专题16 函数与导数常见经典压轴小题全归类

【命题规律】

1、导数的计算和几何意义是高考命题的热点，多以选择题、填空题形式考查，难度较小.

2、应用导数研究函数的单调性、极值、最值多在选择题、填空题靠后的位置考查，难度中等偏上，属综合性问题.

【核心考点目录】

【真题回归】

1．（2022·全国·统考高考真题）当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$（　）

A．-1　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

2．（2022·全国·统考高考真题）函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 的最小值、最大值分别为（　）

A．$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　B．$-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}$　　C．$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$　　D．$-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$

3．（多选题）（2022·全国·统考高考真题）已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　）

A．$f(x)$ 有两个极值点　　B．$f(x)$ 有三个零点

C．点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　D．直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

4．（2022·天津·统考高考真题）设 $a\in R$，对任意实数 x，记 $f(x)=\min\{|x|-2,x^2-ax+3a-5\}$．若 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为______．

5．（2022·全国·统考高考真题）已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的极小值点和极大值点．若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是____________．

6．（2022·全国·统考高考真题）若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________________．

7．（2022·浙江·统考高考真题）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, & x\le 1,\\ x+\frac{1}{x}-1, & x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$________；若当 $x\in[a,b]$ 时，$1\le f(x)\le 3$，则 $b-a$ 的最大值是_________．

8．（2022·全国·统考高考真题）曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为____________，____________．

9．（2022·北京·统考高考真题）设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, & x<a,\\ (x-2)^2, & x\ge a.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为___________．

【方法技巧与总结】

1、求分段函数的函数值，要先确定要求值的自变量属于哪一段区间，然后代入该段的解析式求值，当出现 $f(f(a))$ 的形式时，应从内到外依次求值；当给出函数值求自变量的值时，先假设所求的值在分段函数定义区间的各段上，然后求出相应自变量的值，切记要代入检验，看所求的自变量的值是否满足相应段自变量的取值范围．

2、含有抽象函数的分段函数，在处理时首先要明确目标，即让自变量向有具体解析式的部分靠拢，其次要理解抽象函数的含义和作用（或者对函数图象的影响）．

3、含分段函数的不等式在处理上通常有两种方法：一种是利用代数手段，通过对 x 进行分类讨论将不等式转变为具体的不等式求解；另一种是通过作出分段函数的图象，数形结合，利用图象的特点解不等式．

4、分段函数零点的求解与判断方法：

（1）直接法：直接根据题设条件构造关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成球函数值域的问题加以解决；

（3）数形结合法：先将解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图象，然后数形结合求解.

5、动态二次函数中静态的值：

解决这类问题主要考虑二次函数的有关性质及式子变形，注意二次函数的系数、图象的开口、对称轴是否存在不变的性质，二次函数的图象是否过定点，从而简化解题.

6、动态二次函数零点个数和分布问题：

通常转化为相应二次函数的图象与 x 轴交点的个数问题，结合二次函数的图象，通过对称轴，根的判别式，相应区间端点函数值等来考虑.

7、求二次函数最值问题，应结合二次函数的图象求解，有三种常见类型：

（1）对称轴变动，区间固定；

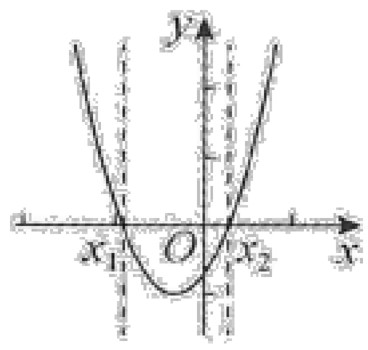
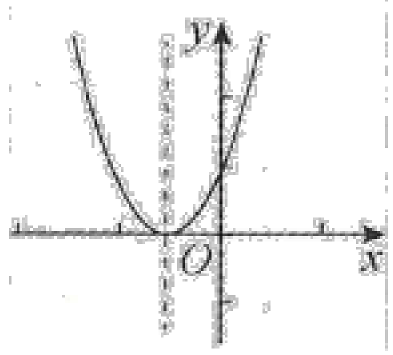
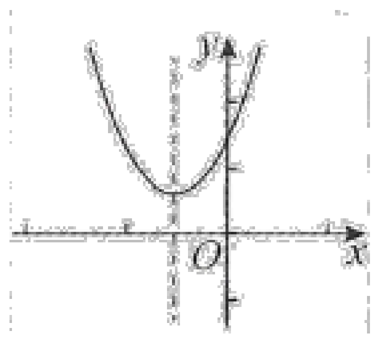
（2）对称轴固定，区间变动；

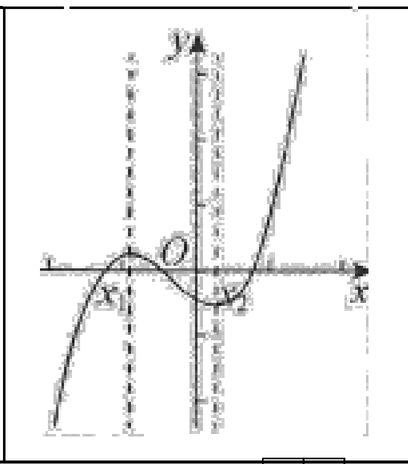
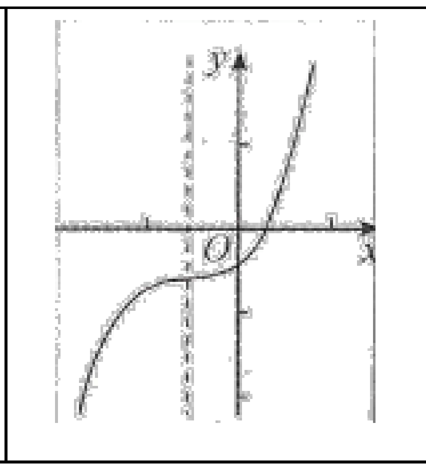
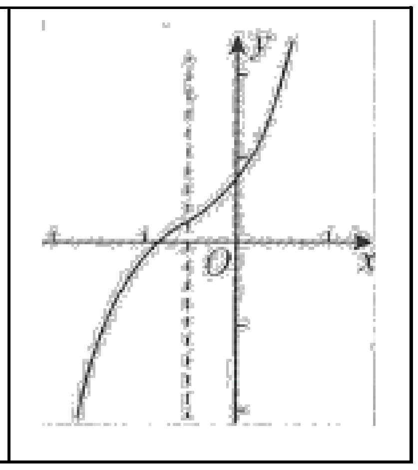
（3）对称轴变动，区间也变动.

这时要讨论对称轴何时在区间之内，何时在区间之外．讨论的目的是确定对称轴和区间的关系，明确函数的单调情况，从而确定函数的最值.

8、由于三次函数的导函数为我们最熟悉的二次函数，所以基本的研究思路是：借助导函数的图象来研究原函数的图象．如借助导函数的正负研究原函数的单调性；借助导函数的（变号）零点研究原函数的极值点（最值点）；综合借助导函数的图象画出原函数的图象并研究原函数的零点…

具体来说，对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$，其导函数为 $f'(x)=3ax^2+2bx+c\ (a>0)$，根的判别式 $\Delta=4(b^2-3ac)$.

$a>0$				
	判别式	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$	图象			
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$	单调性	增区间：$(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$； 减区间：(x_1,x_2)	增区间：$(-\infty,+\infty)$	增区间：$(-\infty,+\infty)$

	图象			

（1）当 $\Delta \leqslant 0$ 时，$f'(x) \geqslant 0$ 恒成立，三次函数 $f(x)$ 在 R 上为增函数，没有极值点，有且只有一个零点；

（2）当 $\Delta > 0$ 时，$f'(x)=0$ 有两根 x_1，x_2，不妨设 $x_1 < x_2$，则 $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$，可得三次函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$，$(x_2, +\infty)$ 上为增函数，在 (x_1, x_2) 上为减函数，则 x_1，x_2 分别为三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的两个不相等的极值点，那么：

① 若 $f(x_1)\cdot f(x_2) > 0$，则 $f(x)$ 有且只有 1 个零点；

② 若 $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$，则 $f(x)$ 有 3 个零点；

③ 若 $f(x_1)\cdot f(x_2) = 0$，则 $f(x)$ 有 2 个零点.

特别地，若三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ 存在极值点 x_0，且 $f(x_0)=0$，则 $f(x)$ 地解析式为 $f(x)=a(x-x_0)^2(x-m)$.

同理，对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a<0)$，其性质也可类比得到.

9、由于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ 的导函数 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 为二次函数，其图象变化规律具有对称性，所以三次函数图象也应当具有对称性，其图象对称中心应当为点 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$，此结论可以由对称性的定义加以证明．事实上，该图象对称中心的横坐标正是三次函数导函数的极值点．

10、对于三次函数图象的切线问题，和一般函数的研究方法相同．导数的几何意义就是求图象在该店处切线的斜率，利用导数研究函数的切线问题，要区分“在”与“过”的不同，如果是过某一点，一定要设切点坐标，然后根据具体的条件得到方程，然后解出参数即可．

11、恒成立（或存在性）问题常常运用分离参数法，转化为求具体函数的最值问题．

12、如果无法分离参数，可以考虑对参数或自变量进行分类讨论，利用函数性质求解，常见的是利用函数单调性求解函数的最大、最小值．

13、当不能用分离参数法或借助于分类讨论解决问题时，还可以考虑利用函数图象来求解，即利用数形结合思想解决恒成立（或存在性）问题，此时应先构造函数，作出符合已知条件的图形，再考虑在给定区间上函数图象之间的关系，得出答案或列出条件，求出参数的范围．

14、两类零点问题的不同处理方法

利用零点存在性定理的条件为函数图象在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$．.

①直接法：判断一个零点时，若函数为单调函数，则只需取值证明 $f(a)\cdot f(b)<0$．

②分类讨论法：判断几个零点时，需要先结合单调性，确定分类讨论的标准，再利用零点存在性定理，在每个单调区间内取值证明 $f(a)\cdot f(b)<0$．

15、利用导数研究方程根（函数零点）的技巧

（1）研究方程根的情况，可以通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等．

（2）根据题目要求，画出函数图象的走势规律，标明函数极（最）值的位置．

（3）利用数形结合的思想去分析问题，可以使问题的求解有一个清晰、直观的整体展现．

16、已知函数零点个数求参数的常用方法

（1）分离参数法：首先分离出参数，然后利用求导的方法求出构造的新函数的最值，根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围．

（2）分类讨论法：结合单调性，先确定参数分类的标准，在每个小范围内研究零点的个数是否符合题意，将满足题意的参数的各小范围并在一起，即为所求参数范围．

【核心考点】

核心考点一：函数零点问题之分段分析法模型

【典型例题】

例 1．（2023·浙江奉化·高二期末）若函数 $f(x)=\frac{x^3-2ex^2+mx-\ln x}{x}$ 至少存在一个零点，则 m 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　B．$\left[e^2+\frac{1}{e},+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,e+\frac{1}{e}\right]$　　D．$\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$

例 2．（2023·天津·耀华中学高二期中）设函数 $f(x)=x^3-2ex^2+mx-\ln x$，记 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，若函数 $g(x)$ 至少存在一个零点，则实数 m 的取值范围是

A．$\left(-\infty,e^2+\frac{1}{e}\right]$　　B．$\left(0,e^2+\frac{1}{e}\right]$

C．$\left[e^2+\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$\left(-e^2-\frac{1}{e},e^2+\frac{1}{e}\right]$

例 3．（2023·湖南·长沙一中高三月考（文））设函数 $f(x)=x^2-2x-\frac{x}{e^x}+a$（其中 e 为自然对数的底数），若函数 $f(x)$ 至少存在一个零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1+\frac{1}{e}]$　　B．$(0,e+\frac{1}{e}]$　　C．$[e+\frac{1}{e},+\infty)$　　D．$(-\infty,1+\frac{1}{e}]$

核心考点二：函数嵌套问题

【典型例题】

例 4.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=(x^2-x-1)e^x$，设关于 x 的方程 $f^2(x)-mf(x)=\frac{5}{e}(m\in R)$ 有 n 个不同的实数解，则 n 的所有可能的值为

A．3　　B．1或3　　C．4或6　　D．3或4或6

例 5.（2023·全国·高三专题练习（文））已知函数 $f(x)=e^{|x|}-\frac{1}{2}$，$g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x-1, & x\le 0\\ (x-1)\ln x, & x>0\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $g(f(x))-m=0$ 有四个不同的解，则实数 m 的取值集合为（　　）

A．$\left(0,\frac{\ln 2}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{\ln 2}{2},1\right)$　　C．$\left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$　　D．$(0,1)$

例 6.（2023·河南·高三月考（文））已知函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)-a+1=0$ 有且仅有三个不同的实数解，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(-2e,1-e)$　　B．$(1-e,0)$　　C．$(-\infty,1-e)$　　D．$(1-e,2e)$

核心考点三：函数整数解问题

【典型例题】

例 7.（2023·福建宁德·高三）当 $x>1$ 时，$(4k-1-\ln x)x<\ln x-x+3$ 恒成立，则整数 k 的最大值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．0　　D．1

例 8.（2023·江苏·苏州大学附属中学高三月考）已知 $a\in Z$，关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\le 0$ 的解集中有且仅有 3 个整数，则所有符合条件的 a 的值之和是（　　）

A．13　　B．21　　C．26　　D．30

例 9.（2023·江苏宿迁·高一月考）用符号[x]表示不超过 x 的最大整数（称为 x 的整数部分），如[－1.2]=－2，[0.2]=0，[1]=1，设函数 f（x）=（1－lnx）（lnx－ax）有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，若$[x_1]+[x_2]+[x_3]=6$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B．$\left(\frac{\ln 3}{3},\frac{1}{e}\right)$　　C．$\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right)$　　D．$\left(\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$

核心考点四：唯一零点求值问题

【典型例题】

例 10.（2023·安徽蚌埠·模拟预测（理））已知函数 $f(x)=x^2-\ln(1+x)-\ln(a-x)$ 有唯一零点，则 $a=$(　　)

A．0　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

例 11.（2023·辽宁沈阳·模拟预测）已知函数 $g(x)$，$h(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数，且 $g(x)+h(x)=e^x+x$，若函数 $f(x)=2^{|x-1|}-\lambda g(x-1)-6\lambda^2$ 有唯一零点，则正实数 λ 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．2　　D．3

例 12.（2023·新疆·莎车县第一中学高三期中）已知函数 $g(x)$，$h(x)$ 分别是定义在 R 上的偶函数和奇函数，且 $g(x)-h(x)=e^x+\sin x-x$，若函数 $f(x)=3^{-|x-2020|}-\lambda g(x-2020)-2\lambda^2$ 有唯一零点，则实数 λ 的值为

A．-1 或 $\frac{1}{2}$　　B．1 或 $-\frac{1}{2}$　　C．-1 或 2　　D．-2 或 1

核心考点五：等高线问题

【典型例题】

例 13.（2023·陕西·千阳县中学模拟预测（理））已知函数 $f(x)=\left|\log_2|x-1|\right|$，若方程 $f(x)=a\ (a>0)$ 的 4 个不同实根从小到大依次为 x_1，x_2，x_3，x_4，有以下三个结论：① $x_1+x_4=2$ 且 $x_2+x_3=2$；②当 $a=1$ 时，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$ 且 $\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$；③ $\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_1}{x_4}=0$．其中正确的结论个数为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

例 14.（2023·江苏省天一中学高三月考）已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^x$，若方程 $f(x)=a$ 有 3 个不同的实根 x_1，x_2，$x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $\frac{a}{x_2-2}$ 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\frac{1}{e},0\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{e},\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$　　C．$\left(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}},0\right)$　　D．$\left(-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}},\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$

例 15.（2023·浙江·高一单元测试）已知函数 $f(x)=\max\left\{x^2,3-2|x|\right\}$，其中 $\max\{p,q\}=\begin{cases}p,p\geq q\\q,p<q\end{cases}$，若方程 $f(x)-ax-\frac{3}{2}a=0$ 有四个不同的实根 x_1、x_2、x_3、x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$，则 $x_1x_4+x_2+x_3$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{9}{10},-\frac{3}{2}\right)$　　B．$\left(-\frac{19}{10},-\frac{3}{2}\right)$　　C．$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{10}\right)$　　D．$\left(-\frac{3}{2},\frac{19}{10}\right)$

核心考点六：分段函数零点问题

【典型例题】

例 16.（2023·山东青岛·高三期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln(1-x)|,x<1\\(x-2)^2,x\geq 1\end{cases}$，若方程 $f(x)-m=0$ 有 4 个不相同的解，则实数 m 的取值范围为（　　）

A．$(0,1]$　　B．$[0,1)$　　C．$(0,1)$　　D．$[0,1]$

例 17.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x\geq 1\\\frac{1}{4}x-1,x<1\end{cases}$，$g(x)=f(x)-kx$，若函数 $g(x)$ 有两个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　B．$\left(0,\frac{1}{e\ln 2}\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　D．$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{e\ln 2}\right)$

例 18．（2023·江苏·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，函数 $g(x)=f(x)+x-m$，若 $g(x)$ 有两个零点，则 m 的取值范围是（　　）.

A．$[-1,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1]$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$[-1,0)$

核心考点七：函数对称问题

【典型例题】

例 19．（2023·安徽省滁州中学高三月考（文））已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-x\ln x, x>0\\ -x^2-\frac{3}{2}x, x\le 0\end{cases}$ 的图象上有且仅有四个不同的点关于直线 $y=-1$ 的对称点在 $kx+y+1=0$ 的图象上,则实数 k 的取值范围是

A．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　B．$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$　　C．$\left(\frac{1}{3},1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{2},2\right)$

例 20．（2023·全国·高一课时练习）若直角坐标平面内的两点 P，Q 满足条件：①P，Q 都在函数 $f(x)$ 的图象上；②P，Q 关于原点对称，则称点对 (P,Q) 是函数 $f(x)$ 的一个"友好点对"（注：点对 (P,Q) 与 (Q,P) 看作同一个"友好点对"）．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ -x^2-4x, x\le 0\end{cases}$，则此函数的"友好点对"有（　　）

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

例 21．（2023·福建·厦门一中高一竞赛）若函数 y＝f(x)图象上存在不同的两点 A，B 关于 y 轴对称，则称点对[A，B]是函数 y＝f(x)的一对"黄金点对"（注：点对[A，B]与[B，A]可看作同一对"黄金点对"）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x+9,\ x<0\\ x^2-4x, 0\le x\le 4\\ -x^2+12x-32, x>4\end{cases}$，则此函数的"黄金点对"有（　　）

A．0 对　　B．1 对　　C．2 对　　D．3 对

核心考点八：零点嵌套问题

【典型例题】

例 22．（2023·湖北武汉·高三月考）已知函数 $f(x)=(xe^x)^2+(a-1)(xe^x)+1-a$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3.其中 $x_1<x_2<x_3$，则 $(1-x_1e^{x_1})(1-x_2e^{x_2})(1-x_3e^{x_3})^2$ 的值为（　　）

A．1　　B．$(a-1)^2$　　C．-1　　D．$1-a$

例 23．（2023·全国·模拟预测（理））已知函数 $f(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)^2+\frac{ax}{e^x}-a$ 有三个不同的零点 x_1,x_2,x_3（其中 $x_1<x_2<x_3$），则 $\left(1-\frac{x_1}{e^{x_1}}\right)^2\left(1-\frac{x_2}{e^{x_2}}\right)\left(1-\frac{x_3}{e^{x_3}}\right)$ 的值为

A．1　　B．-1　　C．a　　D．$-a$

例 24．（2023·浙江省杭州第二中学高三开学考试）已知函数 $f(x)=(ax+\ln x)(x-\ln x)-x^2$，有三个不同的

零点，（其中 $x_1<x_2<x_3$），则 $\left(1-\frac{\ln x_1}{x_1}\right)^2\left(1-\frac{\ln x_2}{x_2}\right)\left(1-\frac{\ln x_3}{x_3}\right)$ 的值为

A．$a-1$　　B．$1-a$　　C．-1　　D．1

核心考点九：函数零点问题之三变量问题

【典型例题】

例 25．（2023·全国·高三）若存在两个正实数 x、y，使得等式 $3x+a(2y-4ex)(\ln y-\ln x)=0$ 成立，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围是（　　）．

A．$(-\infty,0)$

B．$(-\infty,0)\cup[\frac{3}{2e},+\infty)$

C．$(0,\frac{3}{2e}]$

D．$[\frac{3}{2e},+\infty)$

例 26．（2023·山东枣庄·高二期末）对于任意的实数 $x\in[1,e]$，总存在三个不同的实数 y，使得 $xy\ln x-ay-\frac{e^y}{y}=0$ 成立，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty,-\frac{e^2}{4})$　　B．$(-\frac{e^2}{4},0)$　　C．$[-\frac{e^2}{4},+\infty)$　　D．$(-\frac{e^2}{4},+\infty)$

例 27．（2023·四川省新津中学高三月考（理））若存在两个正实数 x,y，使得等式 $x^3e^{\frac{y}{x}}-ay^3=0$ 成立，其中 e 为自然对数的底数，则实数 a 的取值范围为

A．$[\frac{e^2}{8},+\infty)$　　B．$(0,\frac{e^3}{27}]$　　C．$[\frac{e^3}{27},+\infty)$　　D．$(0,\frac{e^2}{8}]$

核心考点十：倍值函数

【典型例题】

例 28．（河南省郑州市第一中学 2022-2023 学年高三上学期期中考试数学（理）试题）对于函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时的值域为 $[ka,kb](k>0)$，则称 $y=f(x)$ 为 k 倍值函数.若 $f(x)=e^x+2x$ 是 k 倍值函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(e+1,+\infty)$　　B．$(e+2,+\infty)$　　C．$\left(e+\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D．$\left(e-\frac{1}{e},+\infty\right)$

例 29．（2023·四川·内江市教育科学研究所高二期末（文））对于函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[ka,kb]$，则称 $y=f(x)$ 为 k 倍值函数.若 $f(x)=e^x$ 是 k 倍值函数，则 k 的取值范围为（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B．$(1,e)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

.（ 吉林·长春十一高高二期中（理））对于函数 $f(x)$，若存在区间 $[a,b]$，当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[ka,kb]$，则称 $y=f(x)$ 为k倍值函数．若 $f(x)=x+\ln x$ 是k倍值函数，则k的取值范围为（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$　　C．$\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$　　D．$\left(\frac{1}{e}+1,+\infty\right)$

核心考点十一：函数不动点问题

【典型例题】

例 31．（2023·广东海珠·高三期末）设函数 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in R$，e为自然对数的底数），若曲线 $y=\frac{3\sqrt{10}}{10}\sin x+\frac{\sqrt{10}}{10}\cos x$ 上存在点 (x_0,y_0) 使得 $f(y_0)=y_0$，则a 的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1-e}{e},1]$　　B．$[\frac{1-e}{e},e+1]$　　C．$[1,e+1]$　　D．$[1,e]$

例 32．（2023·山西省榆社中学高三月考（理））若存在一个实数 ，使得 $F(t)=t$ 成立，则称 t 为函数 $F(x)$ 的一个不动点.设函数 $g(x)=e^x+(1-\sqrt{e})x-a$（$a\in R$，e 为自然对数的底数)，定义在 R 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=x^2$，且当 $x\le 0$ 时，$f'(x)<x$.若存在 $x_0\in\left\{x\,|\,f(x)+\frac{1}{2}\leqslant f(1-x)+x\right\}$，且 x_0 为函数 $g(x)$ 的一个不动点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{\sqrt{e}}{2}\right]$　　B．$\left(\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty\right)$　　C．$\left[\frac{\sqrt{e}}{2},\sqrt{e}\right]$　　D．$\left[\frac{\sqrt{e}}{2},+\infty\right)$

例 33．（2023·四川自贡·高二期末（文））设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x-a$（$a\in R$），若存在 $b\in[1,e]$（e为自然对数的底数)，使得 $f(f(b))=b$，则实数a 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\frac{1}{2},1-\frac{e}{2}\right]$　　B．$\left[1-\frac{e}{2},\ln 2-1\right]$

C．$\left[-\frac{1}{2},\ln 2-1\right]$　　D．$\left[-\frac{1}{2},0\right]$

核心考点十二：函数的旋转问题

【典型例题】

例 34．（2023·上海市建平中学高三期末）双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 绕坐标原点 O 旋转适当角度可以成为函数 f（x）的图象，关于此函数 f（x）有如下四个命题，其中真命题的个数为（　　）

①f（x）是奇函数；

②f（x）的图象过点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$；

③f（x）的值域是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$；