佳木斯一中 2024 届高三学年第三次模拟考试

数学试题

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

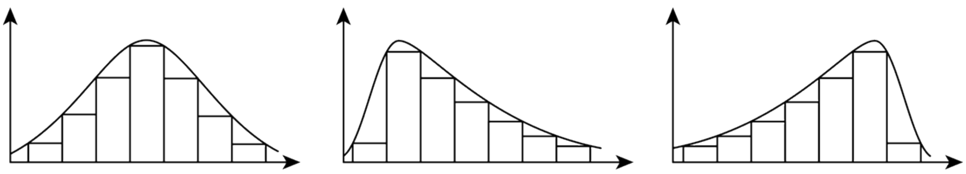
Ⅰ卷　客观题（共 73 分）

一、单项选择题：（共 8 道小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{2x-x^2}\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=2^{|x|-1}\right\}$，则 $A\cap B$ 为（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　B. $[1,2]$　　C. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　D. $[0,+\infty)$

2. 如图所示，下列频率分布直方图显示了三种不同的形态．图（1）形成对称形态，图（2）形成“右拖尾”形态，图（3）形成“左拖尾”形态，根据所给图做出以下判断，不正确的是（　　）



图(1)　　图(2)　　图(3)

A. 图（1）的平均数=中位数=众数　　B. 图（2）的众数<中位数<平均数

C. 图（2）的平均数<众数<中位数　　D. 图（3）的平均数<中位数<众数

3. 已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，且向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

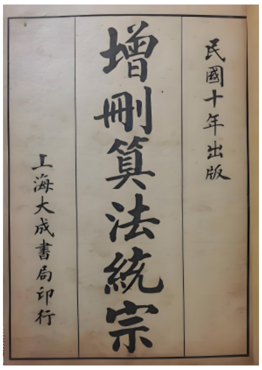
4. 复数 $Z=i+2i^2+3i^3+\cdots+2024i^{2024}$ 的虚部是（　　）

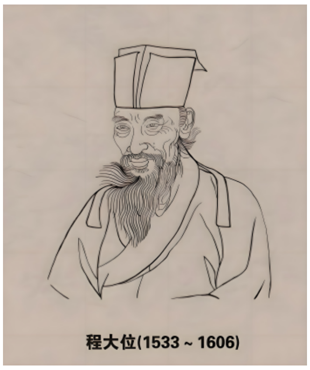
A. 1012　　　　B. 1011　　　　C. -1011　　　　D. -1012

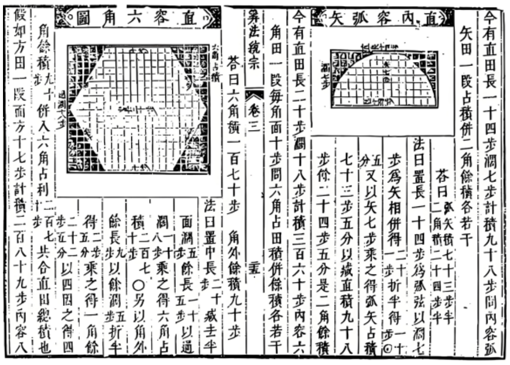
5. 佳木斯市第一中学为丰富学生课余生活，利用大课间时间举行阳光体育活动，有多项趣味体育运动，某班有5位同学想参加旋风接力跑，趣味毛毛虫，企鹅漫步这三项活动，已知这5位同学每位学生只能选择一个项目参加，且每个项目都有同学参加，若同学A和B必须选择同一项比赛，则不同的选法种数是（　　）

A. 81　　　　B. 54　　　　C. 36　　　　D. 18

6. 《算法统宗》是一部中国古代数学名著，全称为《新编直指算法统宗》，由明代数学家程大位所著．该书在万历二十一年（即公元1593年）首次刊行，全书共有17卷．其主要内容涵盖了数学名词、大数与小数的解释、度量衡单位以及珠算盘式图和各种算法的口诀等基础知识．同时，书中还按照“九章”的次序列举了多种应用题及其解法，并附有图式说明．此外，《算法统宗》还包括了难题解法的汇编和不能归入前面各类别的杂法算法等内容．其中有一首诗，讲述了“竹筒容米”问题．诗云：‘家有九节竹一茎，为因盛米不均平，下头三节三升九，上稍四节贮三升，唯有中间两节竹，要将米数次第盛，若有先生能算法，也教算得到天明’（【注释】三升九：3.9升，次第盛：盛米容积依次相差同一数量）用你所学数学知识求该九节竹一共盛米多少升？（　　）







A. 8.8升　　　　B. 9升　　　　C. 9.1升　　　　D. 9.2升

7. 已知$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{3}$，$(a>0,b>0)$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a+b\geq 2\sqrt{3}$　　　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　C. $a^2+b^2\leq 6$　　　　D. $ab\geq 3$

8. 已知圆$x^2+y^2=8$上两点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，O为坐标原点，若$\angle AOB=120°$，则$|x_1+y_1-4|+|x_2+y_2-4|$的最大值是（　　）

A. 8　　　　B. $6\sqrt{2}$　　　　C. $8\sqrt{2}$　　　　D. 12

二、多项选择题：（共3道小题，每题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分数，有选错的得0分．）

9. 过抛物线 C：$y^2=2px$ 上的一点 $M(2,4)$ 作两条直线 l_1，l_2，分别交抛物线 C 于 A，B 两点，F 为焦点（　　）

A. 抛物线的准线方程为 $x=-2$

B. 过点 $M(2,4)$ 与抛物线有且只有一个公共点的直线有 1 条

C. 若 $\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，则 $|FM|+|FA|+|FB|=9$

D. 若 $k_{AM}+k_{BM}=0$，则 $k_{AB}=-1$

10. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=CC_1=2$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{D_1E}=(1-\lambda)\overrightarrow{D_1C_1}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，以 EF 为直径的球与该长方体各棱公共点的个数可能为（　　）

A. 4　　　　B. 8　　　　C. 12　　　　D. 24

11. 关于函数 $f(x)=|\cos x|+|\sin 2x|-\dfrac{1}{2}$，则下列说法正确是（　　）

A. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期　　　　B. 在 $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减

C. 函数图像关于直线 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 对称　　　　D. 当 $x\in[-10\pi,10\pi]$ 时，函数 $f(x)$ 有 40 个零点

三、填空题：（共 3 道小题，每题 5 分，共 15 分.）

12. 已知 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$，$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\cos\theta=$______.

13. 已知 $a\mathrm{e}^{ax}\geq\ln x$，对 $\forall x\geq3$ 恒成立，则 a 的范围是______.

14. 矩形 $ABCD$，$AB=3$，$BC=\sqrt{3}$，现将 $\triangle BCD$ 绕对角线 BD 旋转，使 C 旋转到 C'，并使 AB 和 $C'D$ 边所在直线成角最大，则此时点 A 和 C' 之间的距离为______.

Ⅱ卷　主观题（共 77 分）

四、解答题：（共 5 道小题，77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，已知 $c\sin C\cos B+b\sin C\cos C=\sqrt{3}c\cos A$.

（1）求 $\angle A$；

（2）若 $\angle ABC=\angle ACB$，满足 $BD=3$，$CD=2$，四边形 $ABDC$ 是凸四边形，求四边形 $ABDC$ 面积的最大值.

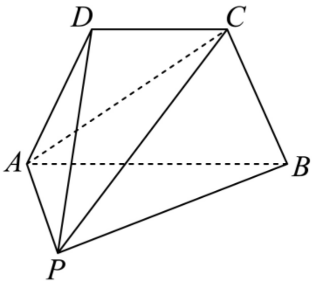
16. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax^2-x$.

（1）当$a=0$时，求$f\left(x\right)$在$x=0$处的切线方程：

（2）若$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，求a的取值范围；

（3）若$g\left(x\right)=x-\ln\left(1+x\right)$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，证明：$g\left(\sin\alpha\right)+g\left(\cos\alpha\right)<\dfrac{1}{2}$.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，$PA\perp AB$，底面$ABCD$为等腰梯形，$AB\parallel CD$，且$AB=2CD=2AD=2$.



（1）证明：平面$PAC\perp$平面PBC；

（2）若点A到平面PBC的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求平面PAD与平面PBC夹角的余弦值.

18. 一种抛骰子游戏的规则是：抛掷一枚质地均匀的骰子，若正面向上的点数不大于4点，得1分，若正面向上的点数大于4点，则得2分．得分累加，游戏次数无限制．

（1）求在已经得到2分的情况下，再抛掷2次得4分的概率；

（2）抛掷4次的得分记为ξ，求ξ的分布列和数学期望$E\left(\xi\right)$；

（3）求恰好得到$n\left(n\in\mathrm{N}^{*}\right)$分的概率.

19. 已知椭圆C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\left(a>b>0\right)$的左右顶点分别为$A$，$B$，长轴长为4，点$D$为椭圆上与$A$，$B$不重合的点，且$k_{DA}\cdot k_{DB}=-\dfrac{1}{4}$.

（1）求椭圆方程；

（2）（i）一条垂直于x轴的动直线l交椭圆C_1于P，Q两点，当直线l与曲线C_1相切于点A或点B时，看作P，Q两点重合于点A或点B，求直线AP与直线BQ交点E的轨迹C_2的方程；

（ii）过$T\left(4,0\right)$的直线l与曲线C_2交于M，N两点，且两交点均在y轴右侧，直线AM与曲线C_1交于G

点，直线 AN 与曲线 C_1 交于 H 点，记 $\triangle AMN$ 的面积为 S_1，记 $\triangle AGH$ 的面积为 S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

参考答案

一、单项选择题：（共 8 道小题，每题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|y=\sqrt{2x-x^2}\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=2^{|x|-1}\right\}$，则 $A\cap B$ 为（　　）

A. $\left[\frac{1}{2},1\right]$　　B. $[1,2]$　　C. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　D. $[0,+\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出集合 A,B，再根据交集的定义即可得解.

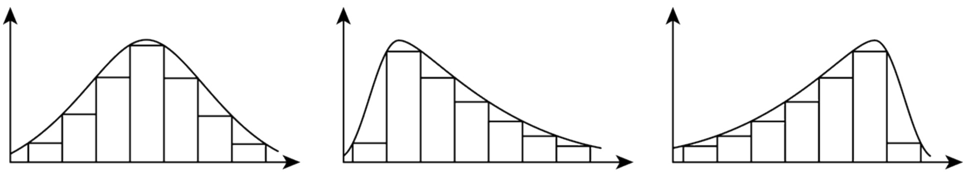
【详解】$A=\left\{x\middle|y=\sqrt{2x-x^2}\right\}=\left\{x\middle|2x-x^2\geq 0\right\}=[0,2]$，

$B=\left\{y\middle|y=2^{|x|-1}\right\}=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，

所以 $A\cap B=\left[\frac{1}{2},2\right]$.

故选：C.

2. 如图所示，下列频率分布直方图显示了三种不同的形态．图（1）形成对称形态，图（2）形成“右拖尾”形态，图（3）形成“左拖尾”形态，根据所给图做出以下判断，不正确的是（　　）



图(1)　　图(2)　　图(3)

A. 图（1）的平均数=中位数=众数　　B. 图（2）的众数<中位数<平均数

C. 图（2）的平均数<众数<中位数　　D. 图（3）的平均数<中位数<众数

【答案】C

【解析】

【分析】根据平均数、中位数、众数的概念，结合图形分析即可求解.

【详解】图（1）的分布直方图是对称的，所以平均数=中位数=众数，故 A 正确；

图（2）中众数最小，右拖尾平均数大于中位数，故 B 正确，C 错误；

图（3）左拖尾众数最大，平均数小于中位数，故 D 正确.

故选：C

3. 已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，且向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　　　B. $\frac{\pi}{3}$　　　　C. $\frac{\pi}{2}$　　　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，可得 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=0$，结合数量积的运算律可得 $\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{b}\right|$ 的关系，再根据投影向量的公式即可得解.

【详解】因为 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，

所以 $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，

所以 $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，

因为向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，

所以 $\left|\vec{a}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\frac{\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，

即 $\frac{1}{2}\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$，所以 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in\left[0,\pi\right]$，

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{6}$.

故选：A.

4. 复数 $Z=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2024\mathrm{i}^{2024}$ 的虚部是（　　）

A. 1012　　　　B. 1011　　　　C. -1011　　　　D. -1012

【答案】D

【解析】

【分析】由错位相减法化简复数Z后再由复数的运算和复数的几何意义求出结果即可.

【详解】因为$Z=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2024\mathrm{i}^{2024}$，

$Z\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3+3\mathrm{i}^4+\cdots+2024\mathrm{i}^{2025}$，

所以$Z\cdot\left(1-\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2024}-2024\mathrm{i}^{2025}=\dfrac{\mathrm{i}\left(1-\mathrm{i}^{2024}\right)}{1-\mathrm{i}}-2024\mathrm{i}^{2025}$，①

因为$i^4=1$，所以$\mathrm{i}^{2024}=\mathrm{i}^{4\times506}=1$，$\mathrm{i}^{2025}=\mathrm{i}^{4\times506+1}=\mathrm{i}$，

所以化简①可得$\dfrac{-2024\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-2024\mathrm{i}\times\left(1+\mathrm{i}\right)}{\left(1-\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)}=\dfrac{-2024\mathrm{i}+2024}{2}=1012-1012\mathrm{i}$，

所以虚部为-1012，

故选：D.

5. 佳木斯市第一中学为丰富学生课余生活，利用大课间时间举行阳光体育活动，有多项趣味体育运动，某班有 5 位同学想参加旋风接力跑，趣味毛毛虫，企鹅漫步这三项活动，已知这 5 位同学每位学生只能选择一个项目参加，且每个项目都有同学参加，若同学A和B必须选择同一项比赛，则不同的选法种数是（　　）

A. 81　　B. 54　　C. 36　　D. 18

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意把同学A和B捆绑一起与其余三个学生分成三组，然后三个项目对应三组同学利用排列组合计算即可

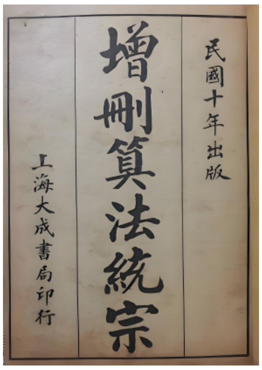
【详解】根据题意把同学A和B捆绑一起与其余三个学生分成三组，即$\dfrac{\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_1^1}{\mathrm{A}_2^2}=6$，

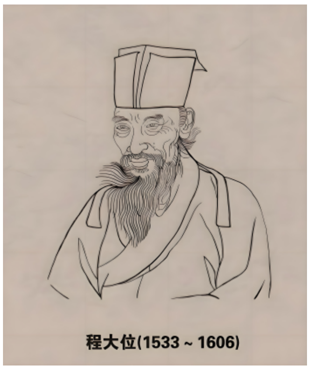
三个项目对应三组同学，即$\dfrac{\mathrm{C}_4^2\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_1^1}{\mathrm{A}_2^2}\cdot\mathrm{A}_3^3=36$，

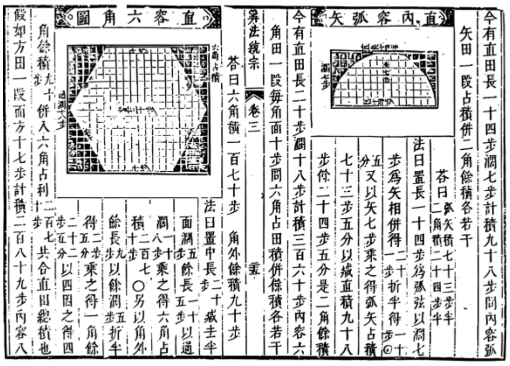
故选：C

6. 《算法统宗》是一部中国古代数学名著，全称为《新编直指算法统宗》，由明代数学家程大位所著．该书在万历二十一年（即公元 1593 年）首次刊行，全书共有 17 卷．其主要内容涵盖了数学名词、大数与小数的解释、度量衡单位以及珠算盘式图和各种算法的口诀等基础知识．同时，书中还按照“九章”的次序列举了多种应用题及其解法，并附有图式说明．此外，《算法统宗》还包括了难题解法的汇编和不能归入前面各类别的杂法算法等内容．其中有一首诗，讲述了“竹筒容米”问题．诗云：‘

家有九节竹一茎，为因盛米不均平，下头三节三升九，上稍四节贮三升，唯有中间两节竹，要将米数次第盛，若有先生能算法，也教算得到天明’(【注释】三升九：3.9 升，次第盛：盛米容积依次相差同一数量）用你所学数学知识求该九节竹一共盛米多少升?（　　）







A. 8.8 升　　B. 9 升　　C. 9.1 升　　D. 9.2 升

【答案】B

【解析】

【分析】设第 n 节竹筒盛米 a_n 升，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，根据等差数列的通项公式求出首项与公差，再根据等差数列前 n 项和公式即可得解.

【详解】设第 n 节竹筒盛米 a_n 升，

则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_2+a_3+a_4=3, a_7+a_8+a_9=3.9$，

设公差为 d，

则有 $\begin{cases}4a_1+6d=3\\3a_1+21d=3.9\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=0.6\\d=0.1\end{cases}$，

所以 $a_n=0.1n+0.5$，

则该九节竹一共盛米 $\frac{(0.6+1.4)\times 9}{2}=9$ 升.

故选：B.

7. 已知 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{3}$，$(a>0,b>0)$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a+b\geq 2\sqrt{3}$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $a^2+b^2\leq 6$　　D. $ab\geq 3$

【答案】C

【解析】

【分析】选项 A，将 $a+b$ 平方后与 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 相乘，化简后利用基本不等式可求出最小值；选项 B，利用不等式 $2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ 可求出 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最大值；选项 C 和 D，将选项与题设条件相乘，化简后利用基本不等式可求出最小值.

【详解】对于选项 A，$\left(a+b\right)^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\left(a^2+2ab+b^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$

$=1+1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geq 2+2\sqrt{1}+2\sqrt{4}=8$，

当且仅当 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}$ 且 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$ 即 $a=b=\sqrt{3}$ 时，等号成立，

所以 $\left(a+b\right)^2\geq\frac{8}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=12$，$a+b\geq 2\sqrt{3}$，

故 A 正确；

对于选项 B，因为 $2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geq 0$，

当且仅当 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$ 即 $a=b=\sqrt{3}$ 时，等号成立，

所以 $\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geq 0$，解得 $0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故 B 正确；

对于选项 C，因为 $\left(a^2+b^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1+1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\geq 2+2\sqrt{1}=4$，

当且仅当 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2}{b^2}$ 即 $a=b=\sqrt{3}$ 时，等号成立，

所以 $a^2+b^2\geq\frac{4}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=6$，

故 C 错误；

对于选项 D，因为 $ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{1}=2$，

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$即$a=b=\sqrt{3}$时，等号成立，

所以$ab\geq\frac{2}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=3$，

故D正确；

故选：C.

8. 已知圆$x^2+y^2=8$上两点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，O为坐标原点，若$\angle AOB=120^\circ$，则$\left|x_1+y_1-4\right|+\left|x_2+y_2-4\right|$的最大值是（　　）

A. 8　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $8\sqrt{2}$　　D. 12

【答案】D

【解析】

【分析】设AB的中点为E，求出点E的轨迹方程，根据点到直线的距离公式可得$\left|x_1+y_1-4\right|+\left|x_2+y_2-4\right|$表示$A,B$两点到直线$x+y-4=0$的距离之和的$\sqrt{2}$倍，求出点$E$到直线$x+y-4=0$的距离的最大值，即可得解

【详解】由圆$x^2+y^2=8$上两点$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

得$|OA|=|OB|=2\sqrt{2}$，

设AB的中点为E，则$OE\perp AB$，

由$\angle AOB=120^\circ$，得$\angle ABO=\angle BAO=\frac{\pi}{6}$，

所以$|OE|=\frac{1}{2}|OA|=\sqrt{2}$，

所以点E的轨迹是以$\sqrt{2}$为半径，O为原点的圆，

$\left|x_1+y_1-4\right|+\left|x_2+y_2-4\right|=\sqrt{2}\left(\frac{\left|x_1+y_1-4\right|}{\sqrt{1+1}}+\frac{\left|x_2+y_2-4\right|}{\sqrt{1+1}}\right)$，

表示A,B两点到直线$x+y-4=0$的距离之和的$\sqrt{2}$倍，

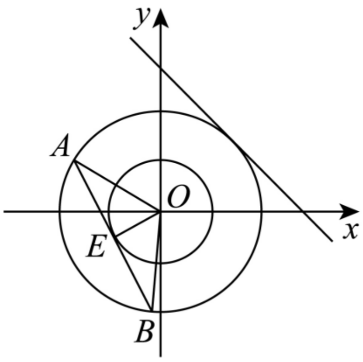
因为E为AB的中点，

故A,B两点到直线$x+y-4=0$的距离之和等于点E到直线$x+y-4=0$的距离的2倍，

圆心O到直线$x+y-4=0$的距离$\frac{|-4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$，

所以点E到直线$x+y-4=0$的距离的最大值为$2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

所以$|x_1+y_1-4|+|x_2+y_2-4|$的最大值是$3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 2=12$.



故选：D.

【点睛】关键点点睛：根据点到直线的距离公式可得$|x_1+y_1-4|+|x_2+y_2-4|$表示A,B两点到直线$x+y-4=0$的距离之和的$\sqrt{2}$倍，是解决本题的关键.

二、多项选择题：（共 3 道小题，每题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分数，有选错的得 0 分．）

9. 过抛物线 C：$y^2=2px$上的一点$M(2,4)$作两条直线l_1，l_2，分别交抛物线C于A，B两点，F为焦点（　　）

A. 抛物线的准线方程为$x=-2$

B. 过点$M(2,4)$与抛物线有且只有一个公共点的直线有 1 条

C. 若$\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$，则$|FM|+|FA|+|FB|=9$

D. 若$k_{AM}+k_{BM}=0$，则$k_{AB}=-1$

【答案】AD

【解析】

【分析】将$M(2,4)$代入抛物线方程，求出p，即可判断 A；分直线斜率是否为零讨论即可判断 B；设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，根据$\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{0}$，求出$x_1+x_2$，再根据焦半径公式即可判断 C；设直线$l_1$的方程为$x-2=n(y-4)(n\neq 0)$，则$l_2$的方程为$x-2=-n(y-4)$，联立方程，求出$A,B$

两点的坐标，再根据斜率公式即可判断 D.

【详解】由题意可得$16=4p$，所以$p=4$，则抛物线C的方程为$y^2=8x$，准线方程为$x=-2$，故 A 正确；

当过点$M\left(2,4\right)$的直线斜率等于零时，直线方程为$y=4$，

直线$y=4$与抛物线的交点坐标为$M\left(2,4\right)$，只有一个交点，

当过点$M\left(2,4\right)$的直线斜率不等于零时，设直线方程为$x-2=m\left(y-4\right)$，

联立$\begin{cases}x-2=m\left(y-4\right)\\y^2=8x\end{cases}$，消$x$得$y^2-8my+32m-16=0$，

当过点$M\left(2,4\right)$与抛物线有且只有一个公共点时，$\Delta=64m^2-4\left(32m-16\right)=0$，解得$m=1$，

综上所述，过点$M\left(2,4\right)$与抛物线有且只有一个公共点的直线有 2 条，故 B 错误；

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，$F\left(2,0\right)$，

由$\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，得$\left(0,4\right)+\left(x_1-2,y_1\right)+\left(x_2-2,y_2\right)=\left(x_1+x_2-4,y_1+y_2+4\right)=\vec{0}$，

所以$x_1+x_2-4=0$，即$x_1+x_2=4$，

所以$\left|FM\right|+\left|FA\right|+\left|FB\right|=4+x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=4+x_1+x_2+p=12$，故 C 错误；

对于 D 选项，由题意，直线l_1,l_2的斜率存在且不为零，

设直线l_1的方程为$x-2=n\left(y-4\right)\left(n\neq 0\right)$，则$l_2$的方程为$x-2=-n\left(y-4\right)$，

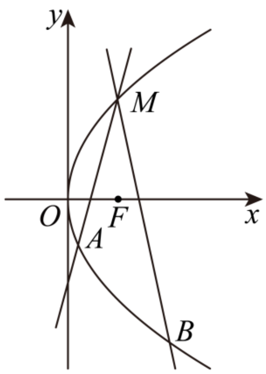
联立$\begin{cases}x-2=n\left(y-4\right)\\y^2=8x\end{cases}$，消$x$得$y^2-8ny+32n-16=0$，

则$4y_1=32n-16$，所以$y_1=8n-4$，

则$x_1=\frac{y_1^2}{8}=8n^2-8n+2$，所以$A\left(8n^2-8n+2,8n-4\right)$，

同理可得$B\left(8n^2+8n+2,-8n-4\right)$，

则$k_{AB}=\frac{\left(-8n-4\right)-\left(8n-4\right)}{\left(8n^2+8n+2\right)-\left(8n^2-8n+2\right)}=\frac{-16n}{16n}=-1$，故 D 正确.



故选：AD.

10. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=CC_1=2$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{D_1E}=\left(1-\lambda\right)\overrightarrow{D_1C_1}$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，以 EF 为直径的球与该长方体各棱公共点的个数可能为（　　）

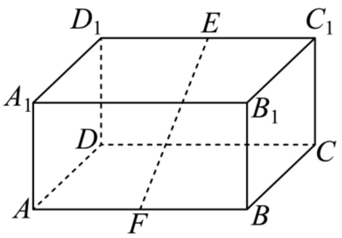
A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 24

【答案】ABC

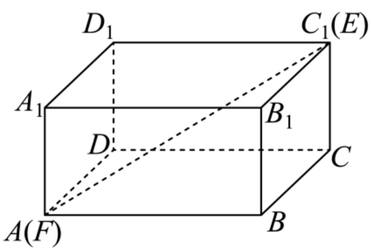
【解析】

【分析】分类讨论当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$、$\lambda=0$、$\lambda=1$、$\lambda\in\left(0,1\right)$ 且 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，球与长方体各棱公共点的个数，即可求解.

【详解】当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，E,F 分别是 AB,C_1D_1 的中点，此时有 4 个交点；



当 $\lambda=0$ 时，F 与 A 重合，E 与 C_1 重合，此时球与 8 个顶点均相交，有 8 个交点；



当 $\lambda=1$ 时，情况同 $\lambda=0$；

当 $\lambda\in\left(0,1\right)$ 且 $\lambda\neq\dfrac{1}{2}$ 时，利用运动的思想，可知存在该球与 12 条棱均有交点的情况；