第四章　　数　　列

*4.2　等差数列的概念

（第1课时）

数学

必修第一册

舒城一中

2025/1/14

复习回顾

1. 数列的定义：

按确定的顺序排列的一列数叫做数列. 数列中的每一个数都叫做数列的项.

2. 数列的通项公式：

如果数列的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子就叫做这个数列的通项公式 。

3. 数列的递推公式：

如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的递推公式.

4. 数列的前n项和公式是什么？

如果数列$\{a_n\}$的前n项和与它的序号n之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫做这个数列的前n项和公式。

a_n与s_n的关系$a_n = \begin{cases} S_1, n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$

导入新课

数列是特殊的函数

对函数的研究	对数列的研究
函数的概念	数列的概念
↓	↓
函数的性质	数列的性质
↓	↓
基本初等函数	特殊的数列
↓	↓
函数的应用	数列的应用

特殊的数列：等差数列、等比数列

- 定义
- 性质
- 通项公式
- 前n项和

新知探究

实例1 北京天坛圜丘坛的地面是由石板铺成，最中间是圆形的天心石，围绕天心石的是9圈扇环形的石板，从内到外的石板数依次为：

9，18，27，36，45，54，63，72，81　　①

实例2 *XXS*，*XS*，*S*，*M*，*L*，*XL*，*XXL*，*XXXL*型号的女装上对应的意大利尺码分别是：

34，36，38，40，42，44，46，48　　②

实例3 测量某地垂直地面方向上海拔500m以下的大气温度，得到从距离地面20m起每升高100m处的大气温度（单位：℃）依次为：　25，24.4，23.8，23.2，22.6

③

新知探究

实例4 某人想银行贷款a万元，贷款时间为n年。如果个人贷款月利率为r，那么按照等额本金方式还款，他从某月开始，每月应还本金$b(=\frac{a}{12n})$万元，每月支付给银行的利息依次为：

$$ar, ar-br, ar-2br, ar-3br\ldots \quad ④$$

问题1:通过这四个实例，你发现了什么规律？

（1） 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

（2） 38, 40, 42, 44, 46, 48.

（3） 25, 24. 4, 23. 2, 22. 6, 21.

（4） $ar, ar-br, ar-2br, ar-3br, \ldots$

新知探究

实例1：9，18，27，36，45，54，63，72，81　　①

我们发现

18=9+9，27=18+9. . . . 81=72+9，

换一种写法，就是

18−9=9，27−18=9. . . . 81−72=9.

如果用$\{a_n\}$表示数列　①，

那么有$a_2-a_1=9$，$a_3-a_2=9$，…，$a_9-a_8=9$.

实例2，实例3，实例4
都有同样的数字规律

这表明，数列 ① 有这样的取值规律：

从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数

概念生成

问题2：你能根据实例，结合数列的定义给出等差数列的定义吗？

一般地，如果一个数列**从第2项起**，每一项与它的前一项的差等于**同一个常数**，那么这个数列就叫做**等差数列**.

等差的由来

作差的顺序

这个常数叫做等差数列的**公差**，通常用字母 d 表示.

等差数列的符号语言：

①$a_n - a_{n-1} = d$ (d是常数, $n \geq 2$且$n \in N^*$)

②$a_{n+1} - a_n = d$ (d是常数, $n \in N^*$)

注意：

1、判断数列是不是等差数列，主要是由定义进行判断。

2. 公差d可以是正数，负数，也可以为0, 与n无关。

概念辨析

思考1： 你能判断下列数列是否为等差数列吗？

(1) 5，9，13，17，21； 是，$d=4$；

(2) 9，7，5，3，1，-1； 是，$d=-2$；

(3) 6，6，6，6，6，6； 是，$d=0$；

（4）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_n=1(n>1)$，则数列$\{a_n\}$是等差数列. 不一定

（5）若$a_2-a_1=a_3-a_2$，则数列$\{a_n\}$是等差数列。 不一定

解： (4)$\{a_n\}$不一定是等差数列，忽略了第1项.

思考2： 一个等差数列至少要有几项？

一个数列要成为等差数列，至少要有三项

新知探究

追问2： 如果在a与b中间插入一个数A，使a，A，b成等差数列，那么A应满足什么条件？

（1）2，（ 3 ），4

（2）-6，（ ），0

（3）a，（$\frac{a+b}{2}$），b

等差中项

由三个数a，A，b组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列，这时A叫做a与b的等差中项。

由等差数列的定义，可知：$A=\frac{a+b}{2}$或：$2A=a+b$

$2A=a+b \Leftrightarrow a,A,b$为等差数列

巩固练习

课本P15

1. 判断下列数列是否是等差数列. 如果是，写出它的公差.

(1) $95,82,69,56,43,30$; 是, 公差为$d=-13$;

(2) $1,1.1,1.11,1.111,1.1111,1.11111$; 不是

(3) $1,-2,3,-4,5,-6$; 不是

(4) $1,\frac{11}{12},\frac{5}{6},\frac{3}{4},\frac{2}{3},\frac{7}{12},\frac{1}{2}$. 是, 公差为$d=-\frac{1}{12}$.

2. 求下列各组数的等差中项:

(1) 647和895; (2) $-12\frac{1}{3}$和$24\frac{3}{5}$. 解: (1)771; (2)$6\frac{2}{5}$.

公差可正、可负可为0

新知探究

问题3 若已知等差数列$\{a_n\}$的首项a_1和公差d，你能否根据等差数列的定义推导出等差数列的通项公式？

方法1： 由等差数列的定义可得$a_{n+1}-a_n=d$

等差数列的递推公式

逐步迭代法

$a_2=a_1+d$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$

$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$

不完全归纳法

…

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d \quad (n\geq 2)$

又∵当$n=1$时，上式也成立

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d$

这就是等差数列的通项公式！

新知探究

问题4：还有什么方法推导等差数列的通项公式呢？

由于我们要求a_n，所以我们由递推公式从a_n开始写起。

从减项或被减项的下标发现规律是找项数的常用方法。

$$a_n-\cancel{a_{n-1}}=d,$$
$$\cancel{a_{n-1}}-\cancel{a_{n-2}}=d,$$
$$\cancel{a_{n-2}}-\cancel{a_{n-3}}=d,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=d,$$
$$\cancel{a_2}-a_1=d.$$

一共有 **$n-1$**个等式，将它们进行累加，有

$$a_n-a_1=(n-1)d,$$

即$a_n=a_1+(n-1)d.\ (n\in \mathbf{N}^*)$

累加法

消消乐

新知探究

等差数列的通项公式

首项为a_1，公差为d的等差数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = nd + (a_1 - d)$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

a_1, a_n, n, d 知三求一

思考：

$a_m = ?$	$a_m = a_1 + (m-1)d$
$a_n - a_m = ?$	$a_n - a_m = (n-m)d$

等差数列的通项公式的一般形式：$a_n = a_m + (n-m)d$

新知探究

等差数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n = a_1 + (n-1)d$.

追问1 我们要求a_n，需要几个条件？

只要求出等差数列的首项a_1和公差d代入公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$即可。

追问2 我们如果只知道$a_m(m < n)$和公差d两个条件个条件？如何求a_n

法一：通过$a_m(m < n)$和公差d先求首项a_1再代入公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$

法二：$a_n = a_m + (n-m)d$

熟悉公式

思考：你能写出这些等差数列的通项公式吗？

(1) 5，9，13，17，21；

$a_n=5+(n-1)\times 4=4n+1$；

(2) 9，7，5，3，1，-1；

$a_n=9+(n-1)\times(-2)=-2n+11$；

(3) 6，6，6，6，6.

$a_n=6+(n-1)\times 0=6$.

典例分析

例1、（1）已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=5-2n$，求$\{a_n\}$公差和首项；

（2）求等差数列8，5，2….的第20项.

解: (1) 当$n\geq 2$时，由$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=5-2n$，可得

$a_{n-1}=5-2(n-1)=7-2n$.

$\therefore\ d=a_n-a_{n-1}=5-2n-(7-2n)=-2$,

$\therefore a_1=5-2=3$.

$\therefore\{a_n\}$公差为-2，首项为3.

(2) 由题意，得 $d=5-8=-3$，$a_1=8$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=8-3(n-1)=-3n+11$

$\therefore a_{20}=-3\times 20+11=-49$

典例分析

例2、 -401 是不是等差数列 $-5, -9, -13, \cdots$的项？如果是，是第几项？

解： 由$a_1=-5$，$d=-9+(-5)=-4$

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为：

$$a_n=a_1+(n-1)d=-5-4(n-1)=-4n-1$$

设 $-4n-1=-401$，解得 $n=100$

$\therefore -401$是这个数列第100项

追问： -350是不是该数列中的项？

根据已知条件，列出关于通项公式中未知变量的**方程**或**方程组**，求得未知变量，是解决等差数列相关问题的常用方法。

新知探究

问题5:我们知道数列是**特殊的函数**, 等差数列是特殊的数列。观察等差数列通项公式, 你认为它与我们学过的**哪个函数模型**有关?

$\because a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$

$\therefore$ 当 $d=0$ 时，$a_n = a_1$ 是常值函数;

当 $d \neq 0$ 时，a_n 是一次函数 $f(x) = dx + (a_1 - d)\ (x \in R)$

$\therefore$ 当 $x = n$，$(n \in N^*)$ 时的函数值，即 $a_n = f(n)$.

新知探究

追问1： 由一次函数 $f(x)=kx+b$（k，b 为常数）得到的数列 $a_n=kn+b$ 一定是等差数列吗？

数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列

$\Leftrightarrow$ 数列的通项公式a_n是关于n的一次函数.

即数列$\{a_n\}$为公差不为0的等差数列的充要条件是**数列$\{a_n\}$的通项公式a_n是关于n的一次函数。**

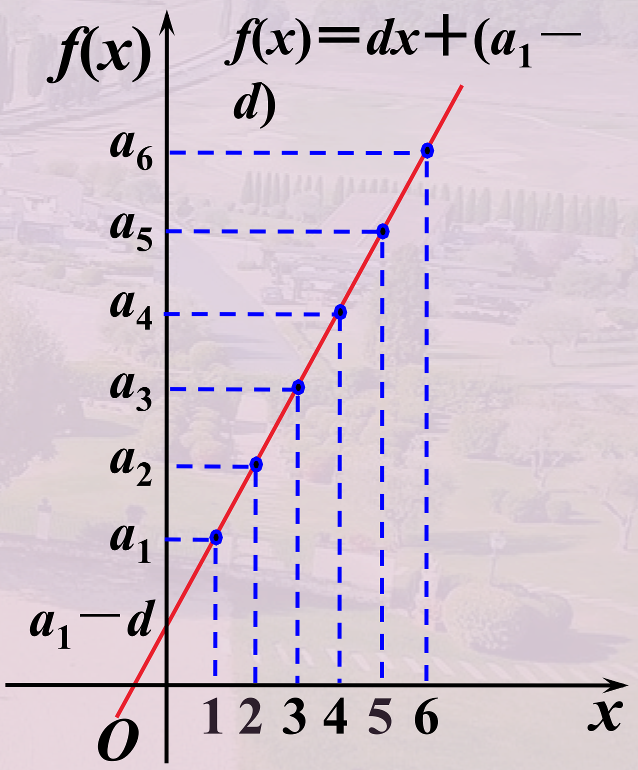
新知探究

追问2 等差数列$\{a_n\}$的图象与一次函数$f(x)=dx+(a_1-d)$的图象有什么关系？

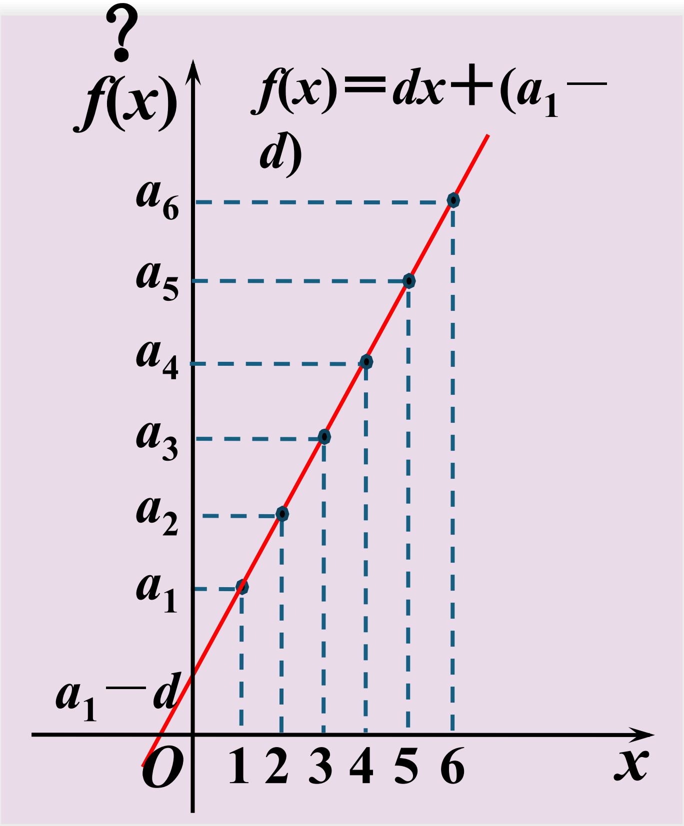
① 由上节知，等差数列的图像仍是一些孤立的点构成；它所对应的一次函数的图像是过这些点的直线。直线的斜率为公差d，截距为a_1-d，这些点均匀地分布在这条直线上。

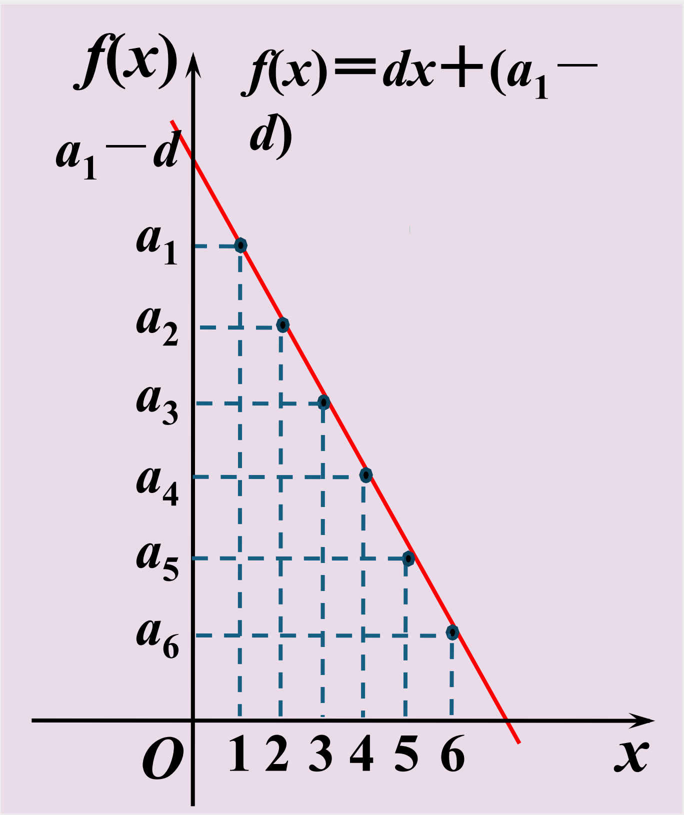
② 任给一次函数$f(x)=kx+b$(k，b为常数)，则$f(1)=k+b$，$f(2)=2k+b$, ..., $f(n)=nk+b$，构成一个等差数列$\{nk+b\}$, 其首项为$(k+b)$，公差为k。

③ 等差数列$\{a_n\}$的单调性与公差d有关。



问题6：可以从函数的角度，研究等差数列的单调性吗？





结论：等差数列$\{a_n\}$的单调性与公差d有关.

①当$d>0$时，
等差数列$\{a_n\}$ 单调递增；

②当$d<0$时，
等差数列$\{a_n\}$单调递减；

③当$d=0$时，
等差数列$\{a_n\}$为常数列.