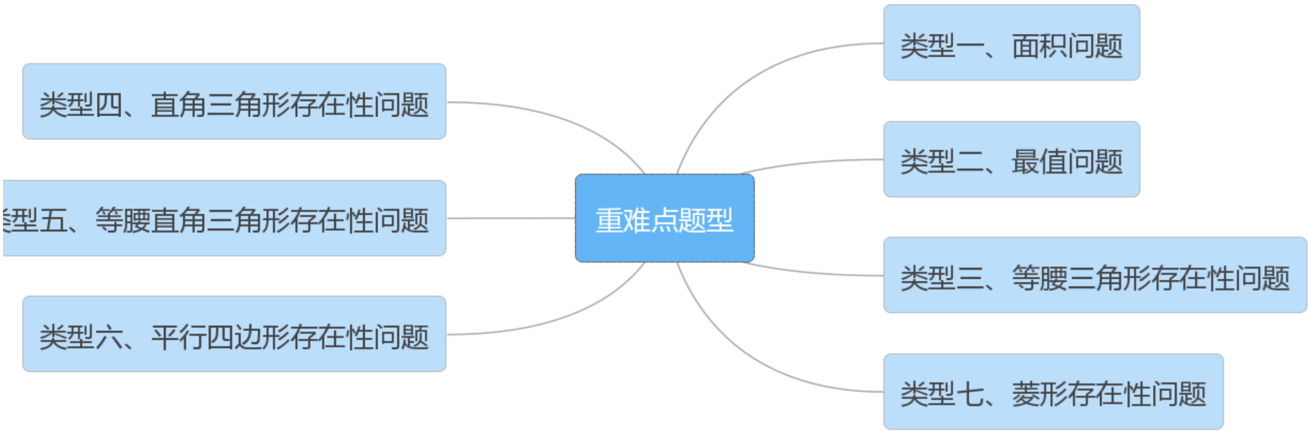
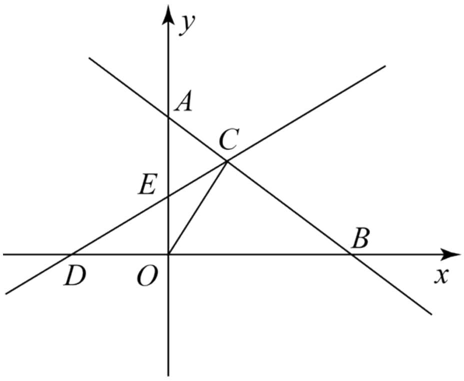
专题 09 一次函数与几何图形综合的七种考法



类型一、面积问题

例．如图，直线 AB 的表达式为 $y=-\frac{3}{4}x+6$，交 x 轴，y 轴分别与 B，A 两点，点 D 坐标为 $(-4,0)$ 点 C 在线段 AB 上，CD 交 y 轴于点 E.



(1)求点 A，B 的坐标．

(2)若 $CD=CB$，求点 C 的坐标．

(3)若 $\triangle ACE$ 与 $\triangle DOE$ 的面积相等，在直线 AB 上有点 P，满足 $\triangle DOC$ 与 $\triangle DPC$ 的面积相等，求点 P 坐标．

【答案】(1) $A(0,6),B(8,0)$；(2) $(2,4.5)$；(3) $\left(\frac{40}{9},\frac{8}{3}\right)$

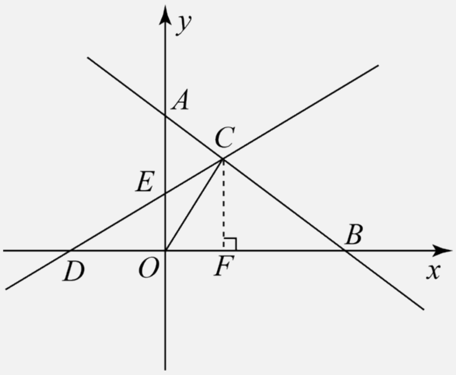
【详解】（1）解：令 $x=0$，则 $y=6$，

令 $y=0$，则 $-\frac{3}{4}x+6=0$，

解得：$x=8$，

$\therefore$点 $A(0,6),B(8,0)$；

（2）解：如图，过点 C 作 $CF\perp BD$ 于点 F，



$\because CD = CB$，

$\therefore DF = BF$，

$\because$点 D 坐标为$(-4,0)$，点 B 的坐标为$(8,0)$，

$\therefore BD = 12$，$OB = 8$，

$\therefore BF = 6$，

$\therefore OF = 2$，

$\therefore$点 F 的坐标为$(2,0)$，

即点 C 的横坐标为 2，

当 $x = 2$ 时，$y = -\frac{3}{4} \times 2 + 6 = 4.5$，

$\therefore$点 C 的坐标为$(2,4.5)$；

（3）解：设点 C 的坐标为$\left(a,-\frac{3}{4}a+6\right)$，

$\because \triangle ACE$ 与 $\triangle DOE$ 的面积相等，

$\therefore S_{\triangle DOE} + S_{\triangle COE} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle COE}$，即 $S_{\triangle DOC} = S_{\triangle AOC}$，

$\therefore \frac{1}{2}OD \times CF = \frac{1}{2}x_c \times OA$，

即 $\frac{1}{2} \times 4 \times \left(-\frac{3}{4}a+6\right) = \frac{1}{2}a \times 6$，

解得：$a = \frac{8}{3}$，

$\therefore$点 C 的坐标为$\left(\frac{8}{3},4\right)$，

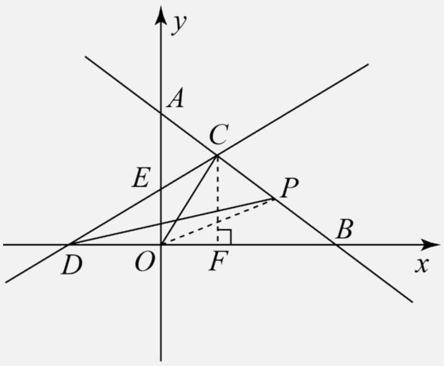
设直线 CD 的解析式为 $y = mx + n$，

把点$\left(\frac{8}{3},4\right)$，$(-4,0)$ 代入得：

$\begin{cases}\frac{8}{3}k+b=4\\-4k+b=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{3}{5}\\b=\frac{12}{5}\end{cases}$，

∴直线 CD 的解析式为 $y=\frac{3}{5}x+\frac{12}{5}$，

如图，连接 OP，



∵$\triangle DOC$ 与 $\triangle DPC$ 的面积相等，

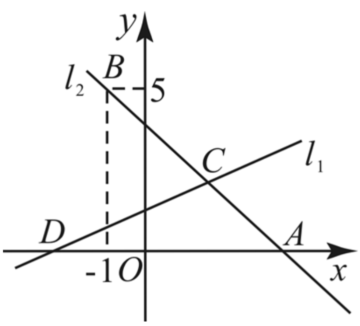
∴点 O 和点 P 到距离相等，此时 $OP \parallel CD$，

∴直线 OP 的解析式为 $y=\frac{3}{5}x$，

联立得：$\begin{cases}y=-\frac{3}{4}x+6\\y=\frac{3}{5}x\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x=\frac{40}{9}\\y=\frac{8}{3}\end{cases}$，

∴点 P 的坐标为 $\left(\frac{40}{9},\frac{8}{3}\right)$.

【变式训练 1】如图，直线 $l_1: y=kx+1$ 与 x 轴交于点 D，直线 $l_2: y=-x+b$ 与 x 轴交于点 A，且经过定点 $B(-1,5)$，直线 l_1 与 l_2 交于点 $C(2,m)$.



(1)填空：$k=$________；$b=$________；$m=$________；

(2)在 x 轴上是否存在一点 E，使 $\triangle BCE$ 的周长最短？若存在，请求出点 E 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)若动点 P 在射线 DC 上从点 D 开始以每秒 1 个单位的速度运动，连接 AP，设点 P 的运动时间为 t 秒．是

否存在t的值，使$\triangle ACP$和$\triangle ADP$的面积比为$1:2$？若存在，直接写出t的值；若不存在，请说明理由．

【答案】(1)$\frac{1}{2}$，4，2

(2)存在，$E\left(\frac{8}{7},0\right)$

(3)存在，$\frac{4}{3}\sqrt{5}$或$4\sqrt{5}$

【详解】（1）$\because$直线$l_2: y=-x+b$与x轴交于点A，且经过定点$B(-1,5)$，

$\therefore 5=1+b$，

$\therefore b=4$，

$\therefore$直线$l_2: y=-x+4$，

$\because$直线$l_2: y=-x+4$经过点$C(2,m)$，

$\therefore m=-2+4=2$，

$\therefore C(2,2)$，

把$C(2,2)$代入$y=kx+1$，得到$k=\frac{1}{2}$．

$\therefore k=\frac{1}{2}$，$b=4$，$m=2$．

故答案为：$\frac{1}{2}$，4，2；

（2）作点C关于x轴的对称点C'，连接BC'交x轴于E，连接EC，则$\triangle BCE$的周长最小．

设直线BC'的解析式为$y=ax+b$，

$\because B(-1,5)$，$C'(2,-2)$，

$\therefore \begin{cases}-a+b=5\\2a+b=-2\end{cases}$，

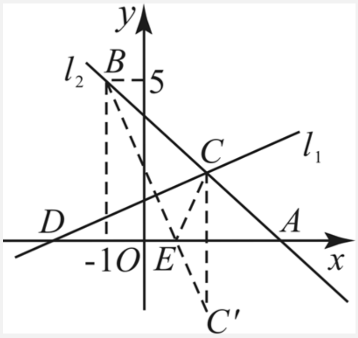
$\therefore \begin{cases}a=-\frac{7}{3}\\b=\frac{8}{3}\end{cases}$，

$\therefore$直线BC'的解析式为$y=-\frac{7}{3}x+\frac{8}{3}$，

令$y=0$，得到$x=\frac{8}{7}$，

$\therefore E\left(\frac{8}{7},0\right)$，

$\therefore$存在一点E，使$\triangle BCE$的周长最短，$E\left(\frac{8}{7},0\right)$；



（3）$\because$点 P 在射线 DC 上从点 D 开始以每秒 1 个单位的速度运动，直线 $l_1: y=\frac{1}{2}x+1$，

$\therefore D(-2,0)$，

$\because C(2,2)$，

$\therefore CD=\sqrt{(2+2)^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

$\because$点 P 的运动时间为 t 秒.

$\therefore DP=t$，

分两种情况：①点 P 在线段 DC 上，

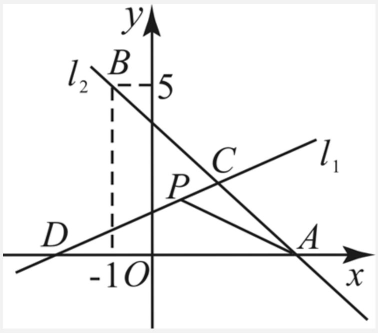
$\because \triangle ACP$ 和 $\triangle ADP$ 的面积比为 $1:2$，

$\therefore \frac{CP}{DP}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{DP}{CD}=\frac{2}{3}$

$\therefore DP=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{5}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$，

$\therefore t=\frac{4}{3}\sqrt{5}$；



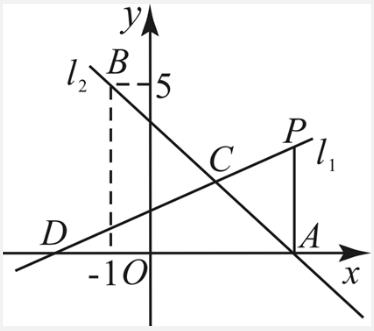
②点 P 在线段 DC 的延长线上，

$\because \triangle ACP$ 和 $\triangle ADP$ 的面积比为 $1:2$，

$\therefore \frac{CP}{DP}=\frac{1}{2}$，

$\therefore DP=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$，

$\therefore t=4\sqrt{5}$



综上：存在t的值，使$\triangle ACP$和$\triangle ADP$的面积比为$1:2$，t的值为$\frac{4}{3}\sqrt{5}$或$4\sqrt{5}$.

【变式训练 2】在平面直角坐标系中，O为原点，点$A(4,0)$，$B(-2,0)$，$C(3,-2)$，点D是y轴正半轴上的动点，连接CD交x轴于点E.

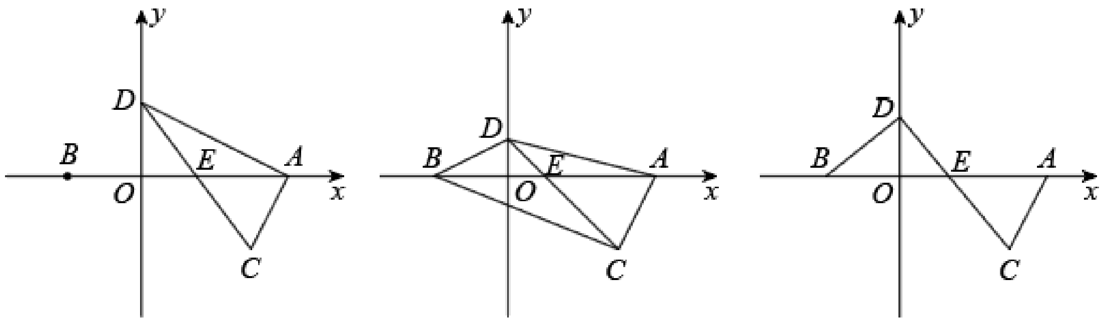


图1　　　　图2　　　　图3

(1)如图①，若点D的坐标为$(0,2)$，求$\triangle ACD$的面积；

(2)如图②，若$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，求点$D$的坐标.

(3)如图③，若$S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ACE}$，请直接写出点$D$的坐标.

【答案】(1)5；

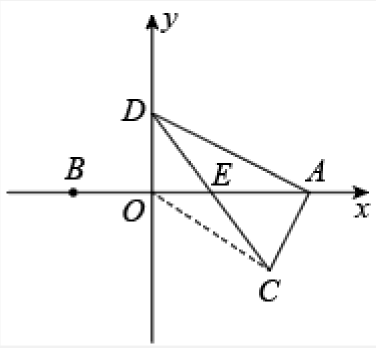
(2) $D(0,1)$；

(3) $D\left(0,\frac{8}{5}\right)$.

【详解】（1）解：如图，连接OC，

$\because A(4,0)$，$B(-2,0)$，$C(3,-2)$，$D(0,2)$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=S_{\triangle AOD}+S_{\triangle AOC}-S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}\times(4\times2+4\times2-2\times3)=5$；



（2）解：$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times6\times2=3$，

$\therefore OD=\frac{2S_{\triangle ABD}}{AB}=\frac{6}{6}=1$，

$\therefore D\left(0,1\right)$；

（3）解：设$D\left(0,m\right)$，

直线CD的解析式为：$y=kx+b$，

则有：$\begin{cases}m=b\\-2=3k+b\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=\dfrac{-2-m}{3}\\b=m\end{cases}$，

$y=\frac{-2-m}{3}x+m$，

令$y=0$，解得$x=\frac{3m}{m+2}$，

$\therefore E\left(\frac{3m}{m+2},0\right)$，

$\therefore S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{3m}{m+2}-\left(-2\right)\right]\times m=\frac{1}{2}m\times\left(\frac{3m}{m+2}+2\right)$，

$S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{3m}{m+2}\right)\times2=4-\frac{3m}{m+2}$，

$\because S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ACE}$，

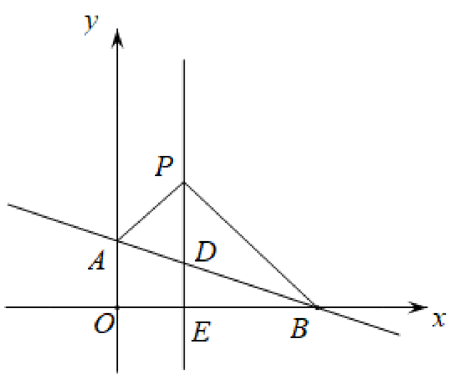
$\therefore\frac{1}{2}m\times\left(\frac{3m}{m+2}+2\right)=4-\frac{3m}{m+2}$，

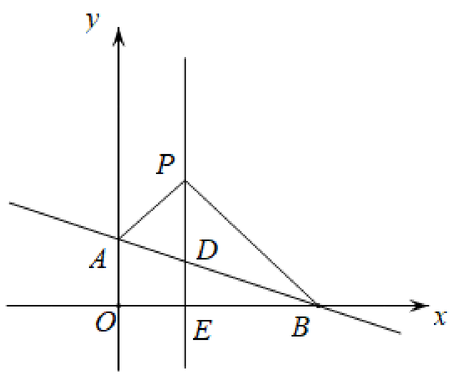
整理得$5m^2+2m-16=0$，

解得$m=\frac{8}{5}$或$m=-2$（不符合题意，舍去），

$\therefore D\left(0,\frac{8}{5}\right)$.

【**变式训练3**】如图，平面直角坐标系中，直线 AB： $y=-\frac{1}{3}x+b$ 交 y 轴于点 $A(0,1)$，交 x 轴于点 B. 过点 $E(1,0)$ 且垂直于 x 轴的直线 DE 交 AB 于点 D，P 是直线 DE 上一动点，且在点 D 的上方，设 $P(1,n)$.





备用图

(1)求直线 AB 的解析式和点 B 的坐标；

(2)求 $\triangle ABP$ 的面积（用含 n 的代数式表示）；

(3)当 $\triangle ABP$ 的面积为 2 时，以 PB 为边在第一象限作等腰直角三角形 BPC，求出点 C 的坐标.

【答案】(1) $y=-\frac{1}{3}x+1$， $B(3,0)$

(2) $\frac{3}{2}n-1$

(3) $(5,2)$ 或 $(3,4)$ 或 $(3,2)$

【详解】（1）解：$\because$ 直线 AB： $y=-\frac{1}{3}x+b$ 交 y 轴于点 $A(0,1)$，

$\therefore b=1$，

$\therefore$ 直线 AB 为 $y=-\frac{1}{3}x+1$，

当 $y=0$ 时， $-\frac{1}{3}x+1=0$，

解得 $x=3$，

$\therefore B(3,0)$；

（2）解：$\because P(1,n)$，

$\therefore D$ 的横坐标为 1，

当 $x=1$ 时， $y=-\frac{1}{3}\times1+1=\frac{2}{3}$，

$\therefore D\left(1,\frac{2}{3}\right)$，

$\therefore PD=n-\frac{2}{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABP}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BPD}$

$=\frac{1}{2}\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdot(1-0)+\frac{1}{2}\left(n-\frac{2}{3}\right)\cdot(3-1)$

$=\frac{3}{2}n-1$；

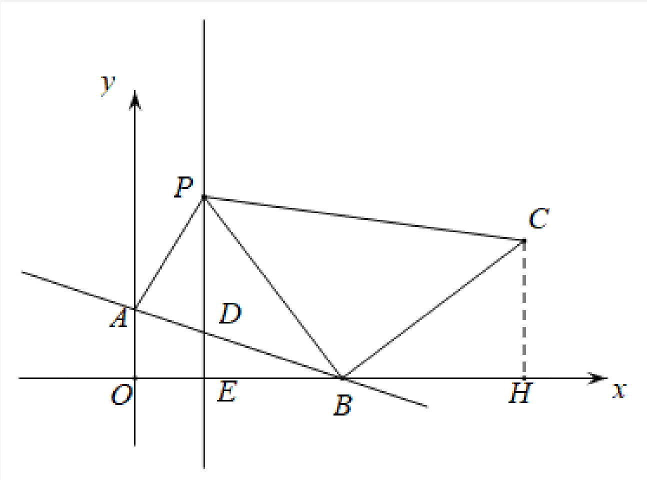
（3）解：根据题意，得$\frac{3}{2}n-1=2$，

解得$n=2$，

$\therefore P(1,2)$，

①以 PB 为腰时，

当 B 为直角顶点时，如图，过点 C 作 $CH\perp x$ 轴于点 H，



则$\angle PEB=\angle PBC=\angle CHB=90^\circ$， $PB=BC$，

$\therefore \angle PBE+\angle BPE=90^\circ$， $\angle PBE+\angle CBH=90^\circ$，

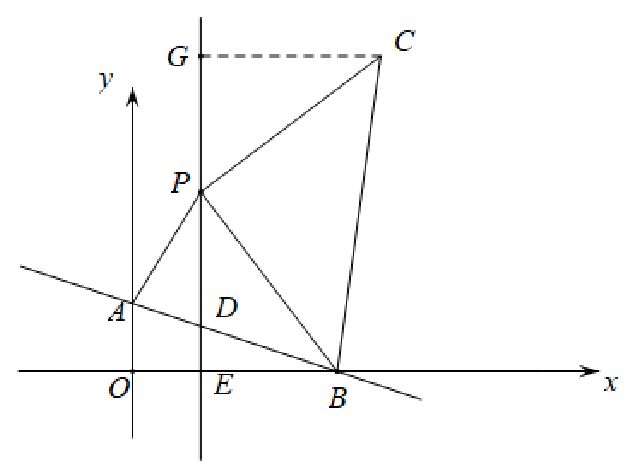
$\therefore \angle BPE=\angle CBH$，

$\therefore \triangle BEP\cong\triangle CHB(\text{AAS})$，

$\therefore BE=CH=2$， $PE=BH=2$，

$\therefore$点$C(5,2)$；

当 P 为直角顶点时，如图，过点 C 作 $CG\perp PE$ 于点 G，



，

则 $\angle PEB=\angle BP=\angle CGB=90^\circ$， $PB=BC$，

$\therefore \angle PBE+\angle BPE=90^\circ$， $\angle BPE+\angle CPG=90^\circ$，

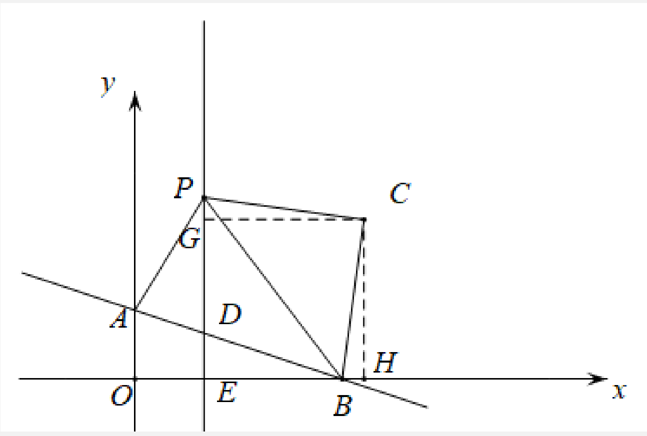
$\therefore$ ÐBPE = ÐCPG，

$\therefore \triangle BEP \cong \triangle PGC(\text{AAS})$，

$\therefore BE=PG=2$， $PE=CG=2$，

$\therefore$点$C(3,4)$；

②以 PB 为底时，如图，过点 C 作 $CG\perp PE$ 于点 G，作 $CH\perp x$ 轴于点 H，



则 $\angle PGC=\angle CGE=\angle CHB=90^\circ=\angle PEB=\angle PCB$， $CP=CB$，

$\therefore \angle GCH=90^\circ=\angle PCB$， $\therefore \angle PCG=\angle BCH$，

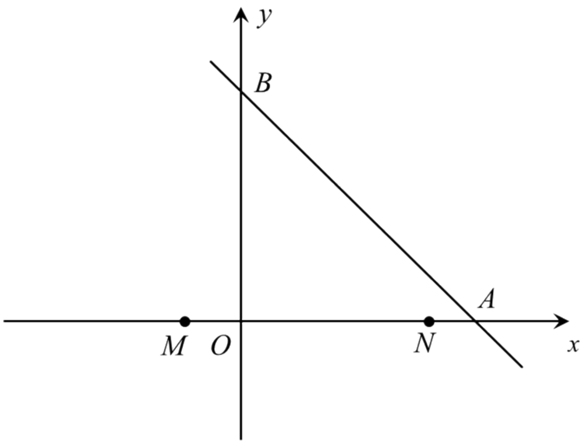
$\therefore\therefore \triangle BCH \cong \triangle PCG(\text{AAS})$， $\therefore BH=PG$， $CH=CG$，

$\therefore BE+BH=PE-PG$， 即 $2+BH=2-BH$， $\therefore BH=PG=0$， $\therefore$点$C(3,2)$；

综上，符合题意的点 C 坐标为$(5,2)$或$(3,4)$或$(3,2)$.

类型二、最值问题

例．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像经过 $A(4,0)$、$B(0,4)$ 两点．



(1) $k=$______，$b=$______．

(2)已知 $M(-1,0)$、$N(3,0)$，

①在直线 AB 上找一点 P，使 $PM=PN$．用无刻度直尺和圆规作出点 P（不写画法，保留作图痕迹）；

②点 P 的坐标为______；

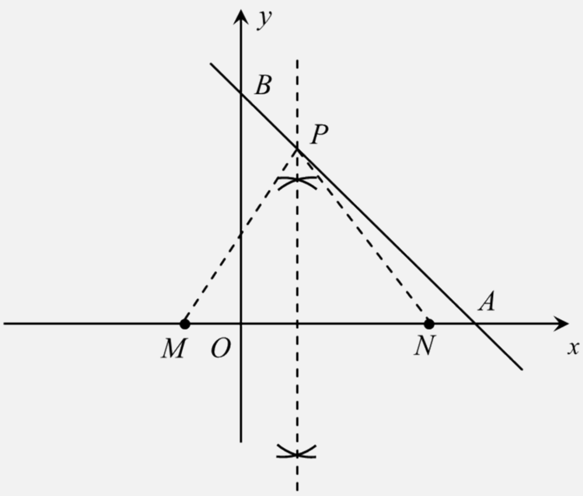
③点 Q 在 y 轴上，那么 $PQ+NQ$ 的最小值为______．

【答案】(1) -1，4；(2)①见解析；② $(1,3)$；③5

【详解】（1）解：将 $A(4,0)$、$B(0,4)$ 代入 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中，

得：$\begin{cases}0=4k+b\\4=b\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-1\\b=4\end{cases}$，故答案为：$-1$，4；

（2）①如图，点 P 即为所求；



②由作图可知：点 P 在 MN 的垂直平分线上，

$\because M(-1,0)$、$N(3,0)$，

$\therefore$点 P 的横坐标为 1，代入 $y=-x+4$ 中，

得：$y=-1+4=3$，

$\therefore P(1,3)$；

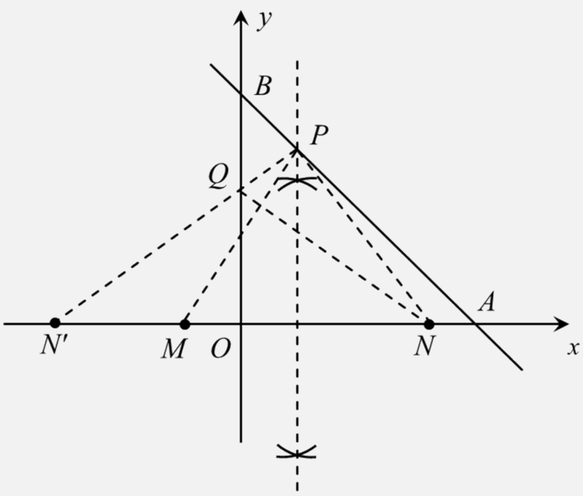
③$\because N(3,0)$，

$\therefore$点 N 关于 y 轴对称点为 $N'(-3,0)$，

则 $QN=QN'$，

$\therefore PQ+NQ=PQ+N'Q=PN'$，

$\therefore PQ+NQ$ 的最小值为 $\sqrt{(-3-1)^2+(0-3)^2}=5$．



【变式训练 1】在平面直角坐标系中，已知直线 l 经过 $A\left(\frac{1}{2},3\right)$ 和 $B(3,-2)$ 两点，且与 x 轴，y 轴分别相交于 C，D 两点．

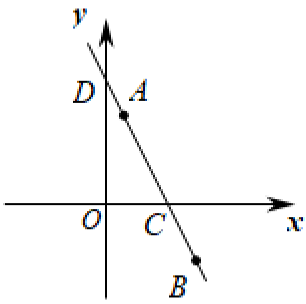
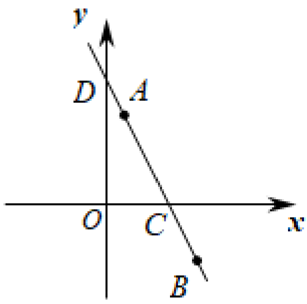
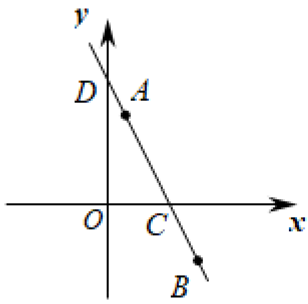


图 1



备用图1



备用图2

(1)求直线l的表达式；

(2)若点E在直线AB上，当$\triangle ODE$的面积等于 2 时，求点E的坐标；

(3)①在x轴上找一点P，使得$|PA-PB|$的值最小，则点P的坐标为______；

②在x轴上找一点Q，使得$|QA-QB|$的值最大，则点Q的坐标为______.

【答案】(1) $y=-2x+4$；(2) $E(1,2)$或$(-1,6)$；(3)①$\left(\frac{3}{4},0\right)$②$(8,0)$

【详解】（1）解：设直线l的表达式是$y=kx+b$，

∵直线l经过$A\left(\frac{1}{2},3\right)$和$B(3,-2)$两点，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}k+b=3\\3k+b=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-2\\b=4\end{cases}$，

∴直线l的表达式是$y=-2x+4$；

（2）在$y=-2x+4$中，令$x=0$，则$y=4$，

$\therefore D(0,4)$，

$\therefore OD=4$，

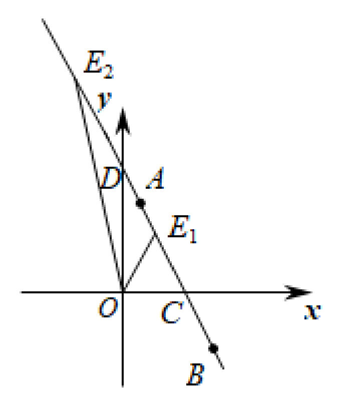
设$E(x,-2x+4)$，

∵$\triangle ODE$的面积等于 2，

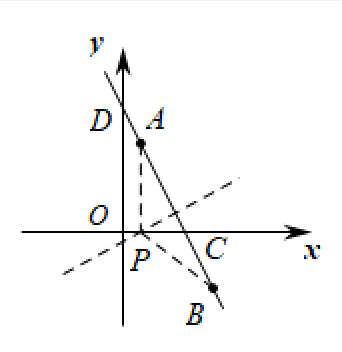
$\therefore\frac{1}{2}OD\cdot|x|=2$，即：$\frac{1}{2}\times4\times|x|=2$，

$\therefore x=\pm1$，

$\therefore E(1,2)$或$(-1,6)$；



（3）①如图，



$\because |PA-BP|\geq 0$，

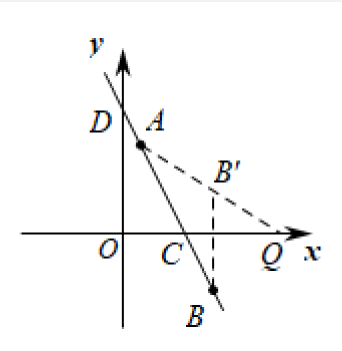
$\therefore$当 $AP=BP$ 时，$|PA-BP|$ 最小，

故点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，作线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 P，则点 P 即为所求．$\therefore PA=PB$，

设 $P(x,0)$，$\therefore \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+3^2}=\sqrt{(x-3)^2+2^2}$．解得：$x=\frac{3}{4}$，

故点 P 的坐标为 $\left(\frac{3}{4},0\right)$，故答案为：$\left(\frac{3}{4},0\right)$；

②如图，作 B 点关于 x 轴的对称点 B'，连接 AB' 并延长交 x 轴于 Q，



则 $|QA-QB|=|QA-QB'|\leq AB'$，即，当 A,B',Q 三点共线时，$|QA-QB|$ 的值最大，

$\because B(3,-2)$，$\therefore B'(3,2)$.

设直线 AB' 的解析式为 $y=mx+n$，

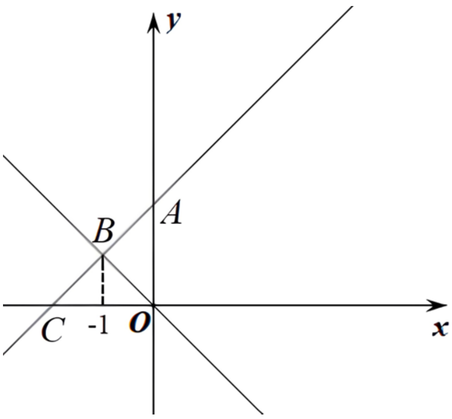
把 A,B' 的坐标代入得 $\begin{cases}\frac{1}{2}m+n=3\\3m+n=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}m=-\frac{2}{5}\\n=\frac{16}{5}\end{cases}$，

$\therefore$直线 AB' 的解析式为：$y=-\frac{2}{5}x+\frac{16}{5}$

当 $y=0$ 时，$x=8$，$\therefore Q(8,0)$.

故答案为：$(8,0)$.

【变式训练 2】如图，一次函数 $y=x+2$ 的图象分别与 x 轴和 y 轴交于 C，A 两点，且与正比例函数 $y=kx$ 的图象交于点 $B(-1,m)$.



(1)求正比例函数的表达式；

(2)点 D 是一次函数图象上的一点，且$\triangle OCD$ 的面积是 4，求点 D 的坐标；

(3)点 P 是 y 轴上一点，当 $BP+CP$ 的值最小时，若存在，点 P 的坐标是______.

【答案】(1) $y=-x$

(2) $(-6,-4)$ 或 $(2,4)$

(3) $P(0,\frac{2}{3})$

【详解】（1）当 $x=-1$ 时，$m=-1+2=1$，

$\therefore$点 $B(-1,1)$ ，

$\therefore 1=-k$，即 $k=-1$，

$\therefore$正比例函数的表达式为 $y=-x$ ；

（2）设点 $D(n,n+2)$ ，

当 $y=0$ 时，$x=-2$，

∴点 $C(-2,0)$，

∴ $OC=2$，

∵ $\triangle OCD$ 的面积是 4，

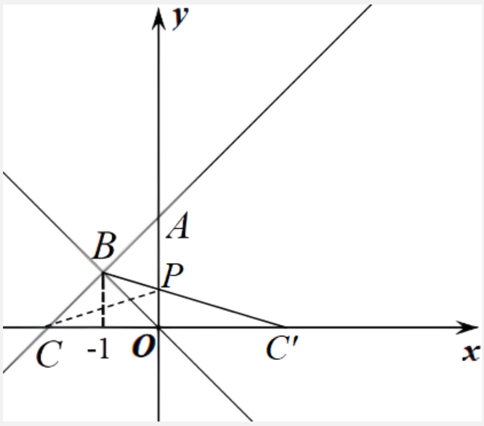
∴ $\frac{1}{2}\times 2\times|n+2|=4$，

解得：$n=-6$ 或 2，

∴点 D 的坐标为 $(-6,-4)$ 或 $(2,4)$；

（3）存在，理由如下：

如图，



取点 C 关于 y 轴的对称点 C'，则 $PC=PC'$，

$\therefore CP+BP=C'P+BP\geq C'B$，

即点 P 位于 $C'B$ 与 x 轴的交点时，$BP+CP$ 最小，

∵点 $C(-2,0)$，

∴点 $C'(2,0)$，

设直线 BC' 的解析式为 $y=ax+b(a\neq 0)$，

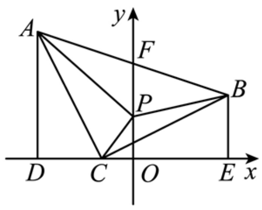
把点 $C'(2,0)$，$B(-1,1)$ 代入得：

$\begin{cases}2a+b=0\\-a+b=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$，

∴直线 BC' 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$，

当 $x=0$ 时，$y=\frac{2}{3}$，$\therefore P(0,\frac{2}{3})$

【变式训练3】如图，在平面直角坐标系内，$A(-3,4)$，$B(3,2)$，点C在x轴上，$AD\perp x$轴，垂足为D，$BE\perp x$轴，垂足为E，线段AB交y轴于点F．若$AC=BC$，$\angle ACD=\angle CBE$．



(1)求点C的坐标；

(2)如果经过点C的直线$y=kx+b$与线段BF相交，求k的取值范围；

(3)若点P是y轴上的一个动点，当$|PA-PC|$取得最大值时，求BP的长．

【答案】(1)$(-1,0)$；(2)$\frac{1}{2}\le k\le 3$；(3)5

【详解】（1）解：$\because AD\perp x$轴，$BE\perp x$轴，$\therefore \angle ADC=\angle BEC=90°$，

在$\triangle ACD$和$\triangle CBE$中，$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB\\ \angle ACD=\angle CBE\\ AC=CB\end{cases}$，$\therefore \triangle ACD\cong\triangle CBE(\text{AAS})$，$\therefore AD=CE$，$CD=BE$，

$\because A(-3,4)$，$B(3,2)$，$\therefore BE=DC=2$，$DO=3$，$\therefore CO=1$，$\therefore C(-1,0)$，$\therefore$点C的坐标为：$(-1,0)$．

（2）解：设经过点A，B的直线的解析式为$y=mx+n$，且$A(-3,4)$，$B(3,2)$，

$\therefore\begin{cases}-3m+n=4\\ 3m+n=2\end{cases}$，解方程组得，$\begin{cases}m=-\frac{1}{3}\\ n=3\end{cases}$，$\therefore$经过点A，$B$的直线的解析式为$y=-\frac{1}{3}x+3$，$\therefore F(0,3)$，

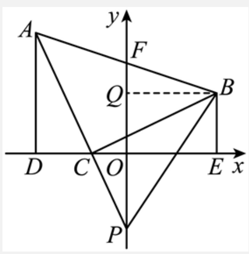
$\because$点$C(-1,0)$在直线$y=kx+b$上，$\therefore -k+b=0$，$\therefore b=k$，则直线的解析式表示为$y=kx+k$，

若直线经过点$B(3,2)$，则$3k+k=2$，解方程得，$k=\frac{1}{2}$；若直线经过点$F(0,3)$，则$k=3$，

$\therefore k$的取值范围是$\frac{1}{2}\le k\le 3$．

（3）解：根据“三角形两边之差小于第三边”可知，$|PA-PC|\le AC$，

$\therefore |PA-PC|$的最大值为AC，则点P为直线AC与y轴的交点，由（1）可知，$\angle ACB=90°$，如图所示，



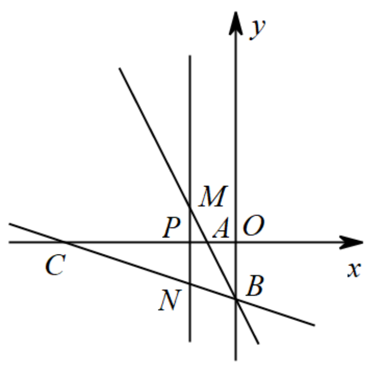
过点 B 作 $BQ\perp y$ 轴于 Q，根据勾股定理得，$BP^2=PC^2+BC^2=CO^2+PO^2+BE^2+CE^2=BQ^2+QP^2$，

设 $OP=t$，则 $1^2+t^2+2^2+4^2=3^2+(2+t)^2$，解方程得，$t=2$，$\therefore BP=\sqrt{BQ^2+PQ^2}=\sqrt{3^2+(2+2)^2}=5$，

$\therefore$ 当 $|PA-PC|$ 取得最大值时，BP 的长为 5．

类型三、等腰三角形存在性问题

例． 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=-2x-1$ 的图像分别交 x 轴、y 轴于点 A 和 B．已知点 C 的标为 $(-3,0)$，若点 P 是 x 轴上的一个动点．



(1)A 的坐标是______，B 的坐标是______；

(2)过点 P 作 y 轴的平行线交 AB 于点 M，交 BC 于点 N，当点 P 恰好是 MN 的中点时，求出 P 点坐标．

(3)若以点 B、P、C 为顶点的 $\triangle BPC$ 为等腰三角形时、请求出所有符合条件的 P 点坐标．

【答案】(1) $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$(0,-1)$；

(2) $P\left(-\frac{6}{7},0\right)$；

(3) $P\left(-\frac{4}{3},0\right)$ 或 $P(3,0)$ 或 $P\left(\sqrt{10}-3,0\right)$ 或 $P\left(-\sqrt{10}-3,0\right)$．

【详解】（1）解：一次函数 $y=-2x-1$ 的图像分别交 x 轴、y 轴于点 A 和 B，

令 $y=0$，即 $-2x-1=0$，

解得 $x=-\frac{1}{2}$，

令 $x=0$，即 $y=-1$，

$A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B(0,-1)$，

故答案为：$\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$(0,-1)$；

（2）设直线 BC 的解析式 $y=kx+b$，

将 $B(0,-1)$，$C(-3,0)$ 代入 $y=kx+b$，

$$\begin{cases}-1=b\\0=-3k+b\end{cases},$$

解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3}\\b=-1\end{cases}$，

∴直线 BC 的函数解析式 $y=-\dfrac{1}{3}x-1$，

设点 $P(m,0)$，则点 $M(m,-2m-1)$，点 $N\left(m,-\dfrac{1}{3}m-1\right)$，

依题意可得 $PM=PN$，

$\therefore (-2m-1)-0=0-\left(-\dfrac{1}{3}m-1\right)$，

解得：$m=-\dfrac{6}{7}$，$\therefore P\left(-\dfrac{6}{7},0\right)$；

（3）设 $P(x,0)$，而 $B(0,-1)$ $C(-3,0)$，

$\therefore PC^2=[x-(-3)]^2=(x+3)^2$，$PB^2=x^2+1^2=x^2+1$，$BC^2=3^2+1^2=10$，

当 $PC=PB$ 时，有 $(x+3)^2=x^2+1$，解得：$x=-\dfrac{4}{3}$，$\therefore P\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$，

当 $PB=BC$，有 $x^2+1=10$，解得：$x=\pm3$，

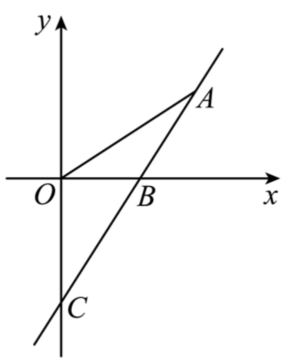
$x=-3$ 不合题意舍去，$\therefore P(3,0)$，

当 $PC=BC$ 时，有 $(x+3)^2=10$，解得：$x_1=\sqrt{10}-3$ 或 $x_2=-\sqrt{10}-3$，

$\therefore P(\sqrt{10}-3,0)$ 或 $P(-\sqrt{10}-3,0)$，

综上所述：$P\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ 或 $P(3,0)$ 或 $P(\sqrt{10}-3,0)$ 或 $P(-\sqrt{10}-3,0)$，

【变式训练 1】 直线 $y=kx-8$ 与 x 轴、y 轴分别交于 B、C 两点，且 $\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{4}{3}$.



(1)求 OB 的长和 k 的值；

(2)若点 A 是第一象限内直线 $y=kx-8$ 上的一个动点，当它运动到什么位置时，$\triangle AOB$ 的面积是 12？

(3)在（2）成立的情况下，y 轴上是否存在点 P，使 $\triangle POA$ 是等腰三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．（写过程）

【答案】(1) $OB=6$，$k=\frac{4}{3}$；

(2)当点 A 运动到 $(9,4)$ 时，$\triangle AOB$ 的面积是 12；

(3) $\left(0,\sqrt{97}\right)$，$\left(0,-\sqrt{97}\right)$，$\left(0,\frac{97}{8}\right)$，$(0,8)$．

【详解】（1）解：$\because$ $y=kx-8$，

当 $x=0$ 时，$y=-8$，$\therefore$点 C 的坐标为 $(0,-8)$，$\therefore OC=8$，

又$\because$ $\frac{OC}{OB}=\frac{4}{3}$，$\therefore OB=6$，即点 B 的坐标为 $(6,0)$，

将 $(6,0)$ 代入 $y=kx-8$，得：$6k-8=0$，解得，$k=\frac{4}{3}$；综上所述：$OB=6$，$k=\frac{4}{3}$．

（2）作 $AD\perp OB$ 于 D，

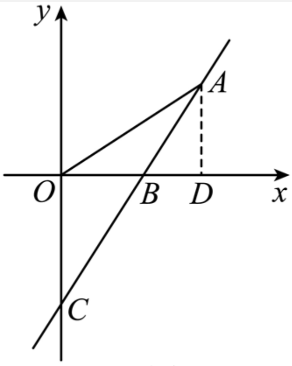


图1

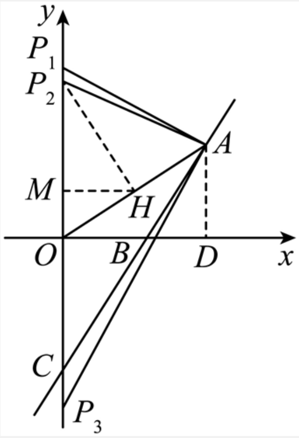
由题意得，$\frac{1}{2}\times OB\times AD=12$，

$\because OB=6$，$\therefore$解得，$AD=4$，即点 A 的纵坐标为 4，$\frac{4}{3}x-8=4$，解得，$x=9$，

$\therefore$当点 A 运动到 $(9,4)$ 时，$\triangle AOB$ 的面积是 12；

（3）在（2）成立的情况下，y 轴上存在一点 P，使 $\triangle POA$ 是等腰三角形，

分四种情况考虑：



当 $OA=OP_1=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$ 时，$P_1\left(0,\sqrt{97}\right)$；

当 $OA=OP_3=\sqrt{97}$ 时，$P_3\left(0,-\sqrt{97}\right)$；

当 $AP_2=OP_2$ 时，作 $P_2H\perp OA$，$AD\perp OB$，$HM\perp OP_1$

$\because AP_2=OP_2$

$\because$ P_2 为线段 OA 垂直平分线与 x 轴的交点，$A(9,4)$，$\therefore OH=\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{97}}{2}$，$H\left(\frac{9}{2},2\right)$，$M(0,2)$

设 $P_2(0,\ a)$，则 $MP_2=a-2$，$MH=\frac{9}{2}$

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle P_2MH$ 中，$P_2H^2=MH^2+MP_2^2$，即 $P_2H^2=\left(\frac{9}{2}\right)^2+(a-2)^2$

在 $\mathrm{Rt}\triangle OHP_2$ 中，$P_2H^2=OP_2^2-OH^2$，即 $P_2H^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{97}}{2}\right)^2$，$\therefore\left(\frac{9}{2}\right)^2+(a-2)^2=a^2-\left(\frac{\sqrt{97}}{2}\right)^2$

$\therefore a=\frac{97}{8}$，$\therefore OP_2=\frac{97}{8}$，$P_2\left(0,\frac{97}{8}\right)$，

当 $OA=AP_4=2AD=8$ 时，$P_4(0,8)$；

综上，P 的坐标为 $\left(0,\sqrt{97}\right)$，$\left(0,-\sqrt{97}\right)$，$\left(0,\frac{97}{8}\right)$，$(0,8)$.

【变式训练 2】在平面直角坐标系中，直线 MN 交 x 轴正半轴于点 M，交 y 轴负半轴于点 $N(0,-3)$，$\angle ONM=30°$，作线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B.

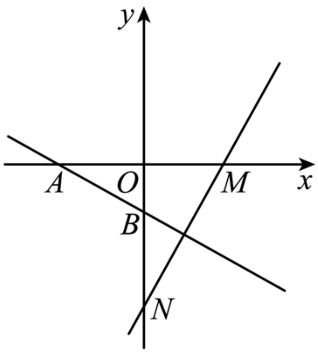


图1

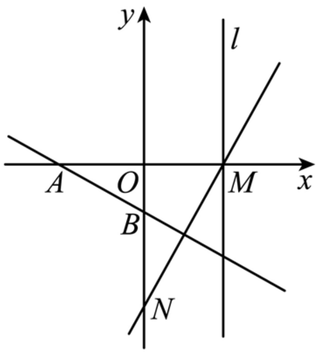


图2

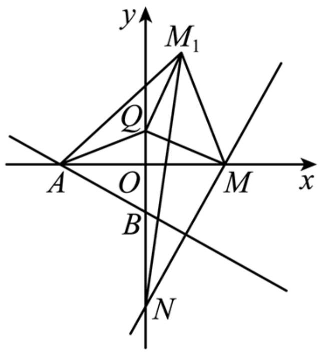


图3

(1)如图 1，求直线 MN 的解析式和 A 点坐标；

(2)如图 2，过点 M 作 y 轴的平行线 l，P 是 l 上一点，若 $S_{\triangle ANP}=6\sqrt{3}$，求点 P 坐标；

(3)如图 3，点 Q 是 y 轴的一个动点，连接 QM 、AQ，将 $\triangle MAQ$ 沿 AQ 翻折得到 $\triangle M_1AQ$，当 $\triangle M_1MN$ 是等腰三角形时，求点 Q 的坐标．

【答案】(1) $y=\sqrt{3}x-3$；$A\left(-\sqrt{3},0\right)$；(2) $P_1\left(\sqrt{3},6\right)$，$P_2\left(\sqrt{3},-18\right)$．(3) $Q\left(0,1\right)$，$\left(0,-3\right)$，$\left(0,3\pm2\sqrt{3}\right)$．

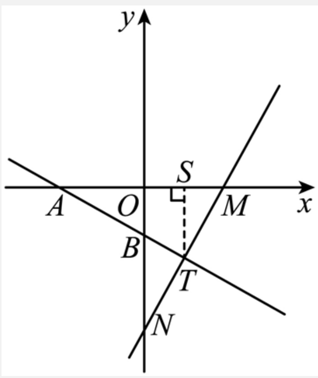
【详解】（1）解：$\because N\left(0,-3\right)$，$\angle ONM=30°$，

$\therefore MN=2OM$，$\angle NMO=60°$，$\therefore\left(2OM\right)^2=OM^2+3^2$，解得：$OM=\sqrt{3}$，

设 MN 为 $y=kx+b$，$\therefore\begin{cases}b=-3\\ \sqrt{3}k+b=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\sqrt{3}\\ b=-3\end{cases}$，$\therefore MN: y=\sqrt{3}x-3$，

$\because AB$ 垂直平分 MN，

$\therefore MN$ 的中点 T 的坐标为：$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，$\angle MAB=30°$，



过 T 作 $TS\perp AM$ 于 S，则 $AT=2ST=3$，

$\therefore AS=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AO=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$\therefore A\left(-\sqrt{3},0\right)$．

（2）在 y 轴上取一点 $Q(0,y)$，使得 $S_{\triangle ANQ}=6\sqrt{3}$.

$\because S_{\triangle ANQ}=\frac{1}{2}NQ\cdot OA$,

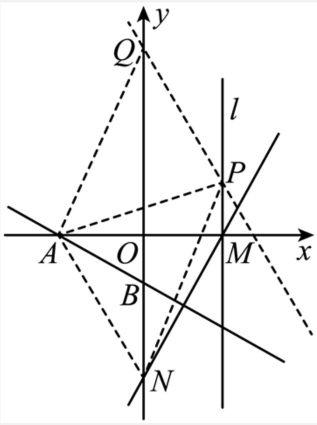
$\therefore \frac{1}{2}\times|y+3|\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$，解得 $y_1=9$，$y_2=-15$，$\therefore Q_1(0,9)$，$Q_2(0,-15)$.

$\because A(\sqrt{3},0)$，$N(0,-3)$，

同理可得：AN 的解析式为：$y=-\sqrt{3}x-3$，

作 QP // AN 交 l 于 P，$\therefore Q_1P: y=-\sqrt{3}x+9$，

$\therefore y=-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+9=6$，即 $P(\sqrt{3},6)$



同理 Q_2P：$y=-\sqrt{3}x-15$，$\therefore P(\sqrt{3},-18)$.

综上：$P(\sqrt{3},6)$，$P(\sqrt{3},-18)$.

（3）①如图，当 $MN=MM_1=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$ 时，

由轴对称的性质可得：$AM_1=AM=2\sqrt{3}$，

$\because AN=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore AN=AM_1=MM_1=MN$，

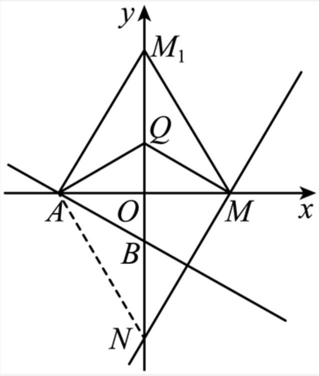
$\therefore$由垂直平分线的判定定理可得：AM，M_1N 互相垂直平分，

$\therefore M_1$ 在 y 轴上，且 $M_1(0,3)$，

设 $AQ=M_1Q=m$，

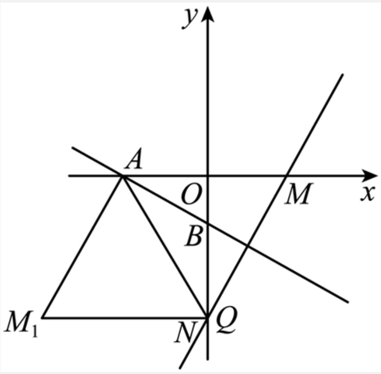
$\therefore m^2=(3-m)^2+(\sqrt{3})^2$，解得：$m=2$，

$\therefore QO=1$，



$\therefore Q(0,1)$.

②当 $NM=NM_1$ 时，如图，

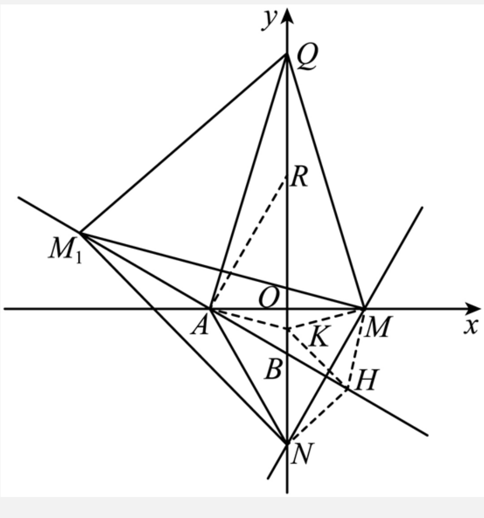


由 $AN=NM=AM=2\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle ANM$ 为等边三角形，

此时 Q，N 重合，$\therefore Q(0,-3)$；

③当 $M_1M=M_1N$ 时，M_1 在直线 AB 上，如图，



$\because \angle OAB=30^\circ$，

$\therefore \angle M_1AO = 150°$， $\angle QAM = \frac{1}{2}\times 150° = 75°$， $\angle AQO = 15°$，

作 $\angle RAO = 60°$， R 在 y 轴上，

$\therefore \angle QAR = 15° = \angle AQR$， $\angle ARO = 30°$，

$\therefore AR = QR = 2\sqrt{3}$， $OR = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 3$

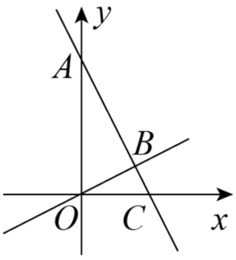
$\therefore Q\left(0, 3+2\sqrt{3}\right)$；

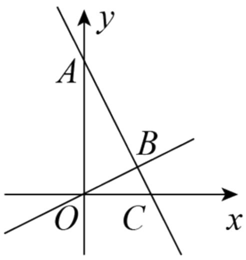
同理：如图，当 Q 在 K 的位置， M_1 在 H 的位置，

此时 $Q\left(0, 3-2\sqrt{3}\right)$.

综上： $Q(0,1)$ 或 $(0,-3)$ 或 $\left(0, 3\pm 2\sqrt{3}\right)$.

【变式训练 3】如图，一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 C，与 y 轴交于点 $A(0,5)$，与正比例函数 $y = \frac{1}{2}x$ 的图象交于点 B，且点 B 的横坐标为 2，点 P 为 y 轴上的一个动点.





备用图

(1)求 B 点的坐标和 k 、 b 的值；

(2)连接 CP，当 $\triangle ACP$ 与 $\triangle AOB$ 的面积相等时，求点 P 的坐标；

(3)连接 BP，是否存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 为等腰三角形?若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $B(2,1)$； $k = -2$； $b = 5$

(2) $P(0,1)$ 或 $(0,9)$

(3)存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，点 P 的坐标为 $\left(0, 5+2\sqrt{5}\right)$ 或 $\left(0, 5-2\sqrt{5}\right)$ 或 $(0,-3)$ 或 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

【详解】（1）解：将 $x = 2$ 代入 $y = \frac{1}{2}x$，得 $y = 1$， $\therefore$点 B 的坐标为 $(2,1)$.

$\because$一次函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象与 y 轴交于点 $A(0,5)$， $\therefore b = 5$，　即 $y = kx + 5(k \neq 0)$.

将点 $B(2,1)$ 代入 $y=kx+5$，得 $2k+5=1$，解得 $k=-2$．

（2）解：$\because A(0,5)$，$B(2,1)$，

$\therefore OA=5$，$\triangle AOB$ 中 OA 边上的高为 2，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$，$\therefore S_{\triangle ACP}=5$．

在 $y=-2x+5$ 中，令 $y=0$，得 $x=\frac{5}{2}$，

$\therefore C\left(\frac{5}{2},0\right)$，即 $\triangle ACP$ 中，AP 边上的高为 $\frac{5}{2}$，

$\therefore \frac{1}{2}\cdot AP\cdot\frac{5}{2}=5$，解得 $AP=4$．

又 $\because A(0,5)$，$\therefore P(0,1)$ 或 $(0,9)$．

（3）解：如图 1，过点 B 作 $BH\perp y$ 轴于点 H，

则 $H(0,1)$，

所以 $BH=2$，$AH=4$，所以 $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=2\sqrt{5}$．

①当 $AB=AP$ 时，$AP=2\sqrt{5}$．

因为 $A(0,5)$，所以此时点 P 的坐标为 $(0,5+2\sqrt{5})$ 或 $(0,5-2\sqrt{5})$；

②当 $AB=BP$ 时，由等腰三角形的性质易得 $PH=AH$．因为 $AH=4$，所以 $PH=4$．

因为 $H(0,1)$，所以此时点 P 的坐标为 $(0,-3)$；

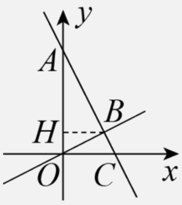


图1

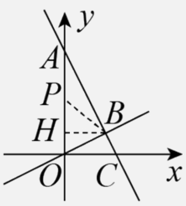


图2

③当 $PA=PB$ 时，如图 2，设 $P(0,m)$，则

$PA^2=(5-m)^2$，$PH=m-1$，所以 $PB^2=PH^2+BH^2=(m-1)^2+2^2$，

所以 $(5-m)^2=(m-1)^2+2^2$，解得 $m=\frac{5}{2}$，所以此时点 P 的坐标为 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

综上可知，存在点 P 使得 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，点 P 的坐标为 $(0,5+2\sqrt{5})$ 或 $(0,5-2\sqrt{5})$ 或 $(0,-3)$ 或 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

类型四、直角三角形存在性问题

例． 如图1，在平面直角坐标系xOy中，点O为坐标原点，直线$AB:y=\frac{3}{4}x+b$与直线AC：$y=kx+9$交于点$A(2,n)$，与x轴分别交于点$B(-6,0)$和点C．点D为线段BC上一动点，将$\triangle ABD$沿直线AD翻折得到$\triangle ADE$，线段AE交x轴于点F．

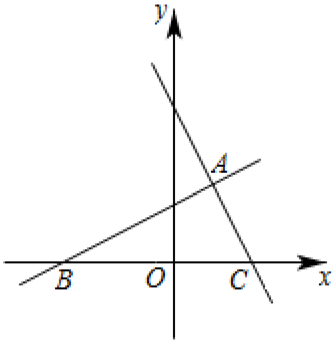


图1

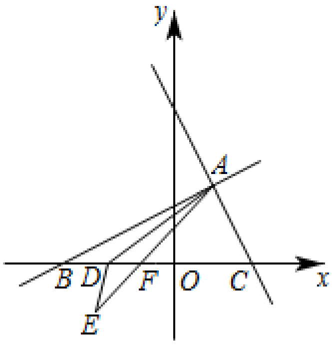
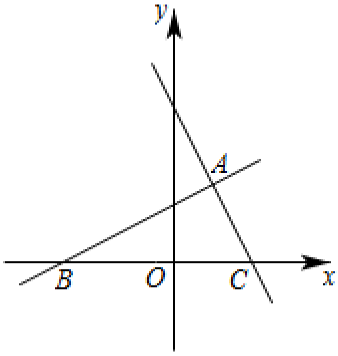


图2



备用图

(1)直线AC的函数表达式．

(2)当点D在线段BO上，点E落在y轴上时，求点E的坐标．

(3)若$\triangle DEF$为直角三角形，求点D的坐标．

【答案】(1) $y=-\frac{3}{2}x+9$

(2) $E\left(0,6-4\sqrt{6}\right)$

(3) $D(-1,0)$或$D(-4,0)$

【详解】（1）解：将$B(-6,0)$代入直线$AB:y=\frac{3}{4}x+b$中，

解得$b=\frac{9}{2}$，

∴直线AB的解析式为$y=\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$，

将点A的坐标代入，得$n=6$，

∴$A(2,6)$，

将点A的坐标代入直线$AC:y=kx+9$中，

解得$k=-\frac{3}{2}$，

∴直线AC的解析式为：$y=-\frac{3}{2}x+9$

（2）（3）过点A作$AM\perp x$轴于M，$AN\perp y$轴于N，则$AM=6$，$AN=2$，

由折叠得 $AB=AE$，

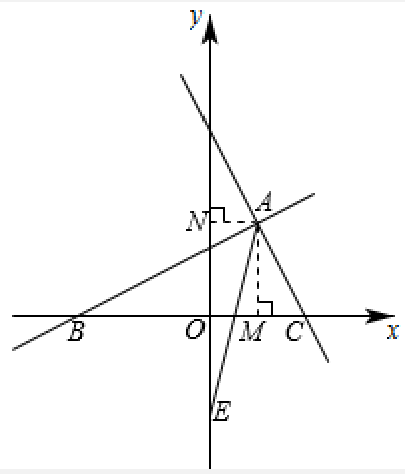
$\therefore AM^{2}+BM^{2}=AN^{2}+NE^{2}$，

$\therefore 6^{2}+8^{2}=2^{2}+(6+OE)^{2}$，

解得 $OE=4\sqrt{6}-6$（负值已舍去），

又 E 在 y 轴负半轴，

$\therefore E\left(0,6-4\sqrt{6}\right)$；



（3）分两种情况：

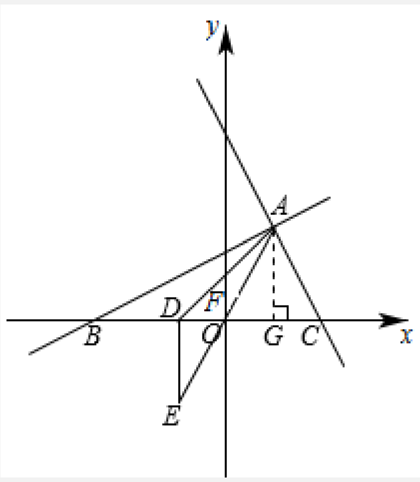
①当 $\angle EDF=90°$ 时，如图，

由折叠得 $\angle ADB=\angle ADE=\frac{1}{2}(360°-90°)=135°$，

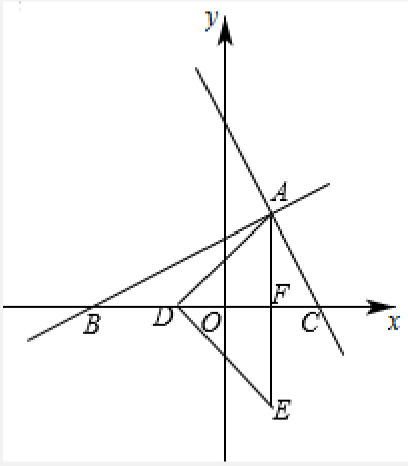
$\therefore \angle ADO=135°-90°=45°$，

过 A 作 $AG\perp x$ 轴于 G，$\therefore AG=DG=6$，

$\because OG=2$，$\therefore OD=4$，$\therefore D(-1,0)$；



②当$\angle DFE=90°$时，如图，



由折叠得$AE=AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$，$BD=DE$，

$\therefore EF=10-6=4$，

由A、B两点坐标可得：$BF=2-(-6)=8$，

设$DF=m$，则$BD=8-m$，

$\therefore DE=8-m$，

$\therefore (8-m)^2=m^2+4^2$，

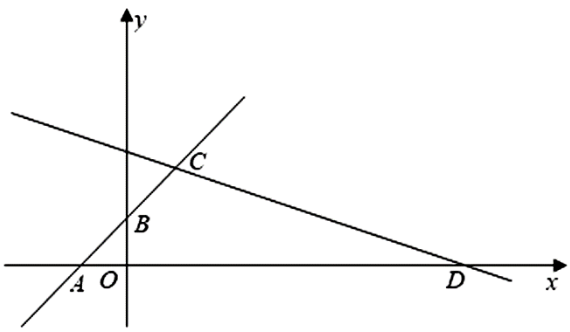
解得$m=3$，

$\therefore OD=DF-OF=3-2=1$，

$\therefore D(-1,0)$，

综上，$D(-1,0)$或$D(-4,0)$．

【变式训练1】综合与探究：如图，在平面直角坐标系中，直线$y=x+2$与x轴，y轴分别交于点A，B，与直线$y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$交于点$C$．直线$y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$与$x$轴交于点$D$，若点$P$是线段$AD$上的一个动点，点$P$从点$D$出发沿$DA$方向，以每秒2个单位长度匀速运动到点$A$（到$A$停止运动）．设点$P$的运动时间为$t$s．



(1)求点A和点B的坐标；

(2)当△ACP的面积为12时，求t的值；

(3)试探究，在点P运动过程中，是否存在t的值，使△ACP为直角三角形？若存在，请直接写出t的值；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $A\left(-2,0\right)$， $B\left(0,2\right)$

(2) $t=5$

(3)存在，t的值为4或6

【详解】（1）解：在$y=x+2$中，令$y=0$得$x+2=0$，

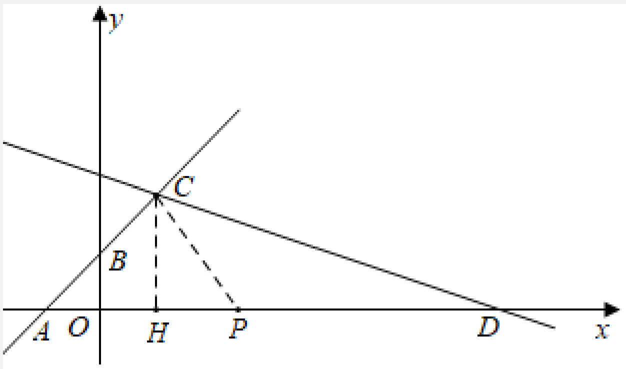
解得$x=-2$，

$\therefore A\left(-2,0\right)$，

在$y=x+2$中，令$x=0$得$y=2$，

$\therefore B\left(0,2\right)$；

（2）解：过C作$CH\perp x$轴于H，连接CP，如图：



在$y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}$中，令$y=0$得：$-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}=0$，

解得$x=14$，

$\therefore D\left(14,0\right)$，

$\therefore AD=16$，

由$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-\frac{1}{3}x+\frac{14}{3} \end{cases}$，得：$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$，

$\therefore C\left(2,4\right)$，

$\therefore CH=4$，

$\because$点P从点D出发沿DA方向，以每秒2个单位长度匀速运动到点A，