2023—2024 学年度（下）七校协作体高二联考

数学试题

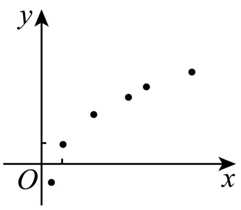
考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=1$，$a_3+a_4=6$，则$a_1a_4=$（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 4　　　　D. 8

2. 如图，由观测数据$(x_i，y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$的散点图可知，y与x的关系可以用模型$y=b\ln x+a$拟合，设$z=\ln x$，利用最小二乘法求得y关于z的回归方程$\hat{y}=\hat{b}z+1$．已知$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\mathrm{e}^{12}$，$\sum\limits_{6}^{i=1}y_i=18$，则$\hat{b}=$（　　）



A. $\frac{17}{\mathrm{e}^{12}}$　　　　B. $\frac{12}{\mathrm{e}^{12}}$　　　　C. 1　　　　D. $\frac{17}{12}$

3. 图 1 是第七届国际数学教育大会（简称$\mathrm{ICME}-7$）的会徽图案，会徽的主题图案是由如图 2 所示的一连串直角三角形演化而成的，其中$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$，如果把图 2 中的直角三角形继续作下去，则第$n$个三角形的面积为（　　）

图1

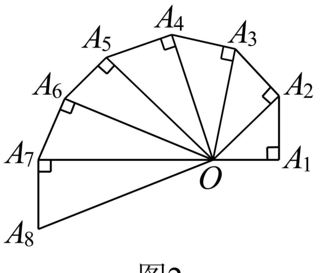


图2

A. $\frac{n}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{n}}{2}$　　　　C. $\frac{n^2}{2}$　　　　D. $\sqrt{n}$

4. 下列说法中正确的有（　　）

A. 已知互不相同的 30 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，则剩下 28 个数据的30%分位数可能等于原样本数据的30%分位数；

B. 若 A,B 两组成对数据的样本相关系数分别为 $r_A=0.97, r_B=-0.99$，则A组数据比 B 组数据的线性相关性强；

C. 设随机变量 $X\sim N\left(3,2^2\right)$，则 $E\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{5}{2}, D\left(\frac{1}{2}X+1\right)=2$；

D. 某人参加一次游戏，游戏有三个题目，每个题目答对的概率都为0.5，答对题数多于答错题数可得4分，否则得2分，则某人参加游戏得分的期望为3

5. 已知函数 $f\left(x\right)=x\left(m-\mathrm{e}^x\right)$，曲线 $y=f\left(x\right)$ 上存在不同的两点，使得曲线在这两点处的切线都与直线 $y=x$ 平行，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(1-\mathrm{e}^{-2},1\right)$　　B. $\left(-1-\mathrm{e}^{-2},-1\right)$　　C. $\left(-\mathrm{e}^{-2},0\right)$　　D. $\left(1-\mathrm{e}^{-2},+\infty\right)$

6. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次，设“第一次向上的点数是2”为事件 A，“第二次向上的点数是奇数”为事件 B，“两次向上的点数之和能被3整除”为事件 C，则下列说法正确的是（　　）

A. 事件 A 与事件 B 互为对立事件　　B. $P\left(C\right)=\frac{1}{6}$

C. $P\left(BC\right)=\frac{1}{6}$　　D. 事件 B 与事件 C 相互不独立

7. 设数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 $S_n, \frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1, S_1=32$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列

B. S_3, S_6-S_3, S_9-S_6 成等差数列，公差为 -9

C. 当且仅当 $n=17$ 时，S_n 取得最大值

D. $S_n\geq 0$ 时，n 的最大值为33

8. 设函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2-(a-2)x$，若不等式 $f\left(x\right)>0$ 恰有两个整数解，则实数 a 的取值范围是

A. $[\frac{6+\ln 3}{12},\frac{4+\ln 2}{6})$　　B. $(\frac{6+\ln 3}{12},\frac{4+\ln 2}{6})$　　C. $\left[\frac{4+\ln 2}{6},1\right)$　　D. $\left(\frac{4+\ln 2}{6},1\right]$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 $S_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，$a_{15}+a_{16}>0, a_{15}+a_{17}<0$，则使 $S_n>0$ 的最大正整数 n 的值为15

B. 若 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，$S_n=5^n+c$（c 为常数），则必有 $c=-1$

C. 若$\left\{a_n\right\}$是等比数列，则$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

D. 若$a_n+4S_{n-1}S_n=0\left(n\geq 2\right),a_1=\dfrac{1}{4}$，则数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$为递增等差数列

10. 甲、乙、丙、丁四名同学相约去电影院看春节档热映的《热辣滚烫》，《飞驰人生2》，《第二十条》三部电影，每人都要看且限看其中一部.记事件A为"恰有两名同学所看电影相同"，事件B为"只有甲同学一人看《飞驰人生2》"，则（ ）

A. 四名同学看电影情况共有3^4种

B. "每部电影都有人看"的情况共有72种

C. $P\left(B|A\right)=\dfrac{1}{6}$

D. "四名同学最终只看了两部电影"的概率是$\dfrac{14}{27}$

11. 已知函数$f(x)=x^2-2x\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^x-\ln x-2$，下列说法正确的是（　　）

A. 函数$g\left(x\right)$存在唯一极值点x_0，且$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

B. 令$h(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$，则函数$h(x)$无零点

C. 若$g\left(x\right)+2>m$恒成立，则$m<2$

D. 若$a>0$，$b>0$，则$a+\dfrac{b}{2}-\ln(a+b)>\dfrac{a}{b}\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 设等差数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若$a_{11}-a_8=3,S_{11}-S_8=3$，则使$a_n>0$的最小正整数$n$的值是______.

13. 函数$f\left(x\right)=x^3-3x^2+a,g\left(x\right)=x\ln x$.对于$\forall x_1\in\left[0,3\right],\forall x_2\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},\mathrm{e}\right]$，都有$f\left(x_1\right)>g\left(x_2\right)$，则实数$a$的取值范围是______.

14. 已知有A,B两个盒子，其中A盒装有3个黑球和3个白球，B盒装有3个黑球和2个白球，这些球除颜色外完全相同．甲从A盒、乙从B盒各随机取出一个球，若2个球同色，则甲胜，并将取出的2个球全部放入A盒中，若2个球异色，则乙胜，并将取出的2个球全部放入B盒中．按上述方法重复操作两次后，B

盒中恰有 7 个球的概率是______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(a-1\right)x+\mathrm{e}^{x}\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）讨论函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）设函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-\sin x$，若函数 $y=g\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围.

16. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，$a_2=3$，$a_{14}=3a_5$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $2S_n=3b_n-1$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 和 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=a_n\cdot b_n$，数列 $\left\{c_n\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，

①求 T_n；

②若 $T_n-n\cdot 3^n<\left(-1\right)^n\cdot m$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

17. 某学校号召学生参加“每天锻炼 1 小时”活动，为了解学生参加活动的情况，统计了全校所有学生在假期每周锻炼的时间，现随机抽取了 60 名同学在某一周参加锻炼的数据，整理如下 2×2 列联表：

性别	不经常锻炼	经常锻炼	合计
男生	7		
女生		16	30
合计	21		

注：将一周参加锻炼时间不小于 3 小时的称为“经常锻炼”，其余的称为“不经常锻炼”.

（1）请完成上面 2×2 列联表，并依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，能否认为性别因素与学生锻炼的经常性有关系；

（2）将一周参加锻炼为 0 小时的称为“极度缺乏锻炼”．在抽取的 60 名同学中有 5 人“极度缺乏锻炼”.以样本频率估计概率.若在全校抽取 20 名同学，设“极度缺乏锻炼”的人数为 X，求 X 的数学期望 $E\left(X\right)$ 和方差 $D\left(X\right)$；

（3）将一周参加锻炼 6 小时以上的同学称为“运动爱好者”．在抽取的 60 名同学中有 10 名“运动爱好者”，其中有 7 名男生，3 名女生．为进一步了解他们的生活习惯，在 10 名“运动爱好者”中，随机抽取 3 人进行访谈，设抽取的 3 人中男生人数为 Y，求 Y 的分布列和数学期望.