重庆市乌江新高考协作体2023-2024学年高二下学期第二阶段性学业质量联合调研抽测（5月）数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．设α，β为两个不同的平面，m，n为两条相交的直线，已知$m//\alpha$，$n//\alpha$，则“$m//\beta$，$n//\beta$”是“$\alpha//\beta$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2．复数$Z=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2024\mathrm{i}^{2024}$的虚部是（　）

A．1012　　B．1011　　C．-1011　　D．-1012

3．函数$f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$在$x=1$处有极小值-3，则$b-a$的值等于（　）

A．0　　B．-2　　C．-4　　D．6

4．样本数据2，1，4，5，6，6，15，8的中位数和众数分别是（　）

A．5，6　　B．5.5，6　　C．6，6　　D．5.5，5

5．向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{6}$，$|\vec{b}|=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，且$\forall t\in\mathrm{R}$，不等式$|\vec{b}+t\vec{a}|\geq|\vec{b}-\vec{a}|$恒成立.函数$f(x)=|x\vec{b}-\vec{a}|+\left|x\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|(x\in\mathbf{R})$的最小值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{5}$

6．已知α，β均为锐角，$\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$，则$\tan\alpha$取得最大值时，$\tan(\alpha+\beta)$的值为（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．1

7．已知二次函数$y=x^2+(2m-3)x-4-11m$与x轴交于A，B两点，点$C(1,3)$，圆G过A，B，C三点，存在一条定直线l被圆G截得的弦长为定值，则该定值为（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{13}$　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{13}$

8．设F_1，F_2分别为双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，过$F_2$且斜率为$-\frac{\sqrt{7}}{3}$的直线$l$与$C$右支交于点$A$，与$C$左支交于点$B$，点$D$满足$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{F_1D}=0$，则$C$

的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

二、多选题

9．已知一组数据x_1，x_2，…，x_{11}是公差不为0的等差数列，若去掉数据x_6，则（　）

A．中位数不变　B．平均数不变　C．方差变大　D．方差变小

10．在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知E、F分别为线段B_1C，D_1C_1的中点，点P满足$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}+\mu\overrightarrow{DB}$，$\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，则（　）

A．当$\lambda+\mu=1$时，三棱锥$D-PEF$的体积为定值

B．当$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，四棱锥$P-ABCD$的外接球的表面积是$\frac{9\pi}{4}$

C．$\triangle PEF$周长的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}$

D．若$AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则点P的轨迹长为$\frac{\pi}{2}$

11．下列等式中， 正确的是（　）

A．$(n+1)C_n^m=(m+1)C_{n+1}^{m+1}$　　B．$A_n^m+mA_n^{m-1}=A_{n+1}^m$

C．$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{2023}^2=C_{2024}^{2022}$　　D．$C_{2n}^n=\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\left(C_n^2\right)^2+\cdots+\left(C_n^n\right)^2$

三、填空题

12．函数$s=\sqrt{x^4-5x^2-8x+25}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$的最大值为_________.

13．设钝角$\triangle ABC$三个内角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，若$a=2$，$b\sin A=\sqrt{3}$，$c=3$，则$b=$_______.

14．祖暅原理也称祖氏原理，是我国数学家祖暅提出的一个求体积的著名命题：“幂势既同，则积不容异”，“幂”是截面积，“势”是几何体的高，意思是两个同高的立体，如在等高处截面积相等，则体积相等.由曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$y=\pm4$围成的图形绕$y$轴旋转一周所得旋转体的体积为$V$，则$V=$________.

四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，已知a，b，c分别为角A，B，C的对边．若向量$\vec{m}=\left(a,\cos A\right)$，向量$\vec{n}=\left(\cos C,c\right)$，且$\vec{m}\cdot\vec{n}=3b\cos B$．

(1)求$\cos B$的值；

(2)若$2a$，b，c成等比数列，求$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan C}$的值．

16．在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别是a,b,c，且$b\sin\left(B+C\right)=a\sin\frac{A+C}{2}$．

(1)求B的大小；

(2)若D是AC边的中点，且$BD=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

17．设函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+a\sin x$，$x\in\left[0,+\infty\right)$.

(1)当$a=-1$时，$f\left(x\right)\geq bx+1$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，求实数b的取值范围；

(2)若$a>0,f\left(x\right)$在$\left[0,+\infty\right)$上存在零点，求实数a的取值范围.

18．为应对新一代小型无人机武器，某研发部门开发了甲、乙两种不同的防御武器，现对两种武器的防御效果进行测试.每次测试都是由一种武器向目标无人机发动三次攻击，每次攻击击中目标与否相互独立，每次测试都会使用性能一样的全新无人机.对于甲种武器，每次攻击击中目标无人机的概率均为$p(0<p<1)$，且击中一次目标无人机坠毁的概率为0.6，击中两次目标无人机必坠毁；对于乙种武器，每次攻击击中目标无人机的概率均为$q(0<q<1)$，且击中一次目标无人机坠毁的概率为0.4，击中两次目标无人机坠毁的概率为0.8，击中三次目标无人机必坠毁.

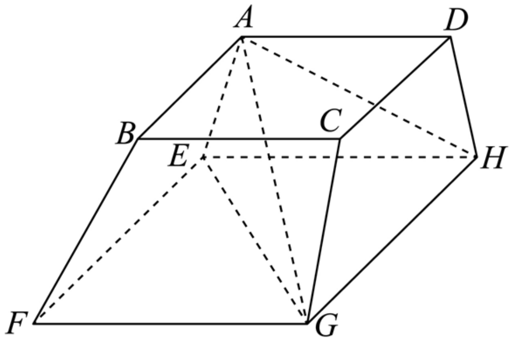
(1)若$p=q=0.5$，分别使用甲、乙两种武器进行一次测试.

①求甲种武器使目标无人机坠毁的概率；

②记甲、乙两种武器使目标无人机坠毁的数量为X，求X的分布列与数学期望.

(2)若$0<p\leq 0.4$，且$p+q=1$，试判断在一次测试中选用甲种武器还是乙种武器使得目标无人机坠毁的概率更大？并说明理由.

19．如图，在多面体$ABCDEFGH$中，平面$ABCD$与平面$EFGH$均为矩形且相互平行，$AB=1,BC=3,EF=2,FG=4,AE=DH,BF=CG,AH\perp EF$,设$\angle DHE=\theta$.



(1)求证：平面 $AEHD \perp$ 平面 $EFGH$；

(2)若多面体 $ABCDEFGH$ 的体积为 $\frac{8}{3}$：

（i）求 θ；

（ii）求平面 AEF 与平面 AEG 夹角的余弦值.

参考答案：

1．A

【分析】先根据空间公理确定平面γ；再根据面面平行的判定定理和性质可得出充分性成立；最后根据面面平行的性质及线面位置关系可得出必要性不成立.

【详解】设两条相交的直线m，n确定一个平面γ，

因为$m//\alpha$，$n//\alpha$，直线m，n相交，$m\subset\gamma$，$n\subset\gamma$，

所以根据面面平行的判定定理可得：$\alpha//\gamma$，

又因为$m//\beta$，$n//\beta$，直线m，n相交，$m\subset\gamma$，$n\subset\gamma$，

所以根据面面平行的判定定理可得：$\beta//\gamma$，

所以$\alpha//\beta$，充分性成立；

由$\alpha//\beta$，$m//\alpha$，$n//\alpha$可的：$m//\beta$，$n//\beta$或$m\subset\beta$，$n\subset\beta$，必要性不成立，

所以“$m//\beta$，$n//\beta$”是“$\alpha//\beta$”的充分不必要条件.

故选：A.

2．D

【分析】由错位相减法化简复数Z后再由复数的运算和复数的几何意义求出结果即可.

【详解】因为$Z=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}^3+\cdots+2024\mathrm{i}^{2024}$，

$Z\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}^3+3\mathrm{i}^4+\cdots+2024\mathrm{i}^{2025}$，

所以$Z\cdot(1-\mathrm{i})=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2024}-2024\mathrm{i}^{2025}=\dfrac{\mathrm{i}\left(1-\mathrm{i}^{2024}\right)}{1-\mathrm{i}}-2024\mathrm{i}^{2025}$，①

因为$i^4=1$，所以$\mathrm{i}^{2024}=\mathrm{i}^{4\times506}=1$，$\mathrm{i}^{2025}=\mathrm{i}^{4\times506+1}=\mathrm{i}$，

所以化简①可得$\dfrac{-2024\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-2024\mathrm{i}\times(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{-2024\mathrm{i}+2024}{2}=1012-1012\mathrm{i}$，

所以虚部为-1012，

故选：D.

3．A

【分析】对函数求导，利用$f(1)=-3$以及$f'(1)=0$解出a,b，进而得出答案.

【详解】由题意得$f'(x)=12x^2-2ax-2b$，因为$f(x)$在$x=1$处有极小值-3，

所以$\begin{cases}f'(1)=12-2a-2b=0\\f(1)=4-a-2b+2=-3\end{cases}$，解得$a=3,b=3$，

所以$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$，

令$f'(x)>0\Rightarrow(2x+1)(x-1)>0$，解得$x>1$或$x<-\frac{1}{2}$，

故函数$f(x)$在$(1,+\infty)$和$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$上为增函数，

令$f'(x)<0\Rightarrow(2x+1)(x-1)<0$，解得$-\frac{1}{2}<x<1$，

故函数$f(x)$在$\left(-\frac{1}{2},1\right)$上为减函数，

所以$f(x)$在$x=1$处有极小值，符合题意，

所以$b-a=0$，

故选：A.

4．B

【分析】根据众数、中位数的概念求解.

【详解】由小到大排列：1，2，4，5，6，6，8，15，

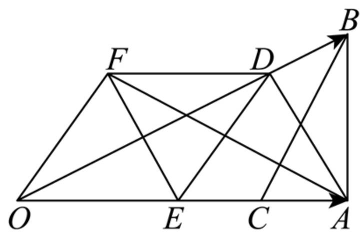
所以中位数为$\frac{5+6}{2}=5.5$，众数为6，

故选：B

5．C

【分析】先根据向量的夹角、模长及恒成立求出$|\vec{a}|=2$，利用距离和的最值求解$f(x)$的最小值.

【详解】作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=-t\vec{a}$，



因为不等式$|\vec{b}+t\vec{a}|\geq|\vec{b}-\vec{a}|$恒成立，则$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|\geq|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$，即$|\overrightarrow{CB}|\geq|\overrightarrow{AB}|$，

从而有$AB\perp OA$，故$|\overrightarrow{OA}|=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=2$.

设$\overrightarrow{OD}=x\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}$，

则$f(x)=\left|x\vec{b}-\vec{a}\right|+\left|x\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OE}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{ED}\right|$.

作点 E 关于直线 OB 的对称点 F，$|OF|=1,|OA|=2,\angle FOA=\dfrac{\pi}{3}$，

则 $f(x)=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{AD}|+|\overrightarrow{FD}|\geq|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\dfrac{1}{2}}=\sqrt{3}$，当且仅当 F,D,A 三点共线时取得等号.

故选：C.

【点睛】关键点点睛：本题求解的关键有二，一是恒成立条件的转化，可求 $|\overrightarrow{OA}|$ 的值；二是利用转化求得函数的最小值.

6．A

【分析】由 $\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha-2\sin\alpha\sin^2\beta$，两边同时除以 $\cos\alpha$ 得 $\tan\alpha=2\sin\beta\cos\beta-2\tan\alpha\sin^2\beta$，再将 $\tan\alpha$ 用 $\tan\beta$ 表示，再结合基本不等式求出 $\tan\alpha$ 的最大值及此时 $\tan\beta$ 的值，再根据两角和的正切公式即可得解.

【详解】由 $\sin\alpha=2\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha-2\sin\alpha\sin^2\beta$，

两边同时除以 $\cos\alpha$ 得 $\tan\alpha=2\sin\beta\cos\beta-2\tan\alpha\sin^2\beta$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{1+2\sin^2\beta}=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\beta+3\sin^2\beta}=\dfrac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta}=\dfrac{2}{3\tan\beta+\dfrac{1}{\tan\beta}}$，

因为 α，β 均为锐角，所以 $\tan\alpha>0,\tan\beta>0$，

则 $\tan\alpha=\dfrac{2}{3\tan\beta+\dfrac{1}{\tan\beta}}\leq\dfrac{2}{2\sqrt{3\tan\beta\cdot\dfrac{1}{\tan\beta}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $3\tan\beta=\dfrac{1}{\tan\beta}$，即 $\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，

所以 $\tan\alpha$ 取得最大值时，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：将已知变形成 $\tan\alpha=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{1+2\sin^2\beta}=\dfrac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta}$ 是解决本题的关键.

7．B

【分析】设圆 G 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，依题意可得 $D=2m-3$，$F=-4-11m$，再由点 $C(1,3)$ 在圆 G 上，即可得到 $E=3m-1$，从而得到圆 G 为

$x^2+y^2-3x-y-4+m(2x+3y-11)=0$，求出圆$G$过定点坐标，从而求出定弦长.

【详解】设圆G的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，因为圆G过A，B两点，

且A，B两点的横坐标满足方程$x^2+(2m-3)x-4-11m=0$，

所以$D=2m-3$，$F=-4-11m$，

所以圆G的方程为$x^2+y^2+(2m-3)x+Ey-4-11m=0$，

又$C(1,3)$在圆G上，

所以$1+9+2m-3+3E-4-11m=0$，解得$E=3m-1$，

所以圆G的方程为$x^2+y^2+(2m-3)x+(3m-1)y-4-11m=0$，

即$x^2+y^2-3x-y-4+m(2x+3y-11)=0$，

令$\begin{cases}x^2+y^2-3x-y-4=0\\2x+3y-11=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$或$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$，

即圆G恒过点$(1,3)$和$(4,1)$，又$\sqrt{(1-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$，所以该定值为$\sqrt{13}$.

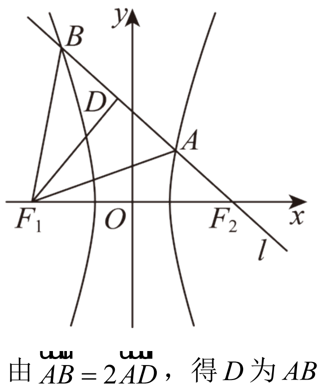
故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题关键是推导出圆的方程为$x^2+y^2-3x-y-4+m(2x+3y-11)=0$，从而求出圆过定点坐标.

8．B

【分析】设$|AF_1|=|BF_1|=m$，利用双曲线定义分别表示出$|AF_2|,|BF_2|$，利用直线的斜率得到$\angle AF_2F_1$，在$\mathrm{Rt}\triangle DF_1F_2$解出$m$，在$\triangle AF_1F_2$用余弦定理得到$a$与$c$的关系，即解出离心率$e$.

【详解】



由$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$，得$D$为$AB$的中点；又$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{F_1D}=0$，所以$F_1D\perp AB$，所以$|AF_1|=|BF_1|$；

设$|AF_1|=|BF_1|=m$，由双曲线的定义，得$|BF_2|=2a+m$，$|AF_2|=m-2a$，

所以$|AB|=|BF_2|-|AF_2|=4a$，从而$|AD|=\frac{1}{2}|AB|=2a$，所以$|DF_2|=|AD|+|AF_2|=m$；

由直线l的斜率为$-\frac{\sqrt{7}}{3}$，得$\tan\angle AF_2F_1=\frac{\sqrt{7}}{3},\cos\angle AF_2F_1=\frac{3}{4}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle DF_1F_2$中，$|DF_2|=|F_1F_2|\cos\angle AF_2F_1$，即$m=2c\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}c$；

在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理，得$|AF_1|^2=|F_1F_2|^2+|AF_2|^2-2|F_1F_2|\times|AF_2|\times\cos\angle AF_2F_1$，

即$\left(\frac{3}{2}c\right)^2=4c^2+\left(\frac{3}{2}c-2a\right)^2-2\cdot 2c\cdot\left(\frac{3}{2}c-2a\right)\times\frac{3}{4}$，整理得$4a^2-\frac{1}{2}c^2=0$，

解得$\frac{c^2}{a^2}=8$，所以$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=2\sqrt{2}$.

故选：B.

9．ABC

【分析】由中位数的概念可判断 A，根据平均数的概念结合等差数列的性质判断 B，由方差计算公式即可判断 CD.

【详解】对于 A，原数据的中位数为x_6，去掉x_6后的中位数为$\frac{1}{2}(x_5+x_7)=x_6$，即中位数没变，故 A 正确；

对于 B，原数据的平均数为$\bar{x}=\frac{1}{11}\left(x_1+x_2+\cdots+x_{11}\right)=\frac{1}{11}\times\frac{11\left(x_1+x_{11}\right)}{2}=x_6$，

去掉x_6后的平均数为$\overline{x'}=\frac{1}{10}\left(x_1+x_2+\cdots+x_5+x_7+x_8+\cdots+x_{11}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{10\left(x_1+x_{11}\right)}{2}=x_6=\bar{x}$，即平均数不变，故 B 正确；

对于 C，则原数据的方差为$s^2=\frac{1}{11}[(x_1-x_6)^2+(x_2-x_6)^2+\cdots+(x_{11}-x_6)^2]$，

去掉x_6后的方差为$s_0^2=\frac{1}{10}[(x_1-x_6)^2+(x_2-x_6)^2+\cdots+(x_5-x_6)^2+(x_7-x_6)^2+\cdots+(x_{11}-x_6)^2]$，

故$s^2<s_0^2$，即方差变大，故 C 正确，D 错误.

故选：ABC.

10．ABD

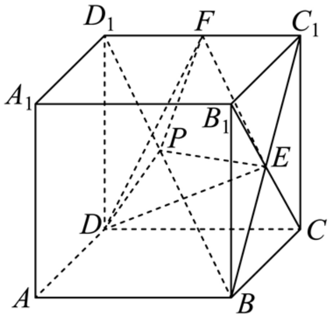
【分析】A 选项，先得到$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，故点$P$在线段$D_1B$上，证明出$D_1B//EF$，所以三棱锥$D-PEF$为定值；B 选项，点$P$为线段$D_1B$的中点，作出辅助线，找到外接球球心，从而得到外接球半径和外接球面积；C 选项，取线段A_1D_1的中点F_1，由对称性知，$|PF|=|PF_1|$

，数形结合得到$\therefore |PF|+|PE|=|PF_1|+|PE|\geq |F_1E|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，从而得到周长的最小值；D 选项，由 $AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 得到点 P 的轨迹为以 Q 为圆心，半径为 1 的圆的一部分，求出圆的半径，得到轨迹长度.

【详解】A 选项，当 $\lambda+\mu=1$ 时，$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}+\mu\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DD_1}+(1-\lambda)\overrightarrow{DB}$，

故 $\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}=\lambda\left(\overrightarrow{DD_1}-\overrightarrow{DB}\right)$，即 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$，

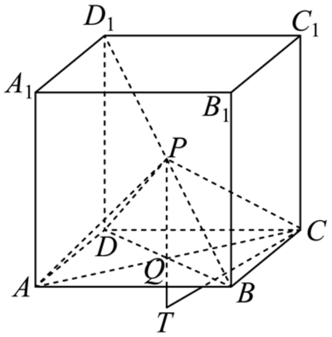
故点 P 在线段 D_1B 上，



连接 BC_1，与 B_1C 相交于点 E，则 E 为 BC_1 的中点，连接 EF，

因为 F 为 D_1C_1 的中点，所以 $D_1B//EF$，故三棱锥 $D-PEF$ 的体积为定值，A 正确；

B 选项，当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，由 A 选项可知，$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD_1}$，点 P 为线段 D_1B 的中点，



连接 AC,BD 相交于点 Q，则 $PQ\perp$平面 $ABCD$，

设正四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心为 T，则 P,Q,T 三点共线，

其中 $PQ=\frac{1}{2},CQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设 $PT=TC=r$，则 $TQ=\left|r-\frac{1}{2}\right|$，

由勾股定理得 $TC^2=TQ^2+CQ^2$，即 $r^2=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，

解得 $r=\frac{3}{4}$，