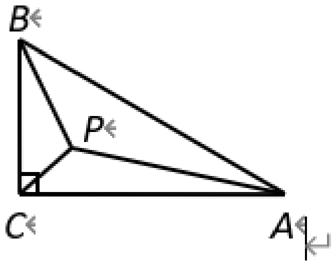
则 $PD+PE+PF=2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}+1$.



故答案为 $\sqrt{3}+1$.

【点睛】此题主要考查了解直角三角，正确画出图形进而求出 PE 的长是解题关键．

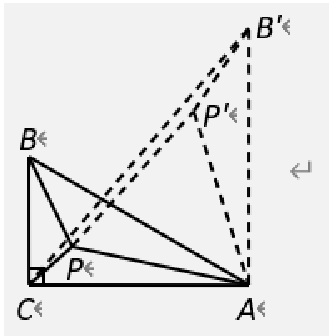
题目 10 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$AB=2$，点 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为 ______．



【答案】$\sqrt{7}$

【分析】根据题意，首先以 A 为旋转中心，顺时针旋转 $\triangle APB$ 到 $\triangle AB'P'$，旋转角是 60°，作出图形，然后根据旋转的性质和全等三角形的性质、等边三角形的性质，可以得到 $PA+PB+PC=P'P+P'B'+PC$，再根据两点之间线段最短，然后得到 $PA+PB+PC$ 的最小值就是 $B'C$ 的值，然后根据勾股定理可以求得 $B'C$ 的值，从而可以解答本题。

【详解】将 $\triangle ABP$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 到 $\triangle AB'P'$，连接 $P'P$，$B'C$.



则 $AB'=AB=2$，$PB=P'B'$，$\angle BAB'=60^\circ$，$PA=P'A$，$\angle PAP'=60^\circ$，

$\therefore \triangle P'PA$ 是等边三角形，$\therefore PA=P'P$.

$\because \angle BAC=30^\circ$，$\therefore \angle B'AC=90^\circ$，

$\because \angle ACB=90^\circ$，$\therefore AC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\sqrt{3}$，

$\therefore B'C=\sqrt{AC^2+B'A^2}=\sqrt{7}$.

$\because PA+PB+PC=P'P+P'B'+PC\geqslant B'C$，

$\therefore PA+PB+PC$ 的最小值为 $\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查全等三角形的性质、旋转的性质、等边三角形的性质、最短路径问题、勾股定理，解答本题的关键是作出合适的辅助线，得到 $PA+PB+PC$ 的最小值就是 $B'C$ 的值，其中用到的数学思想是数形结合的思想。

题目 11 已知：到三角形 3 个顶点距离之和最小的点称为该三角形的费马点．如果 $\triangle ABC$ 是锐角 (或直角) 三角形，则其费马点 P 是三角形内一点，且满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$．(例如：等边三角形的费马点是其三条高的交点)．若 $AB=AC=\sqrt{7}$，$BC=2\sqrt{3}$，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，则 $PA+PB+PC=$ ______；若 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$AC=4$，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，则 $PA+PB+PC=$ ______.

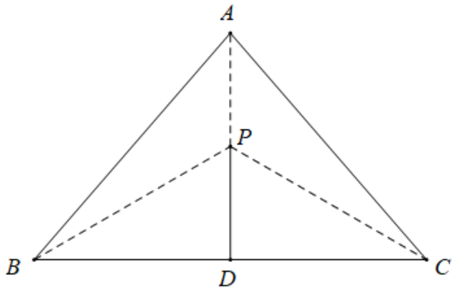
【答案】5; $2\sqrt{7}$.

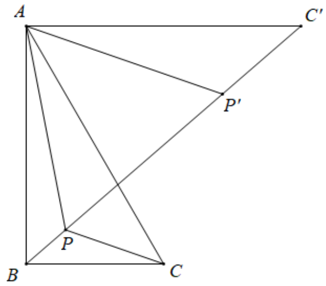
【分析】①作出图形，过 B,C 分别作 $\angle DBP=\angle DCP=30^\circ$，勾股定理解直角三角形即可

②作出图形，将 $\triangle APC$ 绕点 A 逆时针旋转 60°，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点则 B，P，P'，C' 四点共线，即 $PA+PB+PC=BC'$，再用勾股定理求得即可

【详解】①如图，过 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，

过 B,C 分别作 $\angle DBP=\angle DCP=30^\circ$，则 $PB=PC$，P 为 $\triangle ABC$ 的费马点





$\because AB=AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{3}$ $\therefore BD=DC=\frac{1}{2}BC=\sqrt{3}$ $\therefore \tan 30^\circ=\frac{PD}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore PD=1$ $\therefore PB=\frac{PD}{\sin 30^\circ}=2$ $\quad\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{7-3}=2$ $\therefore PA+PB+PC=5$

②如图：$\because AB=2\sqrt{3}$, $BC=2$, $AC=4$.$\therefore AB^2+BC^2=16$, $BC^2=16$

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$ $\quad\angle ABC=90^\circ$ $\quad\because \sin\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$ $\quad\therefore \angle BAC=30^\circ$

将$\triangle APC$绕点 A 逆时针旋转 60° 由旋转可得：$\triangle APC\cong\triangle AP'C'$

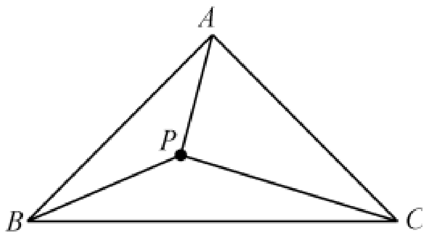
$\therefore AP'=AP$, $PC=P'C'$, $AC=AC'$ $\angle CAC'=\angle PAP'=60^\circ$ $\therefore\triangle APP'$是等边三角形，$\therefore\angle BAC'=90^\circ$

$\because$ P为$\triangle ABC$的费马点，即B, P,P', C'四点共线时候，$PA+PB+PC=BC'$

$\therefore PA+PB+PC=BP+PP'+P'C'=BC'=\sqrt{AB^2+AC'^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4^2}=2\sqrt{7}$ 故答案为：①5，②$2\sqrt{7}$

【点睛】本题考查了勾股定理，旋转的性质，锐角三角函数，等腰三角形性质，作出旋转的图形是解题的关键．本题旋转$\triangle PAB$, $\triangle PBC$也可，但必须绕顶点旋转．

题目 12 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=90^\circ$, $AB=AC=1$, P是$\triangle ABC$内一点，求$PA+PB+PC$的最小值为______.



【答案】$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【分析】将$\triangle APC$绕点C顺时针旋转60°得$\triangle DFC$，可得$PC=PF$, $DF=AP$，将$PA+PB+PC$转化为$FD+BP+PF$，此时当B、P、F、D四点共线时，$PA+PB+PC$的值最小，最小值为BD的长；根据勾股定理求解即可．

【详解】解：将$\triangle APC$绕点C顺时针旋转60°得$\triangle DFC$，连接PF、AD、DB，过点D作$DE\perp BA$，交BA的延长线于点E；$\therefore AP=DF$, $\angle PCF=\angle ACD=60^\circ$, $PC=FC$, $AC=CD$,

$\therefore\triangle PCF$、$\triangle ACD$是等边三角形，

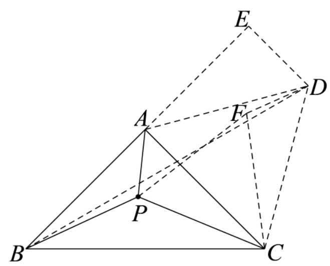
$\therefore PC=PF$, $AD=AC=1$, $\angle DAC=60^\circ$

$\therefore PA+PB+PC=FD+BP+PF$,

$\therefore$当B、P、F、D四点共线时，$PA+PB+PC$的值最小，最小值为BD的长；

$\because\angle CAB=90^\circ$, $\angle CAD=60^\circ$, $\therefore\angle EAD=30^\circ$,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}$, $\therefore AE=\sqrt{AD^2-ED^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

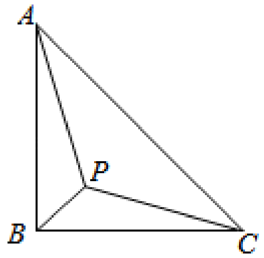


$\therefore BE=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore PA+PB+PC$的值最小值为$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. 故答案为:$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题考查费马点问题,解题的关键在于将$\triangle APC$绕点C顺时针旋转60°得$\triangle DFC$,将三条线段的长转化到一条直线上.

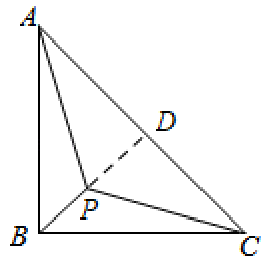
题目 13 在$\triangle ABC$中,若其内部的点P满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$,则称$P$为$\triangle ABC$的费马点.如图所示,在$\triangle ABC$中,已知$\angle BAC=45^\circ$,设$P$为$\triangle ABC$的费马点,且满足$\angle PBA=45^\circ$,$PA=4$,则$\triangle PAC$的面积为____$4\sqrt{3}$____.



【答案】$4\sqrt{3}$

【分析】如图,延长BP交AC于D,先说明$\triangle ABD$是等腰直角三角形,$\triangle ADP$是30°的直角三角形,可得PD和AD的长,根据费马点的定义可得$\angle APC=120^\circ$,从而可知$\triangle PDC$也是30°的直角三角形,可得CD的长,根据三角形的面积公式可得结论.

【详解】如图,延长BP交AC于D,



$\because \angle BAC=\angle PBA=45^\circ$,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$, $AD=BD$,

$\because P$为$\triangle ABC$的费马点,

$\therefore \angle APB=\angle CPA=120^\circ$,

$\therefore \angle BAP=180^\circ-120^\circ-45^\circ=15^\circ$,

$\therefore \angle PAC=45^\circ-15^\circ=30^\circ$,

$\therefore \angle APD=60^\circ$,

$Rt\triangle PAD$中,$\because PA=4$,

$\therefore PD=2$, $AD=2\sqrt{3}$,

$\because \angle APC=120^\circ$,

$\therefore \angle CPD=120^\circ-60^\circ=60^\circ$,

$Rt\triangle PDC$中,$\angle PCD=30^\circ$,

$\therefore CD=2\sqrt{3}$,

$\therefore AC=AD+CD=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,

$\therefore \triangle PAC$的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot PD=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$.

故答案为:$4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了费马点的定义,三角形的面积,等腰直角三角形的性质和判定,含30°角的直角三角形的性质等知识,正确作出辅助线构造等腰直角三角形是本题的关键。

题目 14 数学上称“费马点”是位于三角形内且到三角形三个顶点距离之和最短的点.现定义:菱形对角线上一点到该对角线同侧两条边上的两点距离最小的点称为类费马点.例如:菱形$ABCD$,P是对角线BD