湖南省衡阳市衡阳县2024届高三第一次模拟考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设集合 $A=\{x\,|\,\frac{x-1}{x}\le 0\}$，$B=\{x\,|\,3x^2-7x\le 10\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$(-1,1)$　　B．$\left(0,\frac{10}{3}\right)$

C．$[0,1]$　　D．$(0,1]$

2．已知复数 z 满足 $z\cdot\overline{z}=4$ 且 $z+\overline{z}+|z|=0$，则 z^{2019} 的值为

A．－1　　B．－2^{2019}　　C．1　　D．2^{2019}

3．在$\triangle ABC$中，$AC=2$，D 为 AB 的中点，$CD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{7}$，$P$ 为 CD 上一点，且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，则 $|\overrightarrow{AP}|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{31}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{13}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{13}}{2}$　　D．$\frac{2\sqrt{13}}{3}$

4．已知甲植物生长了一天，长度为$a(a>0)$，乙植物生长了一天，长度为$16a$.从第二天起，甲每天的生长速度是前一天的$\frac{3}{2}$倍，乙每天的生长速度是前一天的$\frac{2}{3}$，则甲的长度第一次超过乙的长度的时期是（　）（参考数据：取$\lg 2=0.3,\lg 3=0.48$）

A．第 6 天　　B．第 7 天　　C．第 8 天　　D．第 9 天

5．已知四棱锥$P-ABCD$的底面为矩形，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=4$，侧面PAB为正三角形且垂直于底面$ABCD$，M为四棱锥$P-ABCD$内切球表面上一点，则点M到直线CD距离的最小值为（　）

A．$\sqrt{10}-2$　　B．$\sqrt{10}-1$　　C．$2\sqrt{3}-2$　　D．$2\sqrt{3}-1$

6．已知$f(x)$是定义在$[0,+\infty)$上单调递增且图像连续不断的函数，且有

$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$，设$x_1>x_2>1$，则下列说法正确的是（　）

A．$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>1$

B．$1>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

C．$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}>1$

D．$1>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$

7．已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 作不与 x 轴垂直的直线 l 交 C 于 A,B 两点，设△OAB 的外心和重心的纵坐标分别为 m,n（O 是坐标原点），则 $\frac{m}{n}$ 的值为（　）

A．1　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{8}$

8．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x-3}$，$g\left(x\right)=\frac{1}{2}+\ln\frac{x}{2}$，若 $f\left(m\right)=g\left(n\right)$ 成立，则 $n-m$ 的最小值为（　）

A．$\ln 2-1$　　B．$\ln 2$　　C．$-1-\ln 2$　　D．$1+\ln 2$

二、多选题

9．记函数 $f\left(x\right)=2\cos\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$ 的最小正周期为 T，若 $f\left(T\right)=\sqrt{3}$，且 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值与最小值的差为 3，则（　）

A．$f\left(0\right)=1$　　B．$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

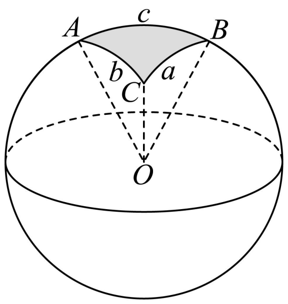
C．$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{9},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减　　D．直线 $y=\sqrt{3}-\frac{3}{2}x$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线

10．已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为负数，其前 n 项和 S_n 满足 $a_n\cdot S_n=16\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则（　）

A．数列 $\{a_n\}$ 的第 2 项小于 -3　　B．数列 $\{a_n\}$ 不可能是等比数列

C．数列 $\{a_n\}$ 为递增数列　　D．数列 $\{a_n\}$ 中存在大于 $-\frac{1}{100}$ 的项

11．球面三角学是研究球面三角形的边、角关系的一门学科.如图，球 O 的半径为 R，A，B，C 为球面上三点，劣弧 BC 的弧长记为 a，设 O_a 表示以 O 为圆心，且过 B，C 的圆，同理，圆 O_b，O_c 的劣弧 AC，AB 的弧长分别记为 b，c，曲面 ABC（阴影部分）叫做曲面三角形，若 $a=b=c$，则称其为曲面等边三角形，线段 OA，OB，OC 与曲面 V ABC 围成的封闭几何体叫做球面三棱锥，记为球面 $O-ABC$.设 $\angle BOC=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，$\angle AOB=\gamma$，则下列结论正确的是（　）



A．若平面$\vartriangle ABC$是面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$的等边三角形，则$a=b=c=R$

B．若$a^2+b^2=c^2$，则$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$

C．若$a=b=c=\dfrac{\pi}{3}R$，则球面$O-ABC$的体积$V>\dfrac{\sqrt{2}}{12}R^3$

D．若平面$\vartriangle ABC$为直角三角形，且$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，则$a^2+b^2>c^2$

三、填空题

12．甲乙两个盒子中装有大小、形状相同的红球和白球，甲盒中有5个红球，2个白球；乙盒中有4个红球，3个白球.先从甲盒中随机取出一个球放入乙盒，再从乙盒中随机取出一个球，则从乙盒中取出的是红球的概率为______.

13．$\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^5$展开式中的常数项是120，则实数$a=$______.

14．正四面体$ABCD$的棱长为6，点P是该正四面体内切球球面上的动点，当$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$取得最小值时，$\triangle PAD$的面积为__________.

四、解答题

15．若锐角$\vartriangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，其外接圆的半径为$\sqrt{3}$，且$a\cos(B-C)+a\cos A=2\sqrt{3}c\sin B\cos A$.

(1)求角A的大小；

(2)求$\dfrac{b^2+a^2}{b}$的取值范围

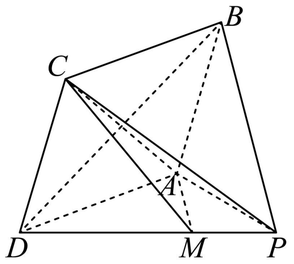
16．已知数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=3$，$d\neq 0$，且a_1，a_7，a_{25}构成等比数列，

(1)求a_n；

(2)设$f(n)=a_n$，若存在数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_2=7$，$b_3=25$，且数列$\{f(b_n)\}$为等比数列，

求$\{a_nb_n\}$的前n项和S_n.

17．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，四边形$ABCD$是菱形，平面$ABCD\perp$平面PAD，点M在DP上，且$DM=2MP, AD=AP, \angle PAD=120^\circ$.



(1)求证：$BD\perp$平面ACM；

(2)若$\angle ADC=60^\circ$，求平面ACM与平面ABP夹角的余弦值.

18．2023年12月25日，由科技日报社主办，部分两院院士和媒体人共同评选出的2023年国内十大科技新闻揭晓.某高校一学生社团随机调查了本校100名学生对这十大科技的了解情况，按照性别和了解情况分组，得到如下列联表：

	不太了解	比较了解	合计
男生	20	40	60
女生	20	20	40
合计	40	60	100

(1)判断是否有95%的把握认为对这十大科技的了解存在性别差异；

(2)若把这100名学生按照性别进行分层随机抽样，从中抽取5人，再从这5人中随机抽取2人，记抽取的2人中女生数为X，求X的分布列及$E(X)$.

附：①$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$；

②当$\chi^2>3.841$时有95%的把握认为两变量有关联.

19．已知函数$f(x)=\ln x, g(x)=x-1$.

(1)证明：$f(x)\le g(x)$；

(2)设$h(x)=f(x)-g(x)$，求证：对任意的$0<b<a$，都有$\dfrac{h(a)-h(b)}{a-b}>\dfrac{1}{a+b}-1$成立.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	D	C	B	D	D	A	BD	BCD
题号	11									
答案	BC									

1．D

【分析】先求出集合A，B，再结合交集的定义，即可求解．

【详解】因为$\frac{x-1}{x}\le 0$，所以$\begin{cases}x\left(x-1\right)\le 0\\ x\ne 0\end{cases}$，解得$0<x\le 1$，

因为$3x^2-7x\le 10$，所以$\left(3x-10\right)\left(x+1\right)\le 0$，解得$-1\le x\le \frac{10}{3}$，

所以$A=\{x\,|\,0<x\le 1\}$，$B=\{x\,|-1\le x\le \frac{10}{3}\}$，

故$A\cap B=\left(0,1\right]$．

故选：D．

2．D

【解析】首先设复数$z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），根据$z\cdot\overline{z}=4$和$z+\overline{z}+|z|=0$得出方程组，求解可得：

$z=-2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$，通过计算可得：$(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2})^3=1$，代入即可得解．

【详解】设$z=a+bi$（a，$b\in\mathbf{R}$），

由$z\cdot\overline{z}=4$且$z+\overline{z}+|z|=0$，得

$\begin{cases}a^2+b^2=4\\ 2a+2=0\end{cases}$，解得$a=-1$，$b=\pm\sqrt{3}$．

$\therefore z=-1\pm\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$，

而$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=-\frac{1}{8}+3\times(-\frac{1}{2})^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2+(-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=1$，

$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=-\frac{1}{8}+3\times(-\frac{1}{2})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}i+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=.$

$\therefore z^{2019}=2^{2019}\cdot(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2019}=2^{2019}\cdot[(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3]^{673}=2^{2019}$．

故选：D．

【点睛】本题考查了复数的计算，考查了共轭复数，要求较高的计算能力，属于较难题.

3．D

【分析】由中点可知$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，根据模长关系可得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-2$，设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}$，结合平面向量的线性运算以及基本定理可得$\begin{cases}m=\frac{1}{3}\\ \lambda=\frac{2}{3}\end{cases}$，用$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$表示$\overrightarrow{AP}$，结合模长运算求解.

【详解】因为D为AB的中点，则$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$，

可得$\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$，即$7=\frac{1}{4}\left(4+28+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right)$，解得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-2$，

又因为P为CD上一点，设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\lambda\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，

可得$\begin{cases}1-\lambda=m\\ \frac{\lambda}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\frac{1}{3}\\ \lambda=\frac{2}{3}\end{cases}$，即$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，

可得$\overrightarrow{AP}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2-\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{52}{9}$，即$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\frac{2\sqrt{13}}{3}$.

故选：D.

【点睛】关键点睛：1.根据模长关系可得$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-2$；

2.设$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}$，根据平面向量基本定理求得$\begin{cases}m=\frac{1}{3}\\ \lambda=\frac{2}{3}\end{cases}$；

3.以$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$为基底表示$\overrightarrow{AP}$，进而运算求解.

4．C

【分析】设甲植物每天生长的长度构成等比数列$\{a_n\}$，甲植物每天生长的长度构成等比数列$\{b_n\}$，设其前n项和分别为S_n、T_n，依题意得到$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式，即可求出S_n、T_n，再由$S_n>T_n$得到$\left(\frac{3}{2}\right)^n>24$，最后根据指数函数的性质及对数的运算性质计算可得.

【详解】设甲植物每天生长的长度构成等比数列$\{a_n\}$，甲植物每天生长的长度构成等比数列

$\{b_n\}$，设其前n项和分别为S_n、T_n（即$n\ (n\in \mathrm{N}^*)$天后树的总长度），

则$a_n = a\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，$b_n = 16a\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

所以$S_n = a + a\times\frac{3}{2} + a\times\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + a\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{a\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{2}} = -2a\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$，

$T_n = 16a + 16a\times\frac{2}{3} + 16a\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + 1a\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{16a\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 48a\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，

由$S_n > T_n$，可得$-2a\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right] > 48a\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，

即$\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} - 25\times\left(\frac{3}{2}\right)^n + 24 > 0$，即$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 24\right]\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right] > 0$，

解得$\left(\frac{3}{2}\right)^n > 24$或$\left(\frac{3}{2}\right)^n < 1$（舍去），

由$\left(\frac{3}{2}\right)^n > 24$则$n > \log_{\frac{3}{2}} 24$，因为$\log_{\frac{3}{2}} 24 = \dfrac{\lg 24}{\lg\frac{3}{2}} = \dfrac{\lg 3 + 3\lg 2}{\lg 3 - \lg 2} = \dfrac{0.48 + 3\times 0.3}{0.48 - 0.3} \approx 7.7$，

即$n > 7.7$，又$n\in \mathbf{N}^*$，所以n的最小值为8.

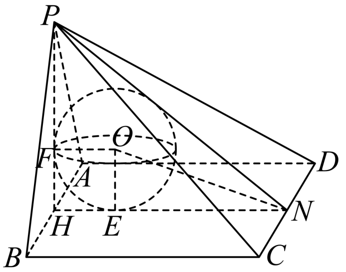
故选：C

【点睛】关键点睛：本题关键是利用等比数列求出公式求出$n\ (n\in \mathrm{N}^*)$天后树的总长度，从而得到不等式，再结合指数函数的性质解得.

5．B

【分析】H, N分别为AB和CD的中点，平面PHN截四棱锥$P-ABCD$的内切球O所得的截面为大圆，求出圆的半径，利用圆心到直线距离求点M到直线CD距离的最小值.

【详解】如图，设四棱锥的内切球的半径为r，取AB的中点为H，CD的中点为N，连接PH，PN，HN，



球 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球，

底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 PAB 为正三角形且垂直于底面 $ABCD$，

则平面 PHN 截四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球 O 所得的截面为大圆，

此圆为 $\triangle PHN$ 的内切圆，半径为 r，与 HN，PH 分别相切于点 E，F，

平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，交线为 AB，$PH\subset$ 平面 PAB，

$\triangle PAB$ 为正三角形，有 $PH\perp AB$，$\therefore PH\perp$ 平面 $ABCD$，

$HN\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PH\perp HN$，

$AB=2\sqrt{3}$，$BC=4$，则有 $PH=3$，$HN=4$，$PN=5$，

则 $\triangle PHN$ 中，$S_{\triangle PHN}=\dfrac{1}{2}\times3\times4=\dfrac{1}{2}r\left(3+4+5\right)$，解得 $r=1$.

所以，四棱锥 $P-ABCD$ 内切球半径为 1，连接 ON.

Q $PH\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore CD\perp PH$，

又 $CD\perp HN$，PH,HN Ì 平面 PHN，$PH\cap HN=H$，

\ CD ˆ 平面 PHN，$\because ON\subset$ 平面 PHN，可得 $ON\perp CD$，

所以内切球表面上一点 M 到直线 CD 的距离的最小值即为线段 ON 的长减去球的半径，

又 $ON=\sqrt{OE^2+EN^2}=\sqrt{10}$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 内切球表面上的一点 M 到直线 CD 的距离的最小值为 $\sqrt{10}-1$.

故选：B.

【点睛】方法点睛：

四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球，与四棱锥的五个面都相切，由对称性平面 PHN 截四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球 O 所得的截面为大圆，问题转化为三角形内切圆，利用面积法求出半径，即内切球的半径，由球心到直线 CD 的距离，求点 M 到直线 CD 的距离的最小值.

6．D

【分析】根据函数的单调性的定义和性质以及利用反证法证明不等式，结合选项先证明

$f(x)<1$，再根据 $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$，可得 $f(x_1+x_2)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{1+\left[f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2}$，构造函数

$g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2},x\in[0,1)$，根据函数单调性即可得出结论.

【详解】$f(x+0)=\dfrac{f(x)+f(0)}{1+f(x)f(0)}$ 得到 $f(0)\left[f^2(x)-1\right]=0$，

因为 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 不恒等于 ±1，故 $f(0)=0$，

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)\geq f(0)=0$，

若存在 x_0 使得 $f(x_0)=1$，则 $f(x+x_0)=\dfrac{f(x)+1}{1+f(x)}=1$，

则 $f(x)$ 恒等于 1，与 $f(x)$ 单调递增矛盾，故 $f(x)\neq1$，

$\forall x\in[0,+\infty)$，若存在 x_1，使得 $f(x_1)>1$

因为 $f(x)$ 连续，$f(x_1)>1,f(0)=0<1$，故存在 x_2，使得 $f(x_2)=1$，

与上述 $f(x)\neq1$ 矛盾，故 $\forall x\in[0,+\infty)$ $f(x)<1$，

对于本题，$f(x_1+x_2)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1+f(x_1)f(x_2)}\geq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1+\left[\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2}$，当且仅当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时取等，

因为 $x_1\neq x_2,f(x)$ 单调递增，故不取等号，即 $f(x_1+x_2)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{1+\left[\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2}$

当 $y=x$ 时，有 $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+f^2(x)}$，即 $f(x_1+x_2)=\dfrac{2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)}{1+\left[f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2}$，

当 $x\in[0,1)$ 时，令 $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$g(x)=\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+x},x\in(0,1)$，

因为$y=\frac{1}{x}+x,x\in(0,1)$单调递减，所以$g(x)=\frac{2}{\frac{1}{x}+x},x\in(0,1)$单调递增，

因为$g(0)=0$，所以$g(x)=\frac{2x}{1+x^2},x\in[0,1)$，单调递增，

因为$g\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)=\frac{2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}{1+\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2}=f(x_1+x_2)$，

$g\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1+\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2}$，

所以$g\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)>g\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，所以$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

综上所述$1>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：根据选项先证明$f(x)<1$，构造函数$g(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，根据单调性得出结论.

7．D

【分析】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$x=ty+\frac{p}{2}(t\neq 0)$，联立直线与抛物线方程，消元、列出韦达定理，$\triangle OAB$的重心的纵坐标$n=\frac{y_1+y_2+0}{3}$，再表示出$OA$、$OB$的垂直平分线方程，从而求出$m$，即可得解.

【详解】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，显然$(x_1,y_1,x_2,y_2\neq 0)$，直线AB的方程为$x=ty+\frac{p}{2}(t\neq 0)$，

由$\begin{cases}y^2=2px\\x=ty+\frac{p}{2}\end{cases}$整理得$y^2-2pty-p^2=0$，显然$\Delta>0$，所以$y_1+y_2=2pt$，$y_1y_2=-p^2$，

所以$x_1+x_2=2pt^2+p$，所以$\triangle OAB$的重心的纵坐标$n=\frac{y_1+y_2+0}{3}=\frac{2pt}{3}$，

又$\triangle OAB$的外心既在OB的垂直平分线上，也在OA的垂直平分线上，

又OA的垂直平分线方程为$x=-\frac{y_1}{x_1}\left(y-\frac{y_1}{2}\right)+\frac{x_1}{2}=-\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}}\left(y-\frac{y_1}{2}\right)+\frac{y_1^{\ 2}}{4p}$

整理得 $x=-\frac{2p}{y_1}y+p+\frac{y_1^2}{4p}$，

同理可得 OB 的垂直平分线方程为 $x=-\frac{2p}{y_2}y+p+\frac{y_2^2}{4p}$，

则 $-\frac{2p}{y_2}m+p+\frac{y_2^2}{4p}=-\frac{2p}{y_1}m+p+\frac{y_1^2}{4p}$，解得 $m=-\frac{y_1y_2\left(y_1+y_2\right)}{8p^2}=\frac{pt}{4}$，

即外心的纵坐标 $m=\frac{pt}{4}$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{\frac{pt}{4}}{\frac{2pt}{3}}=\frac{3}{8}$.

故选：D

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 $\left(x_1,y_1\right)$、$\left(x_2,y_2\right)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，必要时计算 Δ；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、x_1x_2 的形式；

（5）代入韦达定理求解.

8．A

【分析】令 $t=f(m)=g(n)$，得到 m，n 关于 t 的函数式，进而可得 $n-m$ 关于 t 的函数式，构造函数利用导数研究单调性并确定最值，即可求 $n-m$ 的最小值.

【详解】令 $t=f(m)=g(n)$，则 $\mathrm{e}^{m-3}=t$，$\frac{1}{2}+\ln\frac{n}{2}=t$，

$\therefore m=3+\ln t$，$n=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}$，所以 $n-m=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-3-\ln t$，

若 $h(t)=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-3-\ln t$，则 $h'(t)=2\mathrm{e}^{t-\frac{1}{2}}-\frac{1}{t}\,(t>0)$，

$\therefore h'(t)=0$，有 $t=\frac{1}{2}$，

当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减，

当 $t>\frac{1}{2}$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，$\therefore h(t)_{\min}=h(\frac{1}{2})=\ln 2-1$，

即 $n-m$ 的最小值为 $\ln 2-1$.

故选：A.