2019 年 高考真题 数列与不等式

1.已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前4项和为15，且$a_5=3a_3+4a_1$，则$a_3=$（　　）

A. 16

B. 8

C. 4

D. 2

2.不等式$|x+1|<5$的解集为________．

3. 已知数列$\{a_n\}$，从中选取第i_1项、第i_2项、$\cdots$、第i_m项$(i_1<i_2<\cdots<i_m)$，若$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_m}$，则称新数列$a_{i_1}$，$a_{i_2}$，$\cdots$，$a_{i_m}$为$\{a_n\}$的长度为$m$的递增子列．规定：数列$\{a_n\}$的任意一项都是$\{a_n\}$的长度为$1$的递增子列．

（1）写出数列1，8，3，7，5，6，9的一个长度为4的递增子列．

（2）已知数列$\{a_n\}$的长度为p的递增子列的末项的最小值为a_{m_0}，长度为q的递增子列的末项的最小值为a_{n_0}．若$p<q$，求证：$a_{m_0}<a_{n_0}$．

（3）设无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若$\{a_n\}$的长度为s的递增子列末项的最小值为$2s-1$，且长度为s末项为$2s-1$的递增子列恰有2^{s-1}个$(s=1，2，\cdots)$，求数列$\{a_n\}$的通项公式．

4.设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_2=-3$，$S_5=-10$，则$a_5=$________，S_n的最小值为________．

5. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=4$，$a_4=S_3$．数列$\{b_n\}$满足：对每个$n\in\mathbf{N}^*$，S_n+b_n，$S_{n+1}+b_n$，$S_{n+2}+b_n$成等比数列．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

6.设a，$b\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=a_n^2+b$，$n\in\mathbf{N}^*$，则（　　）

A. 当$b=\dfrac{1}{2}$时，$a_{10}>10$

B. 当$b=\dfrac{1}{4}$时，$a_{10}>10$

C. 当$b=-2$时，$a_{10}>10$

D. 当$b=-4$时，$a_{10}>10$

7.若实数x，y满足约束条件$\begin{cases} x-3y+4\geqslant 0 \\ 3x-y-4\leqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \end{cases}$，则$z=3x+2y$的最大值是(　　)

A. -1

B. 1

C. 10

D. 12

8.已知$a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则a，b，c的大小关系为(　　)

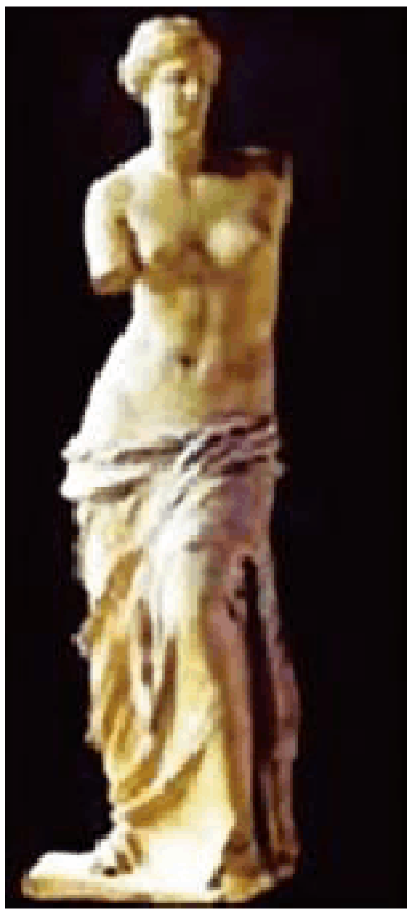
A. $a<c<b$

B. $a<b<c$

C. $b<c<a$

D. $c<a<b$

9.古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例)，著名的“断臂维纳斯”便是如此．此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为105cm，头顶至脖子下端的长度为26cm，则其身高可能是(　　)



A. 165cm

B. 175cm

C. 185cm

D. 190cm

10.已知数列$\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$是等差数列，S_n是其前n项和．若$a_2a_5+a_8=0$，$S_9=27$，则S_8的值是________．

11.若$a>b$，则(　　)

A. $\ln(a-b)>0$

B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$

D. $|a|>|b|$

12.设$x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，则$\dfrac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为________．

13.若x，y满足$|x|\leqslant 1-y$，且$y\geqslant -1$，则$3x+y$的最大值为(　　)

A. -7

B. 1

C. 5

D. 7

14.记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．已知$S_4=0$，$a_5=5$，则(　　)

A. $a_n=2n-5$

B. $a_n=3n-10$

C. $S_n=2n^2-8n$

D. $S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$

15. 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$．

（1）证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列．

（2）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

16.已知$a=\log_2 0.2$，$b=2^{0.2}$，$c=0.2^{0.3}$，则(　　)

A. $a<b<c$

B. $a<c<b$

C. $c<a<b$

D. $b<c<a$

17. 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列．已知$a_1=4$，$b_1=6$，$b_2=2a_2-2$，$b_3=2a_3+4$．

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

（2）设数列$\{c_n\}$满足$c_1=1$，$c_n=\begin{cases}1,2^k<n<2^{k+1}\\ b_k,n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$.

(i)求数列$\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$的通项公式；

(ii)求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

18.已知$a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则a，b，c的大小关系为(　　)

A. $a<c<b$

B. $a<b<c$

C. $b<c<a$

D. $c<a<b$

19.设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ x\geqslant -1\\ y\geqslant -1\end{cases}$，则目标函数$z=-4x+y$的最大值为(　　)

A. 2

B. 3

C. 5

D. 6

20. 定义首项为1且公比为正数的等比数列为“$M-$数列”.

（1）已知等比数列$\{a_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$满足：$a_2a_4=a_5$，$a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列$\{a_n\}$为“$M-$数列”.

（2）已知数列$\{b_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$满足：$b_1=1$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2}{b_n}-\dfrac{2}{b_{n+1}}$，其中$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在“$M-$数列”$\{c_n\}\,(n\in\mathbf{N}^*)$，对任意正整数$k$，当$k\leqslant m$时，都有$c_k\leqslant b_k\leqslant c_{k+1}$成立，求$m$的最大值.

21. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\in(0,\pi]$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\sin(a_n)$，集合$S=\{x\,|x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$.

（1）若$a_1=\dfrac{\pi}{2}$，求d使得集合S恰有两个元素.

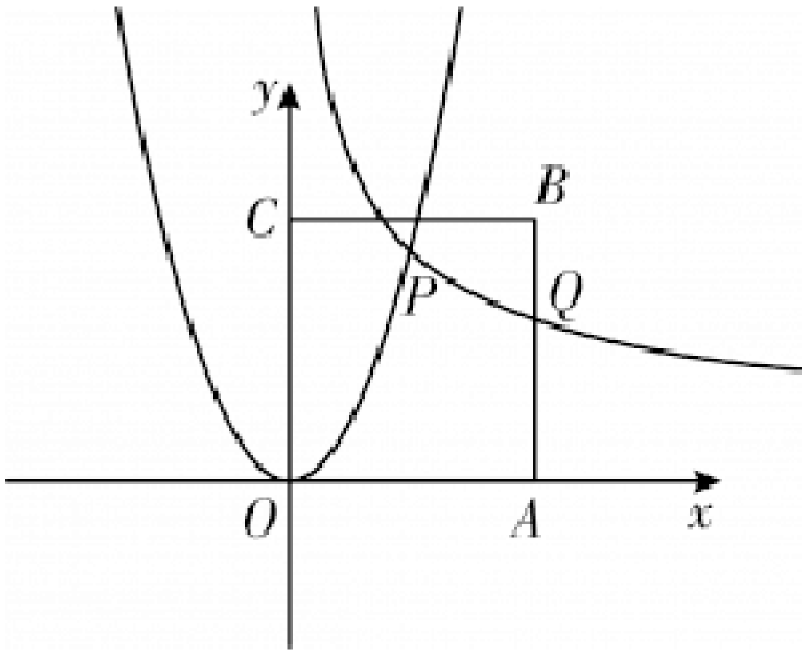
（2）若集合S恰有三个元素，$b_{n+T}=b_n$，T是不超过7的正整数，求T的所有可能的值.

22. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，前n项和为S_n.

（1）若$\{a_n\}$为等差数列，且$a_4=15$，求S_n.

（2）若$\{a_n\}$为等比数列，且$\lim\limits_{n\to\infty} S_n<12$，求公比$q$的取值范围.

23.如图，已知正方形$OABC$，其中$OA=a\,(a>1)$，函数$y=3x^2$交BC于点P，函数$y=x^{-\frac{1}{2}}$交AB于点Q，当$|AQ|+|CP|$最小时，则a的值为________．



24.记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_1\neq 0$，$a_2=3a_1$，则$\dfrac{S_{10}}{S_5}=$________．

25.记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_4^2=a_6$，则$S_5=$________．

参考答案

1.【答案】C

【解析】解：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q\,(q>0)$，

则由前4项和为15，且$a_5=3a_3+4a_1$，

得$\begin{cases} a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=15 \\ a_1q^4=3a_1q^2+4a_1 \end{cases}$，$\therefore\begin{cases} a_1=1 \\ q=2 \end{cases}$，

$\therefore a_3=2^2=4$，

故选：C．

【知识点】【题型】等比数列的基本量问题

【来源】2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标III）； 2019 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标III）

2.【答案】$(-6,4)$

【解析】解：由$|x+1|<5$得$-5<x+1<5$，即$-6<x<4$，

故答案为：$(-6,4)$．

【知识点】解绝对值不等式

【来源】2019 上海春季高考

3.（1）【答案】1，3，5，6(答案不唯一)

【解析】解：由递增子列的定义可以写出满足题意的递增子列有：1，3，5，6或1，3，5，9或1，3，6，9或3，5，6，9或1，5，6，9．(答案不唯一)

【知识点】【题型】数列的综合问题

【来源】2019 年北京市高考数学试卷（理科）

3.（2）【答案】见解析

【解析】证明：长度为q的递增子列的前p项可以组成长度为p的一个递增子列，

$\therefore a_{n_0}>$该数列的第p项$\geqslant a_{m_0}$，

$\therefore a_{m_0}<a_{n_0}$．

【知识点】【题型】数列与不等式的综合问题

【来源】2019 年北京市高考数学试卷（理科）

3.（3）【答案】$a_{2n}=2n-1$，$a_{2n-1}=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$

【解析】解：考虑$2s-1$与$2s$这一组数在数列中的位置．

若$\{a_n\}$中有$2s$，且$2s$在$2s-1$之后，则必然是长度为$s+1$，且末项为$2s$的递增子列，

这与长度为s的递增子列末项的最小值为$2s-1$矛盾，$\therefore 2s$必在$2s-1$之前．

继续考虑末项为$2s+1$的长度为$s+1$的递增子列．

$\because$对于数列$2n-1$，$2n$，由于$2n$在$2n-1$之前，$\therefore$研究递增子列时，不可同时取$2n$与$2n-1$，

$\because$对于1至$2s$的所有整数，研究长度为$s+1$的递增子列时，第1项是1与2二选1，第2项是3与4二选1，$\cdots$，第s项是$2s-1$与$2s$二选1，

故递增子列最多有2^s个．由题意，这s组数列对全部存在于原数列中，并且全在$2s+1$之前．

$\therefore 2$，1，4，3，6，5，$\cdots$，是唯一构造．

即$a_{2n}=2n-1$，$a_{2n-1}=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

【知识点】【题型】数列的综合问题

【来源】2019 年北京市高考数学试卷（理科）

4.【答案】0 -10

【解析】解：设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_2=-3$，$S_5=-10$，

$$\therefore \begin{cases} a_1+d=-3 \\ 5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d=-10 \end{cases},$$

解得$a_1=-4$，$d=1$，

$\therefore a_5=a_1+4d=-4+4\times 1=0$，

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-4n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{8},$$

$\therefore n=4$或$n=5$时，S_n取得最小值为$S_4=S_5=-10$．

故答案为：0，-10．

【知识点】【题型】等差数列的综合问题、【题型】等差数列的基本量问题

【来源】2019 年北京市高考数学试卷（理科）

5.（1）【答案】$a_n=2n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$；

$b_n=n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$

【解析】解：设数列$\{a_n\}$的公差为d，

由题意得$\begin{cases} a_1+2d=4 \\ a_1+3d=3a_1+3d \end{cases}$，

解得$a_1=0$，$d=2$，

$\therefore a_n=2n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore S_n=n^2-n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

$\because$数列$\{b_n\}$满足：对每个$n\in\mathbf{N}^*$，S_n+b_n，$S_{n+1}+b_n$，$S_{n+2}+b_n$成等比数列，

$\therefore (S_{n+1}+b_n)^2=(S_n+b_n)(S_{n+2}+b_n)$，

解得$b_n=\dfrac{1}{d}\left(S_{n+1}^2-S_nS_{n+2}\right)$，

即$b_n=n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$．

【知识点】【题型】等差与等比数列综合

【来源】2019 年浙江省高考数学试卷

5.（2）【答案】见解析

【解析】证明：$c_n=\sqrt{\dfrac{a_n}{2b_n}}=\sqrt{\dfrac{2n-2}{2n(n+1)}}=\sqrt{\dfrac{n-1}{n(n+1)}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

用数学归纳法证明：

①当 $n=1$ 时，$c_1=0<2$，不等式成立；

②假设当 $n=k$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 时不等式成立，即 $c_1+c_2+\cdots+c_k<2\sqrt{k}$，

则当 $n=k+1$ 时，

$c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}$

$<2\sqrt{k}+\sqrt{\dfrac{k}{(k+1)(k+2)}}<2\sqrt{k}+\sqrt{\dfrac{1}{k+1}}$

$<2\sqrt{k}+\dfrac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=2\sqrt{k}+2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

$=2\sqrt{k+1}$，

即当 $n=k+1$ 时，不等式也成立，即 $c_1+c_2+\cdots+c_k+c_{k+1}<2\sqrt{k+1}$.

由①②得 $c_1+c_2+\cdots+c_n<2\sqrt{n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

【知识点】【题型】数学归纳法的应用、【题型】数列与不等式的综合问题

【来源】2019 年浙江省高考数学试卷

6.【答案】A

【解析】解：对于 B，令 $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}$，

取 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_2=\dfrac{1}{2}$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{1}{2}<10$，

$\therefore$ 当 $b=\dfrac{1}{4}$ 时，$a_{10}<10$，故 B 错误；

对于 C，令 $x^2-x-2=0$，得 $x=2$ 或 $x=-1$，

取 $a_1=2$，$\therefore a_2=2$，$\cdots$，$a_n=2<10$，

$\therefore$ 当 $b=-2$ 时，$a_{10}<10$，故 C 错误；

对于 D，令 $x^2-x-4=0$，得 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$，

取 $a_1=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$，$\therefore a_2=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$，$\cdots$，$a_n=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}<10$，

$\therefore$当$b=-4$时，$a_{10}<10$，故D错误；

对于A，$a_2=a^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}$，$a_3=\left(a^2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{3}{4}$，

$a_4=\left(a^4+a^2+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{16}>1$，

$a_{n+1}-a_n>0$，$\{a_n\}$为递增数列，

当$n\geqslant 4$时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{\frac{1}{2}}{a_n}>1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore\begin{cases}\dfrac{a_5}{a_4}>\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{a_6}{a_5}>\dfrac{3}{2}\\ \cdots\\ \dfrac{a_{10}}{a_9}>\dfrac{3}{2}\end{cases}$，$\therefore\dfrac{a_{10}}{a_4}>\left(\dfrac{3}{2}\right)^6$，$\therefore a_{10}>\dfrac{729}{64}>10$．故A正确.

故选：A.

【知识点】【题型】数列的综合问题、数列的单调性

【来源】2019 年浙江省高考数学试卷； 2018-2019 学年江西省宜春市高安中学高一（下）期末数学试卷（理科）（a 卷）； 2019 浙江省

7.【答案】C

【解析】解：由实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y+4\geqslant 0\\ 3x-y-4\leqslant 0\\ x+y\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，

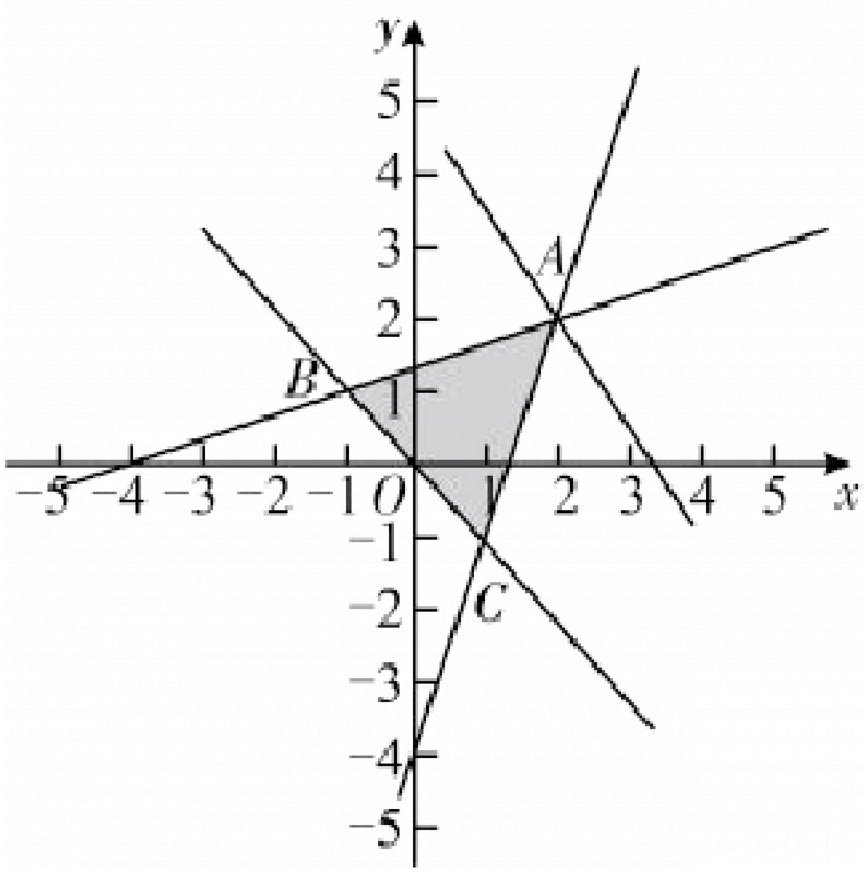
联立$\begin{cases}x-3y+4=0\\ 3x-y-4=0\end{cases}$，解得$A(2,2)$，

化目标函数$z=3x+2y$为$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}z$，

由图可知，当直线$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}z$过$A(2,2)$时，直线在$y$轴上的截距最大，

z有最大值：10．

故选：C.



【知识点】简单线性规划

【来源】2019 年浙江省高考数学试卷

【答案】A

【解析】解：由题意，可知：

$a=\log_5 2<1$，

$b=\log_{0.5} 0.2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}=\log_{2^{-1}}5^{-1}=\log_2 5>\log_2 4=2$.

$c=0.5^{0.2}<1$，

$\therefore b$ 最大，a 、c 都小于 1.

$\because a=\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}$，$c=0.5^{0.2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

而 $\log_2 5>\log_2 4=2>\sqrt[5]{2}$，

$\therefore \dfrac{1}{\log_2 5}<\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

$\therefore a<c$，

$\therefore a<c<b$.

故选：A.

【知识点】比较大小之中间数法

【来源】2019 天津市高考真题天津卷 6

9.【答案】B

【解析】解：头顶至脖子下端的长度为 $26\mathrm{cm}$，

说明头顶到咽喉的长度小于 $26\mathrm{cm}$，

由头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，

可得咽喉至肚脐的长度小于 $\dfrac{26}{0.618}\approx 42\text{cm}$，

由头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，

可得肚脐至足底的长度小于 $\dfrac{42+26}{0.618}\approx 110\text{cm}$，

即有该人的身高小于 $110+68=178\text{cm}$，

由肚脐至足底的长度大于 105cm，

可得头顶至肚脐的长度大于 $105\times 0.618\approx 65\text{cm}$，

即该人的身高大于 $65+105=170\text{cm}$，

故选：B．

【知识点】不等式的性质

【来源】2019 年全国统一高考数学试卷（文科）（新课标Ⅰ）； 2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅰ）； 2018-2019 学年浙江省镇海中学、杭州二中、嘉兴一中、诸暨中学、效实中学五校高二下 6 月月考数学卷； 2019 高考真题新课标 I4

【答案】16

【解析】解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

则 $\begin{cases}(a_1+d)(a_1+4d)+a_1+7d=0\\ 9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}d=27\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=-5\\ d=2\end{cases}$．

$\therefore S_8=8a_1+\dfrac{8\times 7}{2}d=8\times(-5)+28\times 2=16$．

故答案为：16．

【知识点】【题型】等差数列的基本量问题、等差数列的求和公式

【来源】2019 年江苏省高考数学试卷； 2019 江苏省

11.【答案】C

【解析】解：取 $a=0$，$b=-1$，则

$\ln(a-b)=\ln 1=0$，排除 A;

$3^a=3^0=1>3^b=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$，排除 B;

$a^3=0^3>(-1)^3=-1=b^3$，故 C 对;

$|a|=0<|-1|=1=b$，排除 D.

故选：C．

【知识点】不等式的性质

【来源】2019 年全国统一高考数学试卷（理科）（新课标Ⅱ）