

# 组合导航系统

姿态矩阵更新





目



录

- 一 四元数法
- 二 欧拉角法
- 三 方向余弦法
- 四 捷联惯导系统总结

# 如何进行姿态矩阵更新?





# 一、四元数法(Quaternions)

➤ 什么是四元数?

——→ **四元数的定义**

➤ 和姿态矩阵有什么关系?

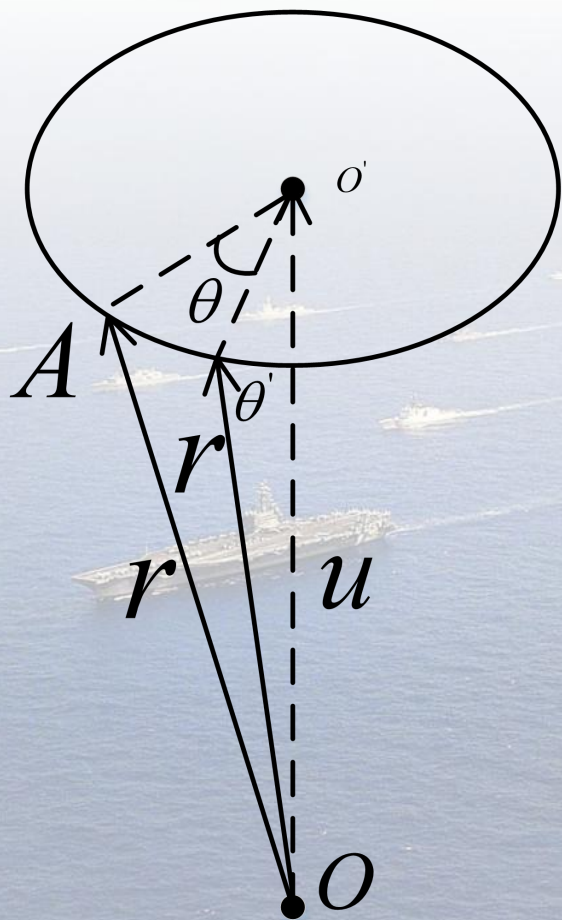
——→ **姿态矩阵用四元数表示**

➤ 怎么求四元数?

——→ **四元数微分方程**

# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 1. 四元数定义



**物理意义：** b系是由t系经过无中间过程的一次性旋转形成的，Q包含了这次旋转的全部信息。u为旋转轴， $\theta$ 为转过的角度。

广义复数表示法

$$\mathbf{Q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$$

三角表示法

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$$



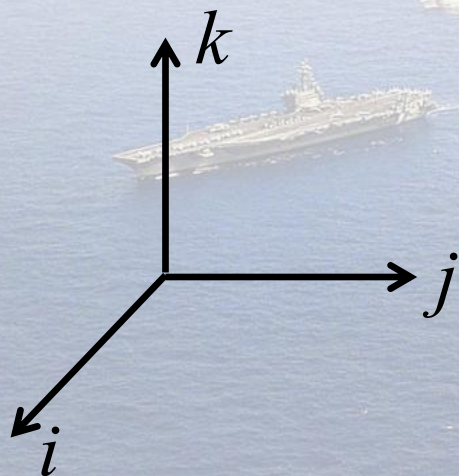
# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 2. 姿态矩阵用四元数表示

四元数的性质

① 规范四元数  $\hat{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{\sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad \hat{\mathbf{Q}}^{-1} = \hat{\mathbf{Q}}^* = \hat{q}_0 - \hat{q}_1\mathbf{i} - \hat{q}_2\mathbf{j} - \hat{q}_3\mathbf{k}$

② 四元数相乘  $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{P} = (q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \otimes (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})$   
 $= r_0 + r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$



$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 3. 姿态矩阵用四元数表示

③转动四元数： 存在一个四元数 $Q$ ，使  $\mathbf{R}' = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q}^{-1}$

其中 $R$ 绕 $u$ 轴转过 $\theta$ 到 $R'$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1}$$

$$(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \otimes (R_xi + R_yj + R_zk) \\ \otimes (q_0 - q_1i - q_2j - q_3k)$$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{R}^b$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$



# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 3. 姿态矩阵用四元数表示

③转动四元数： 存在一个四元数 $Q$ ，使  $\mathbf{R}' = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R} \otimes \mathbf{Q}^{-1}$

其中 $R$ 绕 $u$ 轴转过 $\theta$ 到 $R'$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{R}^b \otimes \mathbf{Q}^{-1}$$

$$(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) \otimes (R_xi + R_yj + R_zk) \\ \otimes (q_0 - q_1i - q_2j - q_3k)$$

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{R}^b$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$



# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 4. 四元数微分方程

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}(t) \otimes \Delta \mathbf{Q}(t)$$

$$\Delta \mathbf{Q}(t) = \cos \frac{\Delta \theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\Delta \theta}{2} \approx 1 + \mathbf{u} \frac{\Delta \theta}{2} = 1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \Delta t$$

$$\mathbf{Q}(t + \Delta t) = \mathbf{Q}(t) \otimes \left( 1 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \Delta t \right) = \mathbf{Q}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \Delta t$$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Q}(t + \Delta t) - \mathbf{Q}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(t) \otimes \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbx}^b & -\omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b \\ \omega_{nbx}^b & 0 & \omega_{nbz}^b & -\omega_{nby}^b \\ \omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b & 0 & \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b & -\omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 4. 四元数微分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{nb}^b &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{\omega}_{in}^b \\ &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\mathbf{C}_b^n)^{-1} \boldsymbol{\omega}_{in}^n\end{aligned}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\mathbf{C}_b^n)^{-1} (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)$$

陀螺仪测量

迭代过程中  
上一步已知值

地球自转角速度

$$\mathbf{f}^b \rightarrow \mathbf{f}^n \rightarrow \mathbf{V}_{en}^n \rightarrow \boldsymbol{\omega}_{en}^n$$



# 一、四元数法(Quaternions)

## ➤ 4. 四元数微分方程

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \left(\mathbf{C}_b^n\right)^{-1} \left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{nbx}^b & -\omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b \\ \omega_{nbx}^b & 0 & \omega_{nbz}^b & -\omega_{nby}^b \\ \omega_{nby}^b & -\omega_{nbz}^b & 0 & \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nbz}^b & \omega_{nby}^b & -\omega_{nbx}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

目



录

- 一 四元数法
- 二 欧拉角法
- 三 方向余弦法
- 四 捷联惯导系统总结



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/898101063025006053>